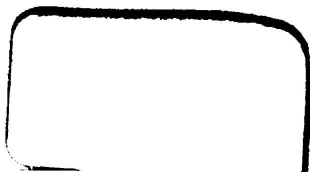


ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ IV.

СОДЕРЖАНІЕ:

ОДЕССА.
ТИПОГРАФІЯ П. А. ЗЕЛЕНАГО, КРАСНЫЙ ПЕРЕУЛ., Д. № 3.
1883.

ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ IV.

СОДЕРЖАНІЕ:

ОДЕССА.

Типографія П. А. Зеленаго, Красный переул., д. № 3.

1883.

Печатано по опредѣленію Совѣта Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. Секретарь *В. Репяховъ.*

О ПОВЕРХНОСТЯХЪ

обнимающихъ всѣ положенія движущейся сферы перемѣннаго радіуса.

А. Старкова.

По кривой двоякой кривизны, опредѣляемой уравненіями

$$x_1=f_1(\omega),\ y_1=f_2(\omega),\ z=f_3(\omega) \tag{1}$$

движется центръ сферы перемѣннаго радіуса

$$R=F(\omega); \tag{2}$$

всѣ положенія движущейся при такихъ условіяхъ сферы обнимаются *обертывающею поверхностію* (enveloppe), опредѣляемою уравненіемъ, получаемымъ по исключеніи ω изъ выраженій

$$\left.\begin{array}{c}(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R^2\\ (x-x_1)\dfrac{dx_1}{d\omega}+(y-y_1)\dfrac{dy_1}{d\omega}+(z-z_1)\dfrac{dz_1}{d\omega}+R\dfrac{dR}{d\omega}=0\end{array}\right\} \tag{3}$$

причемъ значенія x_1, y_1, z_1 и R опредѣляются уравненіями (1) и (2)

Свойства получаемыхъ такимъ образомъ обертывающихъ поверхностей указаны Монжемъ въ его прекрасномъ трактатѣ

о приложеніи анализа къ геометріи [1]). О томъ же предметѣ писалъ Ribaucour [2]). Но какъ у Монжа, такъ и у Ribaucour'a не приведены тѣ условія, которыя необходимы для образованія обертывающей поверхности. Точно также ими не указаны свойства arête de rebroussement, зависящія отъ скоростей движенія сферы и измѣненія ея радіуса.

Настоящая замѣтка имѣетъ цѣлію изслѣдовать въ зависимости отъ скорости движенія центра сферы и измѣненія ея радіуса тѣ случаи, когда обертывающая поверхность существуетъ, когда она обращается въ линію и когда наконецъ обертывающей поверхности не образуется вовсе. При этомъ указаны для всѣхъ этихъ случаевъ свойства arête de rebroussement.

I.

Для удобства изложенія будемъ разсматривать каждое положеніе движущейся сферы самостоятельною сферою, какъ бы сфера при движеніи въ каждомъ положеніи оставляла слѣдъ. Отъ этого выводы не измѣнятся.

Двѣ ближайжія сферы [3]) пересѣкаются по кругу, который будетъ принадлежать также и обертывающей поверхности [4]) и составляетъ ея такъ называемую *характеристику*.

При этомъ очевидно, что *сѣченіе обертывающей поверхности, нормальное къ линіи, по которой движется центръ сферы перемѣннаго радіуса, есть кругъ* [5]).

---

[1]) *Monge*. Application de l'Analyse à la Géomètrie Paris 1850. Pag. 369 etc.

[2]) *Ribaucour* Comptes Rendus de l'Academie des sciences de Paris LXVII, 1334. Также: Nouvelles correspondances Mathématiques Tom. V 1879. Pag. 385, 417. Tom. VI 1880 pag. 1.

[3]) Собственно двѣ рядомъ лежащія положенія движущейся сферы.

[4]) Собственно изъ этихъ круговъ пересѣченія, находящихся на безконечно маломъ другъ отъ друга разстояніи, и составляется обертывающая поверхность. Иначе сказать: рядомъ лежащія круги сливаются между собою и сліяніемъ образуютъ непрерывную обертывающую поверхность.

[5]) Къ этому слѣдуетъ прибавить, что сѣченіе обертывающей поверх-

Плоскости двухъ рядомъ лежащихъ такихъ круговъ пересѣкаются по прямой линіи, которая или пересѣкаетъ оба круга въ двухъ точкахъ, или составляетъ общую касательную къ нимъ [6]). Въ первомъ случаѣ образуется обертывающая поверхность, во второмъ случаѣ—только обертывающая кривая.

Точки пересѣченія окружностей двухъ разсматриваемыхъ круговъ суть точки пересѣченія трехъ рядомъ лежащихъ положеній движущейся сферы. Точки эти находятся на обертывающей поверхности и составляютъ кривую, имѣющую двѣ вѣтви и называемую Монжемъ arête de rebroussement. Въ томъ случаѣ, когда двѣ рядомъ лежащія окружности пересѣченія сферъ имѣютъ одну только общую точку, обѣ вѣтви кривой arête de rebroussement сливаются въ одну, которая, какъ увидимъ ниже, есть развертка линіи движенія центра и въ тоже время замѣняетъ обертывающую поверхность.

Наконецъ линіи пересѣченія плоскостей круговъ пересѣченія сферъ образуютъ линейчатую разверстывающуюся [7]) поверхность, которая въ частномъ случаѣ—именно, когда линія центровъ плоская кривая, обращается въ цилиндрическую, имѣющею перпендикулярнымъ сѣченіемъ плоскость линіи центровъ. Разсматриваемая линейчатая развертывающаяся поверхность въ пересѣченіи съ обертывающею поверхностію движущейся сферы даетъ двѣ вѣтви кривой arête de rebroussement.

ности должно быть сдѣлано параллельно нормальной плоскости къ кривой движенія центра въ точкѣ (x_1, y_1, z_1), на разстояніи

$$a = R\frac{\frac{dR}{d\omega}}{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\omega}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{d\omega}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{d\omega}\right)^2}}$$

по касательной въ этой точкѣ въ сторону движенія центра сферы.

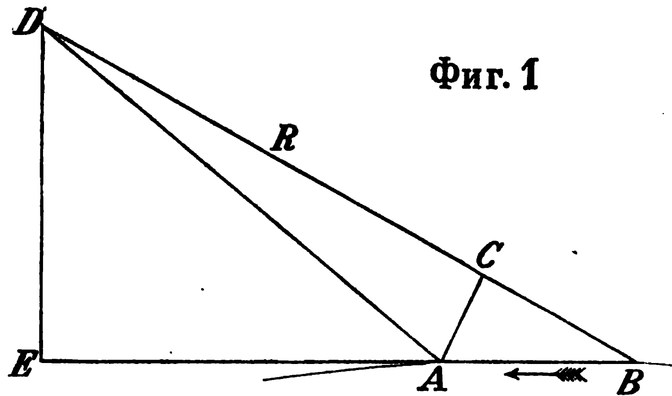
[6]) Въ частномъ случаѣ плоскости такихъ круговъ могутъ быть параллельны. Образуемыя при этомъ обертывающія поверхности будутъ поверхностями вращенія.

[7]) Такъ какъ двѣ рядомъ лежащія такія линіи находятся въ плоскости одного и того же круга.

II.

Опредѣлимъ, въ какой зависимости между собою находятся скорость движенія центра, скорость измѣненія радіуса движущейся сферы и радіусъ круга сѣченія двухъ рядомъ лежащихъ положеній движущейся сферы.

Означимъ чрезъ $BD=R$ радіусъ движущейся сферы (фиг. 1), центръ которой находится въ точкѣ A, чрезъ $CB=dR$ его приращеніе и чрезъ $ds=AB$ приращеніе дуги кривой, по которой движется центъ. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ BDE и ABC



подобныхъ между собою, имѣемъ

$$DE : DB = AC : AB$$

или, называя радіусъ круга пересѣченія двухъ сферъ чрезъ $\nu = DE$,

$$\nu : R = AC : ds ,$$

откуда

$$\nu = R\frac{AC}{ds}$$

Опредѣляя изъ треугольника ABC катетъ AC, имѣемъ

$$AC = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{ds^2 - dR^2} ,$$

а потому

$$\nu=\frac{R}{ds}\sqrt{ds^2-dR^2}$$

и наконецъ

$$\nu=\frac{R}{\left(\frac{ds}{d\omega}\right)}\sqrt{\left(\frac{ds}{d\omega}\right)^2-\left(\frac{dR}{d\omega}\right)^2}$$

Изъ этого выраженія слѣдуетъ, что

1. *Обертывающая поверхность существуетъ въ томъ случаѣ, когда скорость движенія центра болѣе скорости измѣненія радіуса*, такъ какъ въ противномъ случаѣ имѣемъ

$$\frac{ds}{d\omega}<\frac{dR}{d\omega} \text{ и } \nu=\frac{R}{\left(\frac{ds}{d\omega}\right)}\sqrt{\left(\frac{dA}{d\omega}\right)^2-\left(\frac{ds}{d\omega}\right)^2}.\sqrt{-1}$$

2. *Обертывающая поверхность обращается въ обертывающую линію, если скорость движенія центра и скорость измѣненія радіуса движущейся сферы равны между собою*, такъ какъ имѣемъ

$$\frac{ds}{d\omega}=\frac{dR}{d\omega} \text{ и } \nu=0$$

3. *Обертывающая поверхность*, какъ мы видѣли выше, *существуетъ когда*

$$\frac{ds}{d\omega}<\frac{dR}{d\omega}$$

При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что чѣмъ болѣе разнятся между собою скорости движенія центра и скорость измѣненія радіуса, тѣмъ шире, если можно такъ выразиться, обертывающая поверхность, — тѣмъ размѣры ея круговыхъ сѣченій больше.

И наоборотъ, чѣмъ менѣе разнятся между собою указанныя скорости, тѣмъ у́же обертывающая поверхность, тѣмъ размѣры ея круговыхъ сѣченій меньше, такъ что при равенствѣ скоростей обертывающая поверхность обращается въ линію.

Изъ треугольника ABC величина угла, составляемаго радіусомъ движущейся сферы R, проведеннымъ къ кругу пересѣченія, съ касательной, опредѣлится

$$\operatorname{Cos}\theta=\frac{CB}{AB} \quad \text{или} \quad \operatorname{Cos}\theta=\frac{\left(\frac{dR}{d\omega}\right)}{\left(\frac{ds}{d\omega}\right)}, \tag{4}$$

откуда слѣдуетъ, что при $\frac{dR}{d\omega}=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ и получаемыя обертывающія поверхности будутъ les surfaces des canaux.

При $\frac{dR}{d\omega}=\frac{ds}{d\omega}$, $\theta=0$ и обертывающая поверхность обращается въ линію, пересѣкающую касательную въ точкѣ (x_1, y_1, z_1) на разстояніи, ровномъ $\int ds=s+c$.

Опредѣляя изъ выраженія (4) значеніе $\frac{dR}{d\omega}$ и интегрируя между предѣлами ω и ω_0, найдемъ

$$R=\int_{\omega_0}^{\omega}\cos\theta\frac{ds}{d\omega}d\omega=\int_{s_0}^{s}\cos i\, ds,$$

выраженіе для радіуса движущейся сферы

III.

Уравненіе обертывающей поверхности получится по исключеніи ω изъ выраженій

$$\begin{aligned}&(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R^2\\&(x-x_1)\frac{dx_1}{d\omega}+(y-y_1)\frac{dy_1}{d\omega}+(z-z_1)\frac{dz_1}{d\omega}+R\frac{dR}{d\omega}=0\ ,\end{aligned}\qquad(3)$$

гдѣ значенія x_1, y_1, z_1 и R опредѣляются уравненіями (1) и (2)

Перенеся во второмъ изъ уравненій (3) членъ $R\frac{dR}{d\omega}$ во вторую часть и затѣмъ возвысивъ обѣ части его въ квадратъ, получимъ

$$(x-x_1)^2\left(\frac{dx_1}{d\omega}\right)^2+2(x-x_1)(y-y_1)\frac{dx_1}{d\omega}\cdot\frac{dy_1}{d\omega}+(y-y_1)^2\left(\frac{dy_1}{d\omega}\right)^2+$$

$$+2(x-x_1)(z-z_1)\frac{dx_1}{d\omega}\cdot\frac{dz_1}{d\omega}+2(y-y_1)(z-z_1)\frac{dy_1}{d\omega}\cdot\frac{dz_1}{d\omega}+$$

$$+(z-z_1)^2\left(\frac{dz_1}{d\omega}\right)^2=R^2\left(\frac{dR}{d\omega}\right)^2$$

Но извѣстно, что

$$\left(\frac{dx_1}{d\omega}\right)^2=\left(\frac{ds}{d\omega}\right)^2-\left(\frac{dy_1}{d\omega}\right)^2-\left(\frac{dz_1}{d\omega}\right)^2$$

$$\left(\frac{dy_1}{d\omega}\right)^2=\left(\frac{ds}{d\omega}\right)^2-\left(\frac{dx_1}{d\omega}\right)^2-\left(\frac{dz_1}{d\omega}\right)^2$$

$$\left(\frac{dz_1}{d\omega}\right)^2=\left(\frac{ds}{d\omega}\right)^2-\left(\frac{dx_1}{d\omega}\right)^2-\left(\frac{dy_1}{d\omega}\right)^2$$

Вносл эти значенія въ предыдущее выраженіе, замѣняя $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$ на основаніи перваго уравненія системы (3) чрезъ R^2, затѣмъ перенося $R^2\left(\frac{ds}{d\omega}\right)^2$ во вторую часть и наконецъ помноживъ все на -1 и раздѣливъ на R^2 получимъ

$$\left[\frac{x-x_1}{R}\cdot\frac{dy_1}{d\omega}-\frac{y-y_1}{R}\cdot\frac{dx_1}{d\omega}\right]^2+\left[\frac{x-x_1}{R}\cdot\frac{dz_1}{d\omega}-\frac{z-z_1}{R}\cdot\frac{dx_1}{d\omega}\right]^2+$$
$$+\left[\frac{y-y_1}{R}\cdot\frac{dz_1}{d\omega}-\frac{z-z_1}{R}\cdot\frac{dy_1}{d\omega}\right]^2=\left(\frac{ds}{d\omega}\right)^2-\left(\frac{dR}{d\omega}\right)^2 \qquad (5)$$

т. е. сумма трехъ квадратовъ нѣкоторыхъ количествъ равняется разности квадратовъ двухъ другихъ количествъ.

Разсматривая вторую часть уравненія (5), мы видимъ, что могутъ быть три случая—именно:

1. Когда по абсолютной величинѣ имѣемъ

$$\frac{ds}{d\omega}<\frac{dR}{d\omega},$$

тогда вторая часть уравненія будетъ отрицательною. Первая же часть, какъ представляющая сумму трехъ квадратовъ, всегда положительна, а потому въ этомъ случаѣ уравненіе (5) невозможно, а слѣдовательно невозможна и система (3) т. е. *обертывающей поверхности не существуетъ, когда скорость движенія центра меньше скорости измѣненія радіуса* [8]).

2. Когда

$$\frac{ds}{d\omega}=\frac{dR}{d\omega},$$

вторая часть уравненія (5) обращается въ нуль и все уравненіе по сокращеніи на R^2 принимаетъ видъ

$$\left[(x-x_1)\frac{dy_1}{d\omega}-(y-y_1)\frac{dx_1}{d\omega}\right]^2+\left[(x-x_1)\frac{dz_1}{d\omega}-(z-z_1)\frac{dx_1}{d\omega}\right]^2+$$
$$+\left[(y-y_1)\frac{dz_1}{d\omega}-(z-z_1)\frac{dy_1}{d\omega}\right]^2=0$$

---

[8]) См. выше стр. 5 п. 1.

т. е. сумма трехъ квадратовъ равна нулю, что можетъ быть только въ томъ случаѣ, когда каждый въ отдѣльности квадратъ равенъ нулю. Вслѣдствіе этого уравненіе (5) въ этомъ случаѣ разлагается на три уравненія вида:

$$(x-x_1)\frac{dy_1}{d\omega}-(y-y_1)\frac{dx_1}{d\omega}=0$$

$$(x-x_1)\frac{dz_1}{d\omega}-(z-z_1)\frac{dx_1}{d\omega}=0 \qquad (6)$$

$$(y-y_1)\frac{dz_1}{d\omega}-(z-z_1)\frac{dy_1}{d\omega}=0$$

Очевидно, одно изъ этихъ уравненій есть слѣдствіе двухъ другихъ, а потому система (6) состоитъ только изъ двухъ самостоятельныхъ уравненій и представляетъ уравненіе касательной въ точкѣ (x_1, y_1, z_1) къ кривой, по которой движется центръ сферы.

Изъ условія

$$\frac{dR}{d\omega}=\frac{ds}{d\omega}$$

имѣемъ

$$R=s+c$$

а потому система уравненій (3), опредѣляющая обертывающую поверхность, обратится въ слѣдующую

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=(s+c)^2$$

$$(x-x_1)\frac{dy_1}{d\omega}-(y-y_1)\frac{dx_1}{d\omega}=0 \qquad (7)$$

$$(x-x_1)\frac{dz_1}{d\omega}-(z-z_1)\frac{dx_1}{d\omega}=0$$

три уравненія, изъ которыхъ по исключеніи ω, s, x_1, y_1 и z_1 помощію (1) получимъ два уравненія между x, y и z, пред-

ставляющія кривую линію. Слѣдовательно *въ случаѣ равенства скоростей движенія центра и измѣненія радіуса получится вмѣсто обертывающей поверхности обертывающая линія* [9]).

Послѣднія два уравненія системы (7) показываютъ, что всѣ точки обертывающей кривой находятся на касательныхъ къ линіи, по которой движется центръ; первое уравненіе той же системы (7) показываетъ, что точки обертывающей кривой находятся на разстояніи $R=s+c$ отъ линіи центровъ, а потому система (7) представляетъ развертку линіи центровъ.

Слѣдовательно въ случаѣ, *когда обертывающая поверхность обращается въ обертывающую линію, эта линія есть развертка кривой, по которой движется центръ сферы.*

Въ этомъ же можно убѣдиться и такимъ образомъ.

Опредѣливъ изъ системы (7) значенія $(x-x_1)$, $(y-y_1)$ и $(z-z_1)$, перенося x_1, y_1 и z_1 во вторую часть и принимая s за перемѣнную независимую, получимъ

$$x=x_1-(s+c)\frac{dx_1}{ds},\quad y=y_1-(s+c)\frac{dy_1}{ds},\quad z=z_1-(s+c)\frac{dz_1}{ds} \qquad (8)$$

а это есть видъ, въ которомъ обыкновенно представляется уравненіе развертки для данной кривой.

Съ другой стороны, *развертка данной кривой можетъ быть представлена какъ уравненіями системы* (7), *такъ и уравненіями системы* (8).

3. Третій случай, когда

$$\frac{ds}{d\omega}>\frac{dR}{d\omega};$$

въ этомъ случаѣ обертывающая поверхность существуетъ [10])

---

[9]) См. выше стр. 5 п. 2.

[10]) См. выше стр. 5 п. 3.

и можетъ быть представлена, кромѣ системы (3), еще системою уравненій вида

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R^2$$

$$\left[\frac{dy_1}{d\omega}\cos\alpha-\frac{dx_1}{d\omega}\cos\beta\right]^2+\left[\frac{dz_1}{d\omega}\cos\alpha-\frac{dx_1}{d\omega}\cos\gamma\right]^2+$$

$$+\left[\frac{dz_1}{d\omega}\cos\beta-\frac{dy_1}{d\omega}\cos\gamma\right]^2=A^2\ ,$$

гдѣ чрезъ α, β и γ обозначены углы, составляемые радіусомъ R съ осями координатъ, и чрезъ A^2 разность между квадратами скоростей движенія центра и измѣненія радіуса

$$A^2=\left(\frac{ds}{d\omega}\right)^2-\left(\frac{dR}{d\omega}\right)^2, \tag{9}$$

Разрѣшивши систему (3) относительно z и положивъ для краткости

$$\frac{dx_1}{d\omega}=p,\ \frac{dy_1}{d\omega}=q,\ \frac{dz_1}{d\omega}=n\ \text{ и }\ \frac{dR}{d\omega}=r$$

получимъ

$$z=z_1-n\frac{Rr+(y-y_1)q}{p^2+n^2}\pm$$

$$\pm\frac{p}{p^2+n^2}\sqrt{A^2(R^2-(y-y_1)^2)-(Rq+(y-y_1)r)^2}$$

$$z=z_1-n\frac{Rr+(x-x_1)}{q^2+n^2}\pm \tag{10}$$

$$\pm\frac{q}{q^2+n^2}\sqrt{A^2(R^2-(x-x_1)^2)-(Rp+(x-x_1)r)^2}$$

выраженія, изъ которыхъ слѣдуетъ, что получаемая поверхность пересѣкается прямою въ двухъ точкахъ.

Если линія движенія центра плоская и находится на плоскости XY, то

$$z_1=0,\ n=\frac{dz_1}{d\omega}=0$$

и выраженія (10) принимаютъ видъ

$$z=\pm\frac{1}{p}\sqrt{A^2(R^2-(y-y_1)^2)-(Rq+(y-y_1)r)^2}$$

$$z=\pm\frac{1}{q}\sqrt{A^2(R^2-(x-x_1)^2)-(Rp+(x-x_1)r)^2}$$

откуда слѣдуетъ, что образуемая при этомъ поверхность симметрично расположена относительно плоскости XY.

IV.

Уравненіе arête de rebroussement получится по исключеніи ω изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned}&(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R^2\\&(x-x_1)\frac{dx_1}{d\omega}+(y-y_1)\frac{dy_1}{d\omega}+(z-z_1)\frac{dz_1}{d\omega}+R\frac{dR}{d\omega}=0\\&(x-x_1)\frac{d^2x_1}{d\omega^2}+(y-y_1)\frac{d^2y_1}{d\omega^2}+(z-z_1)\frac{d^2z_1}{d\omega^2}+R\frac{d^2R}{d\omega^2}-A^2=0\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

гдѣ значеніе A^2 опредѣляется выраженіемъ (9).

Для изслѣдованія свойствъ этой кривой, приведемъ ея уравненія къ виду

$$x=\varphi_1(\omega),\quad y=\varphi_2(\omega),\quad z=\varphi_3(\omega)$$

т. е. рѣшимъ систему (11) относительно x, y и z.

Чтобы упростить получаемыя притомъ выраженія, сдѣлаемъ слѣдующія положенія

$$x-x_1=X,\quad y-y_1=Y,\quad z-z_1=Z$$

$$\frac{dx_1}{d\omega}=p\,,\ \frac{dy_1}{d\omega}=q\,,\ \frac{dz_1}{d\omega}=n\,,\ \frac{dR}{d\omega}=r$$

$$\frac{d^2x_1}{d\omega^2}=p_1\,,\ \frac{d^2y_1}{d\omega^2}=q_1\,,\ \frac{d^2z_1}{d\omega^2}=n_1\,,\ \frac{d^2R}{d\omega^2}=r_1 \text{ и } \frac{dA}{d\omega}=A_1$$

вслѣдствіе чего система (11) получитъ видъ

$$\begin{aligned} &X^2+Y^2+Z^2=R^2\\ &Xp+Yq+Zn+Rr=0\\ &Xp_1+Yq_1+Zn_1+Rr_1-A^2=0 \end{aligned} \qquad (12)$$

Опредѣляя изъ двухъ послѣднихъ уравненій системы (12) X и Y и полагая при этомъ

$$N=\begin{vmatrix} p, & q\\ p_1, & q_1\end{vmatrix},\qquad Q=\begin{vmatrix} p, & n\\ p_1, & n_1\end{vmatrix},\qquad P=\begin{vmatrix} q, & n\\ q_1, & n_1\end{vmatrix}$$

$$L=R\begin{vmatrix} p, & r\\ p_1, & r_1\end{vmatrix}-A^2p,\ M=R\begin{vmatrix} q, & r\\ q_1, & r_1\end{vmatrix}-A^2q,\ W=R\begin{vmatrix} n, & r\\ n_1, & r_1\end{vmatrix}-A^2n$$

найдемъ

$$X=\frac{PZ+M}{N} \text{ и } Y=-\frac{QZ+L}{N} \qquad (13)$$

Вносяя эти значенія въ первое уравненіе системы (12), получимъ для опредѣленія Z выраженіе

$$Z^2(P^2+Q^2+N^2)+2(PM+QL)Z+M^2+L^2-N^2R^2=0\ ,$$

откуда, опредѣливъ Z, найдемъ

$$Z=\frac{-(PM+QL)\pm N\sqrt{R^2(N^2+P^2+Q^2)-(M^2+L^2+W^2)}}{N^2+P^2+Q^2}, \qquad (14)$$

такъ какъ

$$(PM+QL)^2-(M^2+L^2)(N^2+P^2+Q^2)+N^2R^2(N^2+Q^2+P^2)=$$
$$=N^2R^2(P^2+Q^2+N^2)-N^2(M^2+L^2)-(MQ-PL)^2=$$
$$=N^2[R^2(P^2+Q^2+N^2)-(M^2+L^2+W^2)],$$

потому что

$$MQ-PL=NW$$

Выраженіе, находящееся подъ корнемъ въ формулѣ (14), еще можетъ быть преобразовано такимъ образомъ:

$$N^2+P^2+Q^2=(pq_1-qp_1)^2+(qn_1-nq_1)^2+(pn_1-np_1)^2=$$
$$=(p^2+n^2)q_1^2+(q^2+n^2)p_1^2+(p^2+q^2)n_1^2-2(pp_1qq_1+pp_1nn_1+qq_1nn_1);$$

замѣнивъ въ этомъ послѣднемъ

$$p^2+n^2=r^2+A^2-q^2,\ q^2+n^2=r^2+A^2-p^2 \text{ и } p^2+q^2=r^2+A^2-n^2$$

получимъ

$$N^2+P^2+Q^2=(r^2+A^2)(p_1^2+q_1^2+n_1^2)-(pp_1+qq_1+nn_1)^2$$

Продифференцировавъ выраженіе

$$p^2+q^2+n^2=r^2+A^2,$$

найдемъ

$$pp_1+qq_1+nn_1=rr_1+AA_1,$$

а потому[11])

---

[11]) Тоже самое выраженіе можетъ быть представлено и въ такомъ видѣ

$$N^2+P^2+Q^2=\left(\frac{ds}{d\omega}\right)^2(p_1{}^2+q_1{}^2+n_1{}^2)-\left(\frac{ds}{d\omega}\right)^2\left(\frac{d^2s}{d\omega^2}\right)^2$$

Кромѣ того, данное въ текстѣ выраженіе сливается съ приведеннымъ здѣсь при $\frac{dR}{d\omega}=\frac{ds}{d\omega}$

$$N^2+P^2+Q^2=(r^2+A^2)(p_1^2+q_1^2+n_1^2)-(rr_1+AA_1)^2$$

Съ другой стороны выраженіе

$$L^2+M^2+W^2=[R(pr_1-rp_1)-A^2p]^2+[R(qr_1-rq_1)-A^2q]^2+$$

$$+[R(nr_1-rn_1)-A^2n]=R^2[(pr_1-rp_1)^2+(qr_1-rq_1)^2+(nr_1-rn_1)^2]-$$

$$-2A^2R[p(pr_1-rp_1)+q(qn_1-nq_1)+n(nr_1-rn_1)]+A^4(p^2+q^2+n^2)$$

Но коеффиціентъ при R^2 есть

$$(p_1r-rp_1)^2+(qr_1-rq_1)^2+(nr_1-rn_1)^2=$$

$$=r_1^2(p^2+q^2+n^2)-2rr_1(pp_1+qq_1+nn_1)+r^2(p_1^2+q_1^2+n_1^2)=$$

$$=r_1^2(r^2+A^2)-2rr_1(rr_1+AA_1)+r^2(p_1^2+q_1^2+n_1^2)=$$

$$=r^2(p_1^2+q_1^2+n_1^2)-(rr_1+AA_1)^2+A^2(r_1^2+A_1^2)$$

Далѣе коеффиціентъ при $2A^2R$ есть

$$p(pr_1-rp_1)+q(qr_1-rq_1)+n(nr_1-rn_1)=r_1(p^2+q^2+n^2)-$$

$$-r(pp_1+qq_1+nn_1)=r_1(r^2+A^2)-r(rr_1+AA_1)=A(Ar_1-rA_1),$$

и наконецъ коеффиціентъ при A^4 есть

$$p^2+q^2+n^2=r^2+A^2;$$

а потому

$$L^2+M^2+W^2=R^2[r^2(p_1^2+q_1^2+n_1^2)-(rr_1+AA_1)^2+A^2(r_1^2+A_1^2)]-$$

$$-2A^3R(Ar_1-rA_1)+A^4(r^2+A^2)$$

и подкоренное выраженіе формулы (14) будетъ

$$R^2(N^2+P^2+Q^2)-(L^2+M^2+W^2)=$$

$$=R^2A^2(p_1^2+q_1^2+n_1^2-r_1^2-A_1^2)-2A^3R(Ar_1-rA_1)+A^4(r^2+A^2)$$

или, обозначивъ для краткости

$$B^2(p_1{}^2+q_1{}^2+n_1{}^2-r_1{}^2-A_1{}^2)-2AB(Ar_1-rA_1)+A^2(r^2+A^2)=\mathfrak{B}$$

получимъ

$$B^2(N^2+P^2+Q^2)-L^2+M^2+W^2)=A^2\mathfrak{B}$$

Преобразуемъ теперь выраженіе $PM+QL$ такимъ образомъ.

$$PM+QL=R[P(qr_1-rq_1)+Q(pr_1-rp_1)]-A^2(Pq+Qp)$$

Помноживъ и раздѣливъ множителя при R на r, получимъ

$$\frac{P(qrr_1-r^2q_1)+Q(p_1rr-r^2p_1)}{r},$$

гдѣ замѣнивъ въ числителѣ rr_1 и r^2 чрезъ

$$r^2=p^2+q^2+n^2-A^2,\ rr_1=pp_1+qq_1+nn_1-AA_1$$

и замѣтивъ, что

$$Qq-Pp=nN,$$

найдемъ для коеффиціента при R

$$\frac{n(P^2+Q^2+N^2)+A[A(Pq_1+Qp_1)-A_1(Pq+Qp)]}{r}$$

а потому значеніе $PM+QL$ будетъ

$$\frac{Rn}{r}(P^2+Q^2+N^2)+A\frac{RA(Pq_1+Qp_1)-(RA_1+Ar)(Pq+Qp)}{r}$$

Полагая снова для краткости

$$\frac{RA(Pq_1+Qp_1)-(RA_1+rA)(Pq+Qp)}{r}=\mathfrak{C}$$

получимъ значеніе z въ такомъ видѣ

$$z=z_1-\frac{Rn}{r}-A\frac{\mathfrak{C}\pm N\sqrt{\mathfrak{B}}}{N^2+P^2+Q^2} \qquad (15)$$

Тѣмъ же самымъ путемъ получимъ значенія x и y въ такомъ видѣ (вслѣдствіе симметричности системы рѣшаемыхъ уравненій и одинаковости свойствъ коеффиціентовъ при неизвѣстныхъ)

$$y=y_1-\frac{Rq}{r}-A\frac{\mathfrak{C}_1\pm Q\sqrt{\mathfrak{B}}}{N^2+P^2+Q^2}$$

$$x=x_1-\frac{Rp}{r}-A\frac{\mathfrak{C}_2\pm P\sqrt{\mathfrak{B}}}{N^2+P^2+Q^2} \qquad (16$$

гдѣ значенія $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ суть

$$\mathfrak{C}_1=\frac{RA(Pn_1+Np_1)-(RA_1+rA)(Pn+Np)}{r}$$

$$\mathfrak{C}_2=\frac{RA(Qn_1+Nq_1)-(RA_1+rA)(Qn+Nq)}{r}$$

Изъ выраженій (15) и (16) очевидно, что arête de rebroussement имѣетъ двѣ вѣтьви.

Въ случаѣ, когда линія, по которой движется центръ, плоская кривая и находится, положимъ, на плоскости XY, тогда

$$z_1=0,\ \frac{dz_1}{d\omega}=n=0,\ \frac{d^2z_1}{d\omega^2}=n_1=0,$$

а потому

$$P=0,\quad Q=0\quad \text{и}\quad \mathfrak{C}=0$$

а значенія z, y и x будутъ

$$z = \pm \frac{A}{N}\sqrt{\mathfrak{B}}$$

$$y = y_1 - \frac{Rq}{r} - A\frac{R(Ap_1 - A_1p) - rAp}{r} \qquad (17)$$

$$x = x_1 - \frac{Rp}{r} - A\frac{R(Aq_1 - A_1q) - rAq}{r}$$

изъ которыхъ очевидно, что въ этомъ случаѣ обѣ вѣтьви arête de rebroussement симметрично расположены относительно плоскости XY, такъ какъ для каждаго значенія ω существуетъ по одному значенію для x и y и два равныхъ и противоположныхъ значенія для z. Очевидно, это свойство справедливо для всякой плоской кривой линіи центровъ, въ какой бы плоскости она не находилась.

Въ случаѣ, если скорости движенія центра и измѣненія радіуса равны т. е. если $\frac{dR}{d\omega} = \frac{ds}{d\omega}$ или $A=0$, имѣемъ изъ системы (15) и (16)

$$z = z_1 - \frac{Rn}{r}, \quad y = y_1 - \frac{Rq}{r}, \quad x = x_1 - \frac{Rp}{r} \qquad (18)$$

т. е. вмѣсто кривой съ двойными вѣтьвями получится кривая состоящая только изъ одной вѣтьви, иначе сказать, для случая $A=0$ обѣ вѣтьви arête de rebroussement сливаются въ одну.

Кромѣ того изъ условія

$$r = \frac{dR}{d\omega} = \frac{ds}{d\omega} \text{ имѣемъ } R = s + c$$

и система (18) обратится, если въ тоже время возьмемъ за независимое перемѣнное s, въ слѣдующую

$$z=z_1-(s+c)\frac{dz_1}{ds},\quad y=y_1-(s+c)\frac{dy_1}{ds},\quad x=x_1-(s+c)\frac{dx_1}{ds}$$

которая представляетъ собою уравненіе развертки линіи центровъ. Очевидно также, что и система (18) представляетъ уравненіе развертки тойже линіи центровъ, только въ другой формѣ.

Случай $A=0$ обращаетъ систему (17) въ слѣдующую

$$z=0,\quad y=y_1-\frac{Rq}{r},\quad x=x_1-\frac{Rp}{r}$$

т. е. при движеніи центра по плоской кривой и при равенствѣ скоростей движенія центра и измѣненія радіуса обѣ вѣтьви arête de rebroussement сливаются въ одну, представляющую развертку линіи центровъ и находящуюся въ одной съ ней плоскости, такъ какъ $z=0$ [12]).

V.

Выведемъ условія существованія точки пересѣченія четырехъ рядомъ лежащихъ положеній движущейся сферы.

Уравненія опредѣляющія такую точку будутъ

$$\left.\begin{aligned}
&(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R^2\\
&(x-x_1)\frac{dx_1}{d\omega}+(y-y_1)\frac{dy_1}{d\omega}+(z-z_1)\frac{dz_1}{d\omega}+R\frac{dR}{d\omega}=0\\
&(x-x_1)\frac{d^2x_1}{d\omega^2}+(y-y_1)\frac{d^2y_1}{d\omega^2}+(z-z_1)\frac{d^2z_1}{d\omega^2}+R\frac{d^2R}{d\omega^2}-A^2=0\\
&(x-x_1)\frac{d^3x_1}{d\omega^3}+(y-y_1)\frac{d^3y_1}{d\omega^3}+(z-z_1)\frac{d^3z_1}{d\omega^3}+R\frac{d^3R}{d\omega^3}-3A\frac{dA}{d\omega}=0
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

---

[12]) Изъ выведеннаго въ текстѣ положенія слѣдуетъ также, что развертка плоской кривой находится въ одной съ ней плоскости и что нѣтъ для плоской кривой развертокъ, лежащихъ въ другихъ плоскостяхъ.

Получилось четыре уравненія опредѣляющія четыре неизвѣстныя x, y, z и ω. Во всякой точкѣ, гдѣ удовлетворяются значеніями x, y, z и ω уравненія (19), существуетъ пересѣченіе четырехъ рядомъ лежащихъ положеній движущейсясферы [13]).

Съ другой стороны, могутъ быть случаи, когда значенія x_1, y_1, z_1 и R_1 таковы, что система (19) удовлетворяется тожественно, независимо отъ значеній ω. Въ этомъ случаѣ движущаяся сфера во всѣхъ своихъ положеніяхъ проходитъ чрезъ одну точку.

Въ самомъ дѣлѣ, назовемъ круги пересѣченія рядомъ лежащихъ положеній движущейся сферы чрезъ O_1, O_2; O_3, O_4 и т. д. Причемъ, первое положеніе движущейся сферы пересѣкается съ рядомъ лежащимъ вторымъ по кругу O_1, второе съ рядомъ лежащимъ третьимъ по кругу O_2, третье съ рядомъ лежащимъ четвертымъ по кругу O_3 и т. д. Пересѣченіе круговъ между собою будемъ означать, пересѣченіе напримѣръ O_1 и O_2 чрезъ (O_1O_2), пересѣченіе трехъ $(O_1O_2O_3)$ и т. д.

Точка пересѣченія четырехъ рядомъ лежащихъ положеній движущейся сферы требуетъ $(O_1O_2O_3)$.

Если предположимъ, что существованіе точки пересѣченія четырехъ рядомъ лежащихъ положеній движущейся сферы независитъ отъ ω, иначе сказать существуетъ для всякаго значенія ω, то получимъ слѣдующія пересѣченія круговъ.

$$(O_1O_2O_3), \quad (O_2O_3O_4), \quad (O_3O_4O_5) \quad \text{и т. д.},$$

изъ которыхъ слѣдуетъ, что если три круга O_1, O_2 и O_3 имѣютъ общую точку и четвертый кругъ O_4 имѣетъ общую точку съ O_2 и O_3, то всѣ четыре круга приходятъ чрезъ одну точку [14]). Тѣже самыя разсужденія могутъ быть примѣнимы и къ

---

[13]) Значенія x, y, z и ω, опредѣляемыя системой (19), могутъ быть и мнимыми, тогда искомой точки вовсе не существуетъ.

[14]) Если бы положенія круговъ O_1, O_2, O_3 и O_4 не зависѣли отъ закона, выражаемаго непрерывной функціей, и были бы совершенно произвольны то указаннаго въ текстѣ заключенія сдѣлать было бы невозможно.

слѣдующему пятому кругу O_5, который съ кругами O_1, O_2, O_3 и O_4 имѣетъ общую точку и т. д.

Слѣдовательно, *если существуетъ, независимо отъ значеній* ω, *такая точка, чрезъ которую проходятъ каждыя четыре сосѣднія положенія движущейся сферы, или три круга ихъ пересѣченія, то чрезъ эту точку проходятъ всѣ остальные круги пересѣченія, а стало быть и всѣ положенія движущейся сферы.*

Выведемъ условіе, которымъ опредѣляется указанный здѣсь случай.

Присоединивъ къ положеніямъ стр. 13 еще слѣдующія

$$\frac{d^3x_1}{d\omega^3}=p_2,\ \frac{d^3y_1}{d\omega^3}=q_2,\ \frac{d^3z_1}{d\omega^3}=n_2,\ \frac{d^3R}{d\omega^3}=r_2 \text{ и } \frac{dA}{d\omega}=A_1$$

представимъ систему (19) въ такомъ видѣ

$$\begin{aligned} X^2+Y^2+Z^2&=R^2\\ Xp+Yq+Zn+Rr&=0\\ Xp_1+Yq_1+Zn_1+Rr_1-A^2&=0\\ Xp_2+Yq_2+Zn_2+Rr_2-3AA_1&=0 \end{aligned} \qquad (20)$$

Опредѣляя изъ трехъ послѣднихъ уравненій системы (20) значенія X, Y, Z и внося ихъ въ первое уравненіе той-же системы, получимъ

$$\begin{vmatrix} Rr, & q, & n \\ Rr_1-A^2, & q_1, & n_1 \\ Rr_2-3AA_1, & q_2, & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p, & Rr, & n \\ p_1, & Rr_1-A^2, & n_1 \\ p_2, & Rr_2-3AA_1, & n_2 \end{vmatrix}^2 +$$

$$+\begin{vmatrix} p, & q, & Rr \\ p_1, & q_1, & Rr_1-A^2 \\ p_2, & q_2, & Rr_2-3AA_1 \end{vmatrix}^2 = R^2 \begin{vmatrix} p, & q, & n \\ p_1, & q_1, & n_1 \\ p_2, & q_2, & n_2 \end{vmatrix}^2 \qquad (21)$$

дифференціальное уравненіе съ производными третьяго порядка второй степени, представляющее условіе, выполненіе котораго необходимо для того, чтобы существовала точка пересѣченія всѣхъ положеній движущейся сферы.

Общій интегралъ уравненія (21) есть

$$R^2=(x_1-C_1)^2+(y_1-C_2)^2+(z-C_3)^2 \qquad (22)$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 суть постоянныя произвольныя, независимыя между собою [15]).

Такимъ образомъ въ томъ случаѣ, когда значеніе R опредѣляется выраженіемъ (22), существуетъ точка, чрезъ которую проходятъ всѣ положенія движущейся сферы.

Найдемъ теперь координаты этой точки.

Внеся значеніе R, опредѣляемое уравненіемъ (22) въ систему (20), получимъ

$$x^2-2(x-C_1)x_1+y^2-2(y-C_2)y_1+z^2-2(z-C_3)z_1=C_1^2+C_2^2+C_3^2$$

$$(x-C_1)p+(y-C_2)q+(z-C_3)n=0$$

$$(x-C_1)p_1+(y-C_2)q_1+(z-C_3)n_1=0 \qquad (23)$$

$$(x-C_1)p_2+(y-C_2)q_2+(z-C_3)n_2=0$$

опредѣляя изъ трехъ послѣднихъ уравненій системы (23) x, y и z, получимъ

$$x=C_1, \quad y=C_2, \quad z=C_3 \qquad (24)$$

значенія, которыя удовлетворяютъ также и первому уравненію системы (23).

---

[15]) Объ интегрированіи уравненія (21) см. ниже стр. 25 и слѣд.

Для плоской кривой движенія центра, находящейся на плоскости XY, имѣемъ

$$z_1=0, \quad n=0, \quad n_1=0, \quad n_2=0$$

и изъ трехъ послѣднихъ уравненій системы (23) опредѣляются только двѣ координаты $x=C_1$ и $y=C_2$; значеніе же z опредѣлится изъ перваго уравненія той же системы (23), которое принимаетъ видъ

$$z^2=C_3^2 \quad \text{откуда} \quad z=\pm C_3$$

т. е. въ этомъ случаѣ существуютъ двѣ точки пересѣченія всѣхъ положеній движущейся сферы, расположенныя симметрично относительно плоскости XY. При $C_3=0$ обѣ точки сливаются въ одну, находящуюся на плоскости XY.

Изъ системы (23) очевидно, что чрезъ точку

$$x=C_1, \quad y=C_2, \quad z=C_3 \tag{24}$$

проходятъ всѣ положенія движущейся сферы.

Въ самомъ дѣлѣ, продолжая дифференцировать послѣднее уравненіе системы (23) и означая дальнѣйшія производныя x_1, y_1 и z_1 чрезъ p, q и n съ соотвѣтствующими указателями, получимъ слѣдующій рядъ уравненій

$$(x-C_1)p_3+(y-C_2)q_3+(z-C_3)n_3=0$$

$$(x-C_1)p_4+(y-C_2)q_4+(z-C_3)n_4=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(x-C_1)p_m+(y-C_2)q_m+(z-C_3)n_m=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

которыя опредѣляютъ пересѣченія 5, 6, . . m, . . рядомъ

лежащихъ положеній движущейся сферы и всѣ удовлетворяются значеніями

$$x=C_1,\quad y=C_2,\quad z=C_3 \tag{24}$$

т. е. *чрезъ точку, опредѣляемую* (24) *проходятъ всѣ положенія движущейся сферы.*

Въ случаѣ, когда

$$R^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$$

всѣ положенія движущейся сферы проходятъ чрезъ начало координатъ.

Къ сказанному выше остается прибавить, что уравненіе (21) не имѣетъ особеннаго интеграла, а потому изслѣдуемый вопросъ допускаетъ только указанное выше рѣшеніе.

VI.

Приложимъ къ частному случаю полученные выше результаты.

Пусть центръ сферы перемѣннаго радіуса движется по плоской кривой, опредѣляемой уравненіемъ

$$y_1^2=2px_1$$

Кромѣ того измѣненіе радіуса опредѣляется закономъ

$$R^2=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+c^2 \tag{25}$$

Уравненіе обертывающей поверхности получится по исключеніи x_1 изъ выраженій

$$x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2-2(x-a)x_1-2(y-b)\sqrt{2px_1}=0$$

$$x-a+(y-b)\frac{p}{\sqrt{2px_1}}=0 \tag{26}$$

Второе изъ этихъ уравненій даетъ

$$\sqrt{2px_1} = -p\frac{y-b}{x-a} \quad \text{и} \quad x_1 = \frac{p}{2}\left(\frac{y-b}{x-a}\right)^2$$

Внося значенія $\sqrt{2px_1}$ и x_1 въ первое уравненіе (26) получимъ

$$(x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2)(x-a)+p(y-b)^2=0$$

уравненіе искомой обертывающей поверхности.

Указаннымъ выше значеніемъ R (25) опредѣляются двѣ точки

$$x=a, \quad y=b, \quad z=\pm c$$

чрезъ которыя проходятъ всѣ положенія движущейся сферы.

Arête de rebroussement для этой поверхности не существуетъ.

Въ заключеніе остается показать, какимъ образомъ интегрируется уравненіе (21) (см. выше стр. 21).

Начнемъ съ наиболѣе простого случая именно, когда кривая движенія центра есть плоская и находится въ плоскости XY. Въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$z_1=0, \quad n=0, \quad n_1=0, \quad n_2=0$$

и уравненіе (21) обратится

$$\begin{vmatrix} p, & q, & Rr \\ p_1, & q_1, & Rr_1-A^2 \\ p_2, & q_2, & Rr_2-3AA_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (27)$$

Такъ какъ независимая перемѣнная ω явно въ уравненіе (27) не входитъ, то можемъ принять за независимую перемѣнную

x_1 или y_1. Если примемъ за независимую перемѣнную x_1, то будемъ имѣть

$$p=1,\quad p_1=0 \quad \text{и} \quad p_2=0$$

и уравненіе (27) обратится

$$\begin{vmatrix} q_1, & Rr_1-A^2 \\ q_2, & Rr_2-3AA_1 \end{vmatrix}=0 \tag{28}$$

Развернемъ уравненіе (28), замѣнивши предварительно A^2 и AA_1 ихъ значеніями

$$A^2=q^2+1-r^2 \quad \text{и} \quad AA_1=qq_1-rr_1,$$

при этомъ получимъ

$$3\frac{dy_1}{dx_1}\left(\frac{d^2y_1}{dx_1^2}\right)^2-\frac{d^3y_1}{dx_1^3}\left[1+\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2\right]+\frac{d^3y_1}{dx_1^3}\left[R\frac{d^2R}{dx_1^2}+\left(\frac{dR}{dx_1}\right)^2\right]-$$

$$-\frac{d^2y_1}{dx_1^2}\left[R\frac{d^3R}{dx_1^3}+3\frac{dR}{dx_1}.\frac{d^2R}{dx_1}\right]=0 \tag{29}$$

уравненіе (21) въ самомъ простѣйшемъ случаѣ.

Напишемъ уравненіе (29) въ такой формѣ

$$qq_1^2+2qq_1^2-q_2(q^2+1)+q_2(Rr_1+r^2)-q_1(Rr_2+3rr_1)=0, \tag{30}$$

здѣсь замѣнимъ

$$2qq_1^2-q_2(q^2+1)=q_1^2\frac{d\frac{q^2+1}{q_1}}{dx_1}$$

а также

$$Rr_1+r^2=\frac{d(Rr)}{dx_1}=\rho$$

$$Rr_2+3rr_1=\frac{d(Rr_1+r^2)}{dx_1}=\frac{d^2(Rr)}{dx_1^2}=\rho_1$$

и наконецъ

$$q_2\rho-q_1\rho_1=-q_1^2\frac{d\frac{\rho}{q_1}}{dx_1} \text{ и } q=\frac{dy_1}{dx_1}$$

Вслѣдствіе этого уравненіе (30) обратится

$$q_1^2\frac{dy_1}{dx_1}+q_1^2\frac{d\frac{q^2+1}{q_1}}{dx_1}-q_1^2\frac{d\frac{\rho}{q_1}}{dx_1}=0$$

Сокративъ это послѣднее на q_1^2 и интегрируя, получимъ

$$y_1+\frac{q^2+1}{q_1}-\frac{\rho}{q_1}=C_2, \tag{31}$$

гдѣ уничтожимъ знаменателя и, замѣтивъ, что

$$q_1y_1+q^2=\frac{d(y_1q)}{dx_1},\ \rho=\frac{d(Rr)}{dx_1} \text{ и } q_1=\frac{d^2y_1}{dx_1^2}=\frac{dq}{dx_1}$$

получимъ вмѣсто уравненія (31)

$$\frac{d(y_1q)}{dx_1}-\frac{d(Rr)}{dx_1}=C_2\frac{dq}{dx_1}-1,$$

которое интегрируя, найдемъ

$$y_1q-Rr=C_2q-x_1+C_1, \tag{32}$$

Но $q=\frac{dy_1}{dx_1}$ и $r=\frac{dR}{dx_1}$, а потому интегрируя снова, получимъ

$$y_1^2-R^2=2C_2y_1-x_1^2+2C_1x_1+c'_3$$

интегралъ даннаго уравненія, въ которомъ полагая

$$c'_3=-(C_1^2+C_2^2+C_3^2),$$

найдемъ

$$R^2=(x_1-C_1)^2+(y_1-C_2)^2+C_3^2 \tag{33}$$

Теперь будемъ интегрировать болѣе сложную форму уравненія (21), именно уравненіе (27).

Прежде всего замѣнимъ A^2 и AA_1 ихъ значеніями

$$A^2=p^2+q^2-r^2 \text{ и } AA_1=pp_1+qq_1-rr_1,$$

при этомъ получимъ

$$\begin{vmatrix} p, & q, & Rr \\ p_1, & q_1, & Rr_1+r^2-(p^2+q^2) \\ p_2, & q_2, & Rr_2+3rr_1-3(pp_1+qq_1) \end{vmatrix}=0 \qquad (34)$$

Присоединивъ къ опредѣлителю (34) тожественно равняющійся нулю опредѣлитель

$$-\begin{vmatrix} p, & q, & px_1+qy_1 \\ p_1, & q_1, & p_1x_1+q_1y_1 \\ p_2, & q_2, & p_2x_1+q_2y_1 \end{vmatrix}=0, \qquad (35)$$

получимъ

$$\begin{vmatrix} p, & q, & Rr-(px_1+qy_1) \\ p_1, & q_1, & Rr_1+r^2-(p^2+q^2+p_1x_1+q_1y_1) \\ p_2, & q_2, & Rr_2+3rr_1-(3pp_1+3qq_1+p_2x_1+q_2y_1) \end{vmatrix}=0 \qquad (36)$$

Положивъ

$$\rho=Rr-(px_1+qy_1)$$

будемъ имѣть

$$Rr_1+r^2-(p^2+q^2+p_1x_1+q_1y_1)=\frac{d[Rr-(px+qy_1)]}{d\omega}=\frac{d\rho}{d\omega}=\rho_1$$

и

$$Rr_2+3rr_1-(3pp_1+3qq_1+p_2x_1+q_2y\ )=$$

$$=\frac{d[Rr_1+r^2-(p^2+q^2+p_1x_1+q_1y_1)]}{d\omega}=\frac{d^2\rho}{d\omega^2}=\rho_2;$$

слѣдствіе чего уравненіе (36) обратится

$$\begin{vmatrix} p, & q, & \rho \\ p_1, & q_1, & \rho_1 \\ p_2, & q_2, & \rho_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (37)$$

а это есть линейное уравненіе второго порядка, интегралъ котораго будетъ

$$\rho = c_1 p + c_2 q \qquad (38)$$

гдѣ c_1 и c_2 суть произвольныя постоянныя; интегрируя еще разъ выраженіе (38)

$$R\frac{dR}{d\omega} - \left(x_1\frac{dx_1}{d\omega} + y_1\frac{dy_1}{d\omega}\right) = c_1\frac{dx_1}{d\omega} + c_2\frac{dy_1}{d\omega}$$

найдемъ

$$R^2 - (x_1^2 + y_1^2) = 2c_1x_1 + 2c_2y_1 + c_3'$$

выраженіе, въ которомъ положивъ

$$c_1 = -C_1, \quad c_2 = -C_2 \text{ и } c_3' = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2,$$

получимъ

$$R^2 = (x_1 - C_1)^2 + (y_1 - C_2)^2 + C_3^2$$

интегралъ уравненія (27), совершенно одинаковый по виду съ интеграломъ (33) уравненія (29).

Предыдущихъ изслѣдованій достаточно, чтобы приступить къ интегрированію уравненія (21) въ самой общей формѣ.

Замѣнимъ прежде всего въ уравненіи (21) A^2 и AA_1 ихъ значеніями

$$A^2 = p^2 + q^2 + n^2 - r^2, \quad AA_1 = pp_1 + qq_1 + nn_1 - rr_1$$

затѣмъ прибавимъ къ первому опредѣлителю уравненія (21) тожественно равняющееся нулю выраженіе

$$x_1\begin{vmatrix} p, & q, & n \\ p_1, & q_1, & n_1 \\ p_2, & q_2, & n_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} px_1+qy_1+nz_1, & q, & n \\ p_1x_1+q_1y_1+n_1z_1, & q_1, & n_1 \\ p_2x_1+q_2y_1+n_2z_1, & q_2, & n_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ко второму опредѣлителю уравненія (21) тожественно равняющееся нулю выраженіе

$$y_1\begin{vmatrix} p, & q, & n \\ p_1, & q_1, & n_1 \\ p_2, & q_2, & n_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p, & px_1+qy_1+nz_1, & n \\ p_1, & p_1x_1+q_1y_1+n_1z_1, & n_1 \\ p_2, & p_2x_1+q_2y_1+n_2z_1, & n_2 \end{vmatrix} = 0,$$

къ третьему опредѣлителю уравненія (21) тожественно равняющееся нулю выраженіе

$$z_1\begin{vmatrix} p, & q, & n \\ p_1, & q_1, & n_1 \\ p_2, & q_2, & n_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p, & q, & px_1+qy_1+nz_1 \\ p_1, & q_1, & p_1x_1+q_1y_1+n_1z_1 \\ p_2, & q_2, & p_2x_1+q_2y_1+n_2z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Далѣе, означивъ чрезъ ρ

$$\rho = Rr_1 - (px_1+qy_1+nz_1), \quad \rho_1 = \frac{d\rho}{d\omega} \text{ и } \rho_2 = \frac{d^2\rho}{d\omega^2}$$

а также опредѣлителей знакомъ $\pm\Sigma$ и раздѣливъ преобразованное такимъ образомъ уравненіе (21) на

$$\begin{vmatrix} p, & q, & n \\ p_1, & q_1, & n_1 \\ p_2, & q_2, & n_2 \end{vmatrix} = \pm\Sigma p q_1 n_2,$$

получимъ

$$\left[x_1 + \frac{\pm\Sigma \rho q_1 n_2}{\pm\Sigma p q_1 n_2}\right]^2 + \left[y_1 + \frac{\pm\Sigma p \rho_1 n_2}{\pm\Sigma p q_1 n_2}\right]^2 + \left[z_1 + \frac{\pm\Sigma p q_1 \rho_2}{\pm\Sigma p q_1 n_2}\right]^2 = R^2$$

Полагая въ этомъ уравненіи

$$\frac{\pm\Sigma\rho q_1 n_2}{\pm\Sigma p q_1 n_2}=-\varphi,\ \frac{\pm\Sigma p\rho_1 n_2}{\pm\Sigma p q_1 n_2}=-\xi,\ \frac{\pm\Sigma p q_1 \rho_2}{\pm\Sigma p q_1 n_2}=-\psi \qquad (39)$$

найдемъ для интеграла уравненія (21) выраженіе

$$(x_1-\varphi)^2+(y_1-\xi)^2+(z_1-\psi)^2=R^2 \qquad (40)$$

Остается затѣмъ опредѣлить значенія φ, ξ и ψ изъ выраженій (39). Для этого напишемъ выраженія (39) такъ

$$\pm\Sigma(\rho+\varphi p)q_1 n_2=0,\ \pm\Sigma p(\rho_1+\xi q_1)n_2=0,\ \pm\Sigma p q_1(\rho_2+\psi n_2)=0;\ (41)$$

этими тремя уравненіями опредѣляется одно и тоже значеніе ρ, а потому мы должны имѣть

$$\varphi=C_1,\ \xi=C_2,\ \psi=C_3, \qquad (42)$$

гдѣ C_1, C_2 и C_3 суть постоянныя произвольныя, независимыя между собою. При этомъ значеніе ρ, удовлетворяющее всѣмъ тремъ уравненіямъ системы (41), будетъ

$$\rho=-(C_1 p+C_2 q+C_3 n)$$

Интегрируя это выраженіе, будемъ имѣть

$$R^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2-2C_1x_1-2C_2y_1-2C_3z_1+C_4; \qquad (43)$$

зная съ одной стороны, что уравненіе (21) третьяго порядка и потому его интегралъ можетъ имѣть только три постоянныхъ произвольныхъ независимыхъ между собою, слѣдовательно C_4 должно быть нѣкоторой функціей отъ C_1, C_2 и C_3; съ другой стороны имѣя въ виду, что выраженія (40) и (43) должны между собою совпадать, сдѣлаемъ

$$C_4=C_1^2+C_2^2+C_3^2$$

тогда интегралъ уравненія (21) будетъ вида

$$R^2=(x_1-C_1)^2+(y_1-C_2)^2+(z_1-C_3)^2, \qquad (22)$$

который совершенно совпадаетъ съ интеграломъ (40) при положеніяхъ (42).

Форма интеграла (44) для уравненія (21) подтверждается также и слѣдующими геометрическими соображеніями.

Предположимъ, что точка, чрезъ которую проходятъ всѣ положенія движущейся сферы, опредѣляется координатами

$$x=C_1,\ y=C_2 \text{ и } z=C_3 \tag{24}$$

Сфера, образуемая радіусомъ R_1 изъ точки (x_1', y_1', z_1') на кривой движенія центра, должна проходить чрезъ точку (24), для чего необходимо

$$R_1^2=(x_1'-C_1)^2+(y_1'-C_2)^2+(z_1'-C_3)^2$$

Точно также, сфера, образуемая радіусомъ R_2 изъ точки (x_1'', y_1'', z_1'') на линіи центровъ, должна проходить чрезъ точку (45), для чего необходимо

$$R_2^2=(x_1''-C_1)^2+(y_1''-C_2)^2+(z_1''-C_3)^2$$

Очевидно, тѣже самыя разсужденія могутъ быть примѣнимы ко всякой сферѣ, имѣющей центръ въ какой угодно точкѣ на линіи движенія центра, а потому должно быть вообще для существованія точки, чрезъ которую проходятъ всѣ положенія движущейся сферы,

$$R^2=(x_1-C_1)^2+(y_1-C_2)^2+(z_1-C_3)^2 \tag{22}$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 означаютъ произвольно взятыя координаты этой точки.

Слѣдовательно *для существованія точки пересѣченія всѣхъ положеній движущейся сферы необходимо*, *чтобы значеніе R удовлетворяло или дифференціальному уравненію* (21) *или интегралу этого уравненія* (22).

Изъ лекцій математической физики.

Н. Умова.

I. *Теорія безконечно малыхъ колебаній консервативной системы около положенія устойчиваго равновѣсія.*

Въ настоящей статьѣ разсматриваются безконечно малыя движенія консервативной системы около положенія устойчиваго равновѣсія, какъ для случая, когда корни характеристическаго уравненія (детерминанта линейныхъ дифференціальныхъ уравненій движенія) неравны, такъ и для случая ихъ равенства. Извѣстно, что Лагранжъ въ теоріи малыхъ колебаній, Лапласъ въ теоріи вѣковыхъ неравенствъ планетой системы, а за ними и многіе позднѣйшіе авторы, отвергали возможность существованія равныхъ корней въ указанномъ детерминантѣ на томъ основаніи, что въ интегралахъ движенія появились бы члены не періодическіе, а безпредѣльно возрастающіе съ временемъ. Правильное рѣшеніе настоящаго случая мы находимъ прежде всего у Weierstrass'а (Monatsberichte der königlichen Akademie zu Berlin 1858 г. p. 207), затѣмъ независимо у академика Сомова (Sur l'equation algébrique à l'aide de laquelle on determine les oscillations très petites d'un système de points matériels; Mémoires de l'Academie Imperiale des Sciences de St.-Petersburg, VII Serie, Tome I, № 14, 1859 года), и для случая болѣе общаго опять у Weier-

strass'a (Monatsberichte etc. 1879 г. p. 430). Этотъ вопросъ не затронутъ въ первомъ изданіи физики Томсона и Тета. (1867 г.) и въ ея нѣмецкомъ переводѣ (1871 г.). Въ новомъ же изданіи (1879 г.) указывается на работу Routh'a (Stability of Motion [Adams Prize Essay for 1877]), давшаго впервые полную теорію равныхъ корней детерминанта циклоидальнаго движенія; эта работа мнѣ неизвѣстна. При изслѣдованіи кратности корней миноровъ детерминанта въ зависимости отъ кратности корней самаго детерминанта, я воспользовался основной идеей Вейерштрасса; розысканіе же общихъ интеграловъ уравненій движенія съ надлежащимъ числомъ произвольныхъ постоянныхъ произведено мною инымъ путемъ.

§ 1. Представимъ себѣ консервативную систему изъ k матеріяльныхъ точекъ, между прямоугольными координатами коихъ существуетъ s кинематическихъ уравненій, не содержащихъ явно времени.

Называя черезъ T кинетическую энергію консервативной системы, черезъ W ея потенціальную энергію, уравненіе живыхъ силъ представится выраженіемъ:

$$T+W=\text{const}.$$

Кинетическая энергія системы есть величина существенно положительная для всѣхъ размѣщеній системы.

Потенціальная энергія системы имѣетъ наименьшее значеніе для размѣщенія точекъ системы, соотвѣтствующаго устойчивому равновѣсію. Прибавляя къ обѣимъ частямъ уравненія живыхъ силъ по нѣкоторому постоянному, мы всегда можемъ достигнуть того, что функція W въ положеніи устойчиваго равновѣсія будетъ равна нулю: при этомъ условіи во всѣхъ размѣщеніяхъ системы, потенціяльная энергія будетъ величиною существенно положительной, какъ и функція T. Если для системы возможно нѣсколько размѣщеній, соотвѣтствующихъ устойчивому равновѣсію, то принимая функцію W

равною нулю въ томъ изъ этихъ положеній, для котораго она наименьшая, значенія этой функціи для всякихъ другихъ размѣщеній системы будутъ положительными. Принимая же функцію W равною нулю для другихъ положеній устойчиваго равновѣсія, она будетъ оставаться положительною только для нѣкоторыхъ размѣщеній системы.

Вмѣсто 3 k прямоугольныхъ координатъ, опредѣляющихъ положенія точекъ системы и связанныхъ s кинематическими уравненіями, мы введемъ n независимыхъ перемѣнныхъ ξ, причемъ $n = 3\,k - s$. Если черезъ x_i, y_i, z_i, означимъ прямоугольныя координаты i-ой точки системы, то

$$x_i = f_i(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$$

$$y_i = F_i(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$$

$$z_i = \Phi_i(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$$

Такихъ уравненій имѣемъ $3k$.

Положимъ, что точки системы начинаютъ свое движеніе изъ нѣкотораго размѣщенія или соотвѣтствующаго одному изъ возможныхъ для системы положеній устойчиваго равновѣсія, или безконечно мало отъ него разнящагося. Значенія независимыхъ перемѣнныхъ для размѣщенія, соотвѣтствующаго этому устойчивому равновѣсію, обозначимъ черезъ $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots \xi_n^0$. Значеніе потенціяльной энергіи W_0 въ этомъ положеніи, примемъ равнымъ нулю. По вышесказанному W будетъ положительнымъ вообще не для всѣхъ размѣщеній системы.

Размѣщеніе безконечно близкое къ разсматриваемому положенію устойчиваго равновѣсія, опредѣлится независимыми перемѣнными

$$\xi_1^0 + \psi_1,\ \xi_2^0 + \psi_2, \ldots \xi_n^0 + \psi_n,$$

гдѣ $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ суть безконечно малыя независимыя перемѣнныя, число коихъ равно n. Прямоугольныя координаты $i^{ой}$

точки будутъ, означая черезъ x_i^0, y_i^0, z_i^0 ея координаты въ положеніи устойчиваго равновѣсія:

$$x_i = x_i^0 + \sum_1^n {}_j \left(\frac{dx_i}{d\xi_j}\right)_0 \psi_j$$

$$y_i = y_i^0 + \sum_1^n {}_j \left(\frac{dy_i}{d\xi_j}\right)_0 \psi_j \qquad \text{(1) (число уравненій) } 3k$$

$$z_i = z_i^0 + \sum_1^n {}_j \left(\frac{dz_i}{d\xi_j}\right)_0 \psi_j \quad .$$

гдѣ $\sum_1^n {}_j$ представляетъ сумму производныхъ по всѣмъ ξ_j для $j=1, 2, \ldots n$, и символъ $(\quad)_0$ показываетъ, что въ эти производныя должны быть подставлены значенія независимыхъ перемѣнныхъ въ размѣщеніи, соотвѣтствующемъ устойчивому равновѣсію, т. е. ξ_1^0, ξ_2^0, ... ξ_n^0. Дифференцируя уравненія (1) по времени t и обозначая $\frac{da}{dt}$ черезъ $\dot{a}$, получаемъ:

$$\dot{x}_i = \sum_1^n {}_j \left(\frac{dx_i}{d\xi_j}\right)_0 \dot{\psi}_j, \quad \dot{y}_i = \sum_1^n {}_j \left(\frac{dy_i}{d\xi_j}\right)_0 \dot{\psi}_j, \quad \dot{z}_i = \sum_1^n {}_j \left(\frac{dz_i}{d\xi_j}\right)_0 \dot{\psi}_j \qquad (2)$$

(число уравненій $3k$).

Докажемъ одно важное свойство уравненій (1) и (2). Если въ уравненіяхъ (1) для всѣхъ точекъ системы:

$$x_i = x_i^0, \; y_i = y_i^0, \; z_i^0 = z_i^0, \qquad (3)$$

то необходимо

$$\psi_1 = o, \; \psi_2 = o, \ldots \psi_n = o. \qquad (4)$$

Напишемъ уравненія (1) въ иномъ видѣ, вводя обозначенія a для коефиціентовъ при различныхъ ψ:

$$
\begin{array}{ll}
x_1=x_1^0+a_{11}\psi_1+a_{12}\psi_2+\ldots\ldots+a_{1n}\psi_n & x_1=x_1^0+\alpha_1 \\
y_1=y_1^0+a_{21}\psi_1+a_{22}\psi_2+\ldots\ldots+a_{2n}\psi_n & y_1=y_1^0+\alpha_2 \\
z_1=z_1^0+a_{31}\psi_1+a_{32}\psi_2+\ldots\ldots+a_{3n}\psi_n & z_1=z_1^0+\alpha_3 \\
x_2=x_2^0+a_{41}\psi_1+a_{42}\psi_2+\ldots\ldots+a_{4n}\psi_n \quad \text{или короче} & x_1=x_2^0+\alpha_4 \\
y_2=y_1^0+a_{51}\psi_1+a_{52}\psi_2+\ldots\ldots+a_{5n}\psi_n \qquad (5) & y_2=y_2^0+\alpha_5 \\
z_2=z_2^0+a_{61}\psi_1+a_{62}\psi_2+\ldots\ldots+a_{6n}\psi_n & z_2=z_2^0+\alpha_6 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
z_k=z_k^0+a_{3k,1}\psi_1+a_{3k,2}\psi_2+\ldots\ldots+a_{3k,n}\psi_n & z_k=z_k^0+\alpha_{3k}
\end{array}
$$

Внося сюда $x_1=x_1^0$, $y_1=y_1^0$ и пр., получимъ:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}\psi_1+a_{12}\psi+\ldots\ldots+a_{1n}\psi_n=0 \\
a_{21}\psi_1+a_{22}\psi_2+\ldots\ldots+a_{2n}\psi^n=0 \quad (3k \text{ уравненій}) \qquad (6) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{3k,1}\psi_1+a_{3k,2}\psi_2+\ldots\ldots+a_{3k,n}\psi_n=0
\end{array}
$$

Если эти выраженія удовлетворяются значеніями ψ отличными отъ нуля, то детерминантъ каждыхъ n уравненій, произвольно выбранныхъ между $3k$ уравненіями (6), долженъ быть равенъ нулю. Такъ, детерминантъ первыхъ n уравненій изъ (6) будетъ:

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\
a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n-1,1}, & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \\
a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots & a_{nn}
\end{vmatrix}=0. \qquad (7)
$$

Оставляя первые $n-1$ уравненій, вмѣсто n-го возьмемъ $(n+1)$-е; детерминантъ этой системы будетъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

и т. д.

Умножимъ теперь первыя вертикали этихъ детерминантовъ на произвольное ψ_1 и прибавимъ къ нимъ слѣдующія вертикали, помноженныя соотвѣтственно на произвольныя величины ψ_2, ψ_3 .... ψ_n; получимъ

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ \alpha_2, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1}, & a_{n-1,2}, & \dots & a_{n-1,n} \\ \alpha_n, & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ \alpha_2, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1}, & a_{n-1,2}, & \dots & a_{n-1,n} \\ \alpha_{n+1}, & a_{n,2}, & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \dots \qquad (9)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ \alpha_2, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1}, & a_{n-1,2}, & \dots & a_{n-1,n} \\ \alpha_{3k}, & a_{3k,2} & \dots & a_{3k,n} \end{vmatrix} = 0$$

Мы имѣемъ здѣсь $3k-n+1$ уравненій, которыя дадутъ возможность выразить α_n, $\alpha_{n+1}, \ldots \alpha_{3k}$ черезъ $n-1$ новыя независимыя перемѣнныя α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$, и такимъ образомъ выраженія (5) будутъ содержать не n независимыхъ перемѣнныхъ ψ, а только $n-1$ новыхъ перемѣнныхъ α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$; отсюда слѣдовало бы, что положенія точекъ системы, противно нашему допущенію, опредѣляются числомъ независимыхъ перемѣнныхъ меньшимъ n.

И такъ условія (3) необходимо влекутъ за собою и равенства (4).

Важное свойство уравненій (2) состоитъ въ томъ, что если для всѣхъ точекъ системы

$$\dot{x}_i=0, \ \dot{y}_i=0, \ \dot{z}_i=0,$$

то необходимо

$$\dot{\psi}_1=0, \ \dot{\psi}_2=0, \ldots \dot{\psi}_n=0.$$

Это свойство обусловливается тѣмъ обстоятельствомъ, что коэфиціенты при $\dot{\psi}$ въ уравненіяхъ (2) тѣже, что въ уравненіяхъ (1) или (5). По этому если уравненія (2) съ лѣвыми частями равными нулю удовлетворялись бы значеніями $\dot{\psi}$ отличными отъ нуля, то составленные изъ коэфиціентовъ этихъ уравненій детерминанты (7), (8) и пр. были бы равны нулю; изъ нихъ мы могли бы составить опять уравненія (9) и свели бы опредѣленіе положенія системы къ числу независимыхъ перемѣнныхъ, меньшему n, что невозможно.

§ 2. Называя черезъ m_i массу $i^{\text{-ой}}$ точки системы, ея кинетическая энергія представится выраженіемъ:

$$T=\frac{1}{2}\sum_1^k m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2) \qquad (10)$$

Внося сюда величины $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ изъ (2) получимъ:

$$T=\frac{1}{2}\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_j m_{ij}\,\psi_i\psi_j \tag{11}$$

Здѣсь $m_{ij}=m_{ji}$ представляетъ, если i отлично отъ j, половину коэфиціента при произведеніи $\psi_i\ \psi_j$ въ выраженіи $2T$, и равно этому коэфиціенту, если $i=j$. Всѣ коэфиціенты m_{ij} дѣйствительны.

Потенціяльная энергія системы для размѣщеній безконечно близкихъ къ положенію устойчиваго равновѣсія, въ коемъ ея значеніе принято равнымъ нулю, представится, останавливаясь на членахъ 2-го порядка:

$$W=f(\xi_1^0+\psi_1,\ \xi_2^0+\psi_2,\ldots\xi_n^0+\psi_n)=W_0+$$
$$+\sum_1^n{}_j\left(\frac{dW}{d\xi_j}\right)_0\psi_j+\frac{1}{2}\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_j\left(\frac{d^2W}{d\xi_j d\xi_i}\right)_0\psi_i\psi_j \tag{12}$$

Коэфиціенты при ψ_j и произведеніяхъ $\psi_i\ \psi_j$ дѣйствительны.

Такъ какъ перемѣнныя $\xi_1^0,\ \xi_2^0,\ldots\xi_n^0$ опредѣляютъ положеніе равновѣсія системы, силы же въ ней дѣйствующія имѣютъ силовую функцію — W, то мы должны имѣть:

$$\left(\frac{dW}{d\xi_1}\right)_0=0,\quad \left(\frac{dW}{d\xi_2}\right)_0=0\ldots\quad \left(\frac{dW}{d\xi_n}\right)_0=0;$$

а слѣдовательно

$$\sum_1^n{}_j\left(\frac{dW}{d\xi_j}\right)_0=0. \tag{13}$$

Далѣе, по свойству устойчивости равновѣсія, функція W въ положеніяхъ, по крайней мѣрѣ безконечно мало разнящихся отъ положенія устойчиваго равновѣсія, должна быть болѣе W_0. Такъ какъ послѣднее принято нами равнымъ нулю, то выраженіе

$$\frac{1}{2}\sum_1^n{}_j\sum_1^n{}_i\left(\frac{d^2W}{d\xi_i d\xi_j}\right)_0\psi_i\psi_j \tag{14}$$

должно быть положительнымъ для дѣйствительныхъ значеній ψ_i, лежащихъ, по крайней мѣрѣ, между безконечно малыми дѣйствительными предѣлами:

$$\begin{matrix} -\varepsilon_1, -\varepsilon_2 \ldots \ldots -\varepsilon_n \\ +\varepsilon^{(1)}, +\varepsilon^{(2)} \ldots \ldots +\varepsilon^{(n)} \end{matrix} \qquad (15)$$

и внутри этихъ предѣловъ должно обращаться въ нуль только для $x_i = x_i^0$, $y_i = y_i^0$ и пр. Легко доказать, что, вслѣдствіе перваго условія, функція (14) будетъ оставаться положительною для всякихъ дѣйствительныхъ значеній ψ_i, ψ_j, не только безконечно малыхъ, но и конечныхъ, при которыхъ выраженіе (14) теряетъ уже смыслъ потенціальной энергіи. Въ самомъ дѣлѣ, каковы бы ни были дѣйствительныя значенія ψ_i, всегда можно найти факторъ ε, столь малый, что величины $\varepsilon\psi_i$ падутъ внутри предѣловъ (15), а потому выраженіе

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_j\left(\frac{d^2W}{d\xi_i d\xi_j}\right)_0\psi_i\psi_j$$

будетъ положительнымъ; такъ какъ ε^2 положительно, то заключаемъ, что

$$\frac{1}{2}\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_j\left(\frac{d^2W}{d\xi_i d\xi_j}\right)_0\psi_i\psi_j$$

положительно, каковы бы ни были дѣйствительныя значенія ψ. Выраженіе (11), какъ представляющее сумму существенно положительныхъ величинъ (10), тоже положительно для всѣхъ дѣйствительныхъ значеній ψ.

Означимъ черезъ g_{ij} коэфиціентъ $\left(\frac{d^2W}{d\xi_i d\xi_j}\right)_0$, при чемъ $g_{ji} = g_{ij}$. Принимая во вниманіе условія $W_0 = 0$ и (13), получимъ изъ (12) и (11):

$$W = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_j g_{ij}\psi_i\psi_j$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_j m_{ij}\dot\psi_i\dot\psi_j \qquad (16)$$

Эти функціи:

(a) Положительны для всякихъ дѣйствительныхъ значеній ψ и $\dot\psi_j$. Это свойство доказано.

(b) Они обращаются въ нуль дѣйствительными значеніями перемѣнныхъ: первая только для $\psi=0$, вторая только для $\dot\psi=0$; это слѣдуетъ изъ того, что первая функція внутри предѣловъ (15) равна нулю, только когда $x_i = x_i^0$, $y = y_i^0$, $z_i = z_i^0$, а этимъ значеніямъ соотвѣтствуютъ значенія $\psi=0$; значенія же W для ψ лежащихъ внѣ предѣловъ (15) могутъ быть приведены, какъ показано выше, къ значеніямъ W для ψ лежащихъ внутри предѣловъ (15). Вторая функція обращается въ нуль дѣйствительными значеніями перемѣнныхъ только при $\dot x_i=0$, $\dot y_i=0$, $\dot z_i=0$, каковымъ значеніямъ соотвѣтствуютъ $\dot\psi_i=0$.

Раскроемъ теперь свойства коэфиціентовъ выраженій (16), обусловливаемыя свойствами (a) и (b) этихъ функцій.

Если всѣ ψ за исключеніемъ ψ_r, и всѣ $\dot\psi$ за исключеніемъ $\dot\psi_k$ суть нули, то выраженія (16) принимаютъ видъ:

$$W = \frac{1}{2} g_{rr}\psi^2_r, \quad T = \frac{1}{2} m_{kk}\dot\psi^2_k \qquad (17)$$

Если бы g_{rr} и m_{kk} были бы равны нулю, то выраженія W и T обращались бы въ нуль при ψ_r и $\dot\psi_k$ отличныхъ отъ нуля, что противорѣчитъ свойству (b). Отсюда заключаемъ, что коэфиціенты g_{ij} или m_{ij} для $i=j$, т. е. g_{ii}, m_{ii} отличны отъ нуля; кромѣ того они существенно положительны, ибо W и T положительны для всякихъ дѣйствительныхъ ψ и $\dot\psi$, и въ выраженіяхъ (17) множителями g_{rr} и m_{kk} являются ψ_r^2 и $\dot\psi_k^2$. Составимъ детерминантъ изъ коэфиціентовъ входящихъ въ выраженіе T (16):

$$D=\begin{vmatrix} m_{11}, & m_{12}, & \dots & m_{1n} \\ m_{21}, & m_{22}, & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1}, & m_{n2}, & \dots & m_{nn} \end{vmatrix}; \tag{18}$$

Это есть симметрическій детерминантъ, по свойству

$$m_{ij} = m_{ji}.$$

Будемъ означать миноръ этого детерминанта, составленный изъ элементовъ, остающихся послѣ устраненія горизонталей порядка r, s, t,.... и вертикалей порядка i, k, m,...., по способу Вандермонда, черезъ

$$\begin{pmatrix} r & s & t & \dots \\ i & k & m & \dots \end{pmatrix}.$$

Докажемъ, что детерминантъ и его главные миноры, т. е.

$$D,\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r & s \\ r & s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r\,s\,t \\ r\,s\,t \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 1, 2 \dots r-1, r+1 \dots n \\ 1, 2 \dots r-1, r+1 \dots n \end{pmatrix} = m_{rr} \tag{19}$$

отличны отъ нуля.

Произведемъ это доказательство для

$$\begin{pmatrix} r & s & t \\ r & s & t \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Это выраженіе будетъ детерминантомъ функціи T, если положимъ въ ней

$$\psi_r=0, \quad \psi_s=0, \quad \psi_t=0.$$

Посвойству однородности функціи T, имѣемъ въ этомъ случаѣ:

$$2T=\frac{dT}{d\dot\psi_1}\dot\psi_1+\ldots+\frac{dT}{d\dot\psi_{r-1}}\dot\psi_{r-1}+\frac{dT}{d\dot\psi_{r+1}}\dot\psi_{r+1}+\ldots+\frac{dT}{d\dot\psi_{t-1}}\dot\psi_{t-1}+ \qquad (21)$$

$$+\frac{dT}{d\dot\psi_{t+1}}\dot\psi_{t+1}+\ldots+\frac{dT}{d\dot\psi_n}\dot\psi_n,$$

при чемъ:

$$\frac{dT}{d\dot\psi_1}=m_{11}\dot\psi_1+\ldots+m_{1r-1}\dot\psi_{r-1}+m_{1r+1}\dot\psi_{r+1}+\ldots+m_{1n}\dot\psi_n$$

$$\frac{dT}{d\dot\psi_2}=m_{21}\dot\psi_1+\ldots+m_{2r-1}\dot\psi_{r-1}+m_{2r+1}\dot\psi_{r+1}+\ldots+m_{2n}\dot\psi_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (22)$$

$$\frac{dT}{d\dot\psi_n}=m_{n1}\dot\psi_1+\ldots+m_{nr-1}\dot\psi_{r-1}+m_{nr+1}\dot\psi_{r+1}+\ldots+m_{nn}\dot\psi_n.$$

Въ этихъ равенствахъ будутъ отсутствовать члены съ $\dot\psi_r$, $\dot\psi_s$, $\dot\psi_t$, какъ это выражено явно для членовъ съ $\dot\psi_r$.

Детерминантъ этихъ уравненій есть миноръ (20). Если онъ равенъ нулю, то будутъ существовать значенія $\dot\psi$, отличныя отъ нуля и обращающія въ нуль равенства (22), а слѣдовательно и T, по выраженію (21), что какъ мы знаемъ невозможно.

Докажемъ теперь, что детерминантъ D и его главные миноры (19) имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, а слѣдовательно всѣ положительны, ибо послѣдній миноръ m_{rr}, какъ выше было доказано, положителенъ.

Мы имѣемъ, по извѣстнымъ свойствамъ детерминантовъ:

$$m_{11}\binom{r}{1}+m_{12}\binom{r}{2}+\ldots+m_{1n}\binom{r}{n}=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m_{r1}\binom{r}{1}+m_{r2}\binom{r}{2}+\ldots+m_{rn}\binom{r}{n}=D \qquad (23)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m_{n1}\binom{r}{1}+m_{n2}\binom{r}{2}+\ldots+m_{nn}\binom{r}{n}=0$$

Умножимъ эти строки соотвѣтственно на $\binom{r}{1}, \binom{r}{2} \ldots \binom{r}{r} \ldots \binom{r}{n}$ и сложимъ; получимъ, дѣля на 2:

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i}\sum_{1}^{n}{}_{j} m_{ij}\binom{r}{i}\binom{r}{j} = \frac{1}{2}\binom{r}{r}D; \qquad (24)$$

лѣвая часть этого выраженія представляетъ частное значеніе функціи T, для частнаго значенія дѣйствительныхъ перемѣнныхъ

$$\psi_i = \binom{r}{i},$$

а потому, по свойству этой функціи, положительно. Отсюда слѣдуетъ, что D и $\binom{r}{r}$ имѣютъ одинаковые знаки.

Если мы положимъ теперь въ выраженіи T перемѣнную $\psi_r = 0$, то, для этого случая, детерминантъ функціи T будетъ не D а $\binom{r}{r}$, и одинъ изъ главныхъ миноровъ послѣдняго будетъ $\binom{r\ s}{r\ s}$.

Мы найдемъ предъидущимъ способомъ соотношеніе подобное (24), въ которомъ вмѣсто D будетъ стоять $\binom{r}{r}$, и вмѣсто $\binom{r}{r}$ стоять $\binom{r\ s}{r\ s}$, и также заключимъ объ одинаковости знаковъ $\binom{r}{r}$ и $\binom{r\ s}{r\ s}$, и т. д. Такъ какъ послѣдній миноръ въ рядѣ (19) есть m_{rr}, имѣющій знакъ $+$, то приходимъ къ заключенію, что детерминантъ функціи T и его главные миноры суть положительныя величины.

Прилагая подобныя же разсужденія къ функціи W, мы придемъ по отношенію къ этой функціи къ тѣмъ же заключеніямъ *).

*) Свойства выраженій (16), здѣсь разсмотрѣнныя, представляютъ частный случай открытаго Сильвестромъ свойства инерціи квадратичныхъ формъ. *Sylvester*: On a theory of the syzigetic relations af two rationel inte-

§ 3. Чтобы найти уравненія движенія нашей консервативной системы, слѣдуетъ внести найденныя выраженія W и T (16) въ Лагранжевы уравненія динамики для независимыхъ перемѣнныхъ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{\psi}_i}\right)-\frac{dT}{d\psi_i}+\frac{dW}{d\psi_i}=0. \text{ (n уравненій)}$$

Такъ какъ, въ нашемъ случаѣ, T не зависитъ отъ ψ_i, то $\frac{dT}{d\psi_i}=0$, и мы находимъ n уравненій, означая $\frac{d\dot{\psi}}{dt}$ черезъ $\ddot{\psi}$:

$$\sum_1^n{}_j(m_{1j}\ddot{\psi}_j+g_{1j}\psi_j)=0$$

$$\sum_1^n{}_j(m_{2j}\ddot{\psi}_j+g_{2j}\psi_j)=0 \qquad (25)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_1^n{}_j(m_{nj}\ddot{\psi}_j+g_{nj}\psi_j)=0$$

Мы имѣемъ здѣсь n совмѣстныхъ линейныхъ диффеpенціяльныхъ уравненій 2-го порядка; общіе интегралы будутъ поэтому содержать $2n$ произвольныхъ постоянныхъ, которыя опредѣляются по $2n$ произвольнымъ начальнымъ значеніямъ $2n$ перемѣнныхъ ψ и $\dot{\psi}$. Частные интегралы будутъ вида:

$$\psi_j = a_j\, e^{\varrho t} \qquad (26)$$

Вносся эти частные интегралы въ уравненія (25) и сокращая на общій множитель $e^{\varrho t}$, получимъ n уравненій:

---

gral functions etc. (Philosophical Transactions 1853 part. III); также *Brioschi*: Sur les séries qui donnent le nombre de racines réeles des équations algebriques à une ou à plusieurs inconnues (Nouvelles Annales de Mathematiques, 1856, T. XV p. 264).

$$\rho^2\sum_1^n{}_j m_{1j}a_j+\sum_1^n{}_j g_{1j}a_j=0 \qquad \sum_1^n{}_j(m_{1j}\rho^2+g_{1j})a_j=0$$

$$\rho^2\sum_1^n{}_j m_{2j}a_j+\sum_1^n{}_j g_{2j}a_j=0 \quad \text{или} \quad \sum_1^n{}_j(m_{2j}\rho^2+g_{2j})\,a_j=0 \qquad (27)$$

. . . .

$$\rho^2\sum_1^n{}_j m_{nj}a_j+\sum_1^n{}_j g_{nj}a_j=0 \qquad \sum_1^n{}_j(m_{nj}\rho^2+g_{nj})\,a_j=0$$

Означимъ черезъ W_0, T_0, выраженія W и T послѣ подстановки въ нихъ вмѣсто ψ_j или $\dot\psi_j$ коэфиціентовъ a_j, т. е.

$$W_0=\frac{1}{2}\sum_1^n{}_j\sum_1^n{}_i g_{ij}a_ia_j, \quad T_0=\frac{1}{2}\sum_1^n{}_j\sum_1^n{}_i m_{ij}a_ia_j; \qquad (28)$$

введемъ еще обозначенія:

$$\frac{dW_0}{da_\alpha}=\sum_1^n{}_j g_{\alpha j}a_j=W_\alpha, \quad \frac{dT_0}{da_\alpha}=\sum_1^n m_{\alpha j}a_j=T_\alpha.$$

Уравненія (27) можно представить въ видѣ

$$\rho^2T_\alpha+W_\alpha=0 \quad \text{для } \alpha=1,\ 2,\ \ldots\ n. \qquad (29)$$

Равенства (27) удовлетворятся значеніями a_j отличными отъ нуля въ томъ лишь случаѣ, когда детерминантъ, составленный изъ коэфиціентовъ при a_j, равенъ нулю. Приравнивая нулю этотъ детерминантъ и обозначая его черезъ $f(\rho^2)$, мы получимъ уравненіе, коего корнями должны быть величины ρ, входящія въ частные интегралы (26). Только для такихъ значеній ρ коэфиціенты a_j, а слѣдовательно и перемѣнныя ψ_j (26), будутъ отличны отъ нуля. И такъ мы имѣемъ:

$$f(\rho)=\begin{vmatrix} m_{11}\rho^2+g_{11}, & m_{12}\rho^2+g_{12}, & \dots & m_{1n}\rho^2+g_{1n} \\ m_{21}\rho^2+g_{21}, & m_{22}\rho^2+g_{22}, & \dots & m_{2n}\rho^2+g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1}\rho^2+g_{n1}, & m_{n2}\rho^2+g_{n2}, & \dots & m_{nn}\rho^2+g_{nn} \end{vmatrix}=0 \quad (30)$$

Это есть уравненіе n-го порядка относительно ρ^2 и даетъ $2\,n$ корней для ρ:

$$\begin{matrix} +\rho_1, & +\rho_2, & +\rho_3, \dots & +\rho_\mu, \dots & +\rho_n \\ -\rho_1, & -\rho_2, & -\rho_3, \dots & -\rho_\mu, \dots & -\rho_n \end{matrix} \quad (31)$$

Каждому корню ρ^2 соотвѣтствуетъ опредѣленная система постоянныхъ a_j. Опредѣленному абсолютному значенію корня ρ_μ будетъ слѣдовательно соотвѣтствовать частный интегралъ вида:

$$\psi_j=a_j^\mu e^{\rho_\mu t}+b_j^\mu e^{-\rho_\mu t} \quad (32)$$

Корни уравненія $f(\rho^2)=0$ отличны отъ нуля; если бы существовалъ корень $\rho^2=0$, то детерминантъ (30) превратился бы въ детерминантъ функціи W (16), а этотъ детерминантъ, какъ выше доказано, не можетъ быть равенъ нулю.

Докажемъ теперь, что корни ρ уравненія (30) суть мнимыя величины. Наиболѣе общій видъ коэфиціентовъ a_j есть комплексный, т. е.

$$a_j=\xi_j+i\eta_j \quad (33)$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$ и ξ_j, η_j суть величины дѣйствительныя. Будемъ означать черезъ T_α^λ, W_α^λ, T_0^λ, W_0^λ величины $T_\alpha \dots W_0$ въ коихъ вмѣсто a_j подставлено λ_j. Вносяя выраженіе (33) въ равенства (29), получимъ при этихъ обозначеніяхъ:

$$\rho^2[T^\xi_\alpha+iT^\eta_\alpha]+W^\xi_\alpha+iW^\eta_\alpha=0 \qquad (34)$$

для $\alpha=1,\ 2,\ \ldots .\ n.$

Умножимъ каждое изъ этихъ уравненій соотвѣтственно на $\xi_\alpha - i\eta_\alpha$ и сложимъ полученные результаты; найдемъ:

$$\rho^2\left[\sum_1^n \xi_\alpha T^\xi_\alpha + i\sum_1^n \xi_\alpha T^\eta_\alpha - i\sum_1^n \eta_\alpha T^\xi_\alpha + \sum_1^n \eta_\alpha T^\eta_\alpha\right]$$
$$+\sum_1^n \xi_\alpha W^\xi_\alpha + i\sum_1^n \xi_\alpha W^\eta_\alpha - i\sum_1^n \eta_\alpha W^\xi_\alpha + \sum_1^n \eta_\alpha W^\eta_\alpha = 0 \qquad (35)$$

Легко видѣть, что

$$\sum_1^n \xi_\alpha T^\eta_\alpha = \sum_1^n \eta_\alpha T^\xi_\alpha,\quad \sum_1^n \xi_\alpha W^\eta_\alpha = \sum_1^n \eta_\alpha W^\xi_\alpha; \qquad (36)$$

далѣе, по свойству однородныхъ функцій:

$$\Sigma\lambda_\alpha T^\lambda_\alpha = 2T^\lambda_0,\quad \Sigma\lambda_\alpha W^\lambda_\alpha = 2W^\lambda_0 \qquad (37)$$

Поэтому выраженіе (35) принимаетъ видъ:

$$\rho^2\{T^\xi_0+T^\eta_0\} = -\{W^\xi_0+W^\eta_0\}$$

Откуда

$$\rho=\pm\sqrt{\frac{W^\xi_0+W^\eta_0}{T^\xi_0+T^\eta_0}}\sqrt{-1} \qquad (38)$$

По свойству функцій W и T, частныя ихъ значенія W^ξ_0, W^η_0, T^ξ_0, T^η_0 суть величины существенно положительныя; поэтому изъ выраженія (38) слѣдуетъ, что ρ есть мнимая а не комплексная величина.

Разумѣя подъ ν_μ дѣйствительную величину, мы имѣемъ по предъидущему

$$\pm\rho_\mu = \pm\nu_\mu\sqrt{-1},$$

и обращая показательныя функціи въ круговыя, частный интегралъ (32) приметъ видъ

$$\psi_j = a_j^\mu \cos\nu_\mu t + b_j^\mu \sin\nu_\mu t \qquad (39)$$

понятно что a_j^μ, b_j^μ въ формулахъ (32) и (39) имѣютъ неодинаковыя значенія.

§ 4. Прежде чѣмъ идти далѣе, обнаружимъ нѣкоторыя свойства миноровъ детерминанта $f(\rho^2)$. Миноры детерминанта $f(\rho^2)$, получаемые выбрасываньемъ j-ой вертикали и соотвѣтственно $1, \dots 2, \dots \alpha$, n-ой горизонтали, будутъ:

$$\binom{1}{j},\ \binom{2}{j}, \dots \binom{\alpha}{j}, \dots \binom{n}{j} \qquad (40)$$

Разумѣя подъ a_j величину отличную отъ постоянныхъ выше приведенныхъ, разсмотримъ систему уравненій, подобныхъ уравн. (29), и имѣющихъ видъ:

$$\rho^2 T_\alpha + W_\alpha = c_\alpha, \text{ для } \alpha = 1, 2, \dots n \qquad (41)$$

гдѣ c_α суть нѣкоторыя дѣйствительныя постоянныя величины, отличныя отъ нуля. Рѣшая эти уравненія относительно a_j, получимъ по извѣстнымъ правиламъ:

$$a_j = \sum_1^n {}_\alpha \frac{\binom{\alpha}{j}}{f(\rho^2)} c_\alpha, \qquad (42)$$

Положимъ, что между n корнями ρ^2 уравненія $f(\rho^2) = 0$ существуетъ только q различныхъ: $\rho_1^2, \rho_2^2, \dots \rho_q^2$, такъ что $f(\rho^2)$ выражается слѣдующимъ образомъ:

$$f(\rho^2) = k(\rho^2 - \rho_1^2)^{\lambda_1} (\rho^2 - \rho_2^2)^{\lambda_2} \dots (\rho^2 - \rho_q^2)^{\lambda_q} \qquad (43),$$

гдѣ λ съ индексами показываютъ кратность соотвѣтственнаго корня, и k есть постоянная величина, равная коэффиціенту при ρ^{2n} въ выраженіи $f(\rho^2)$. Изслѣдуемъ, не будутъ ли миноры $\binom{\alpha}{j}$ имѣть корни равные корнямъ детерминанта $f(\rho^2)$?

Положимъ, что миноръ $\binom{\alpha}{j}$ имѣетъ корни ρ_1^2 и ρ_2^2 общіе съ детерминантомъ $f(\rho^2)$, остальные же корни различны. Пусть степень кратности корня ρ_1^2 въ минорѣ есть ν, а ρ_2^2 есть μ; ν и μ суть цѣлыя положительныя числа или нули. Замѣчая, что, по отношенію къ ρ^2, миноръ будетъ нисшей степени чѣмъ детерминантъ и корни $\rho^2{}_\mu$ суть дѣйствительныя величины, мы получаемъ, по извѣстнымъ правиламъ разложенія раціональныхъ дробей въ простыя, слѣдующее выраженіе:

$$\frac{\dfrac{\binom{\alpha}{j}}{(\rho^2-\rho_1^2)^\nu(\rho^2-\rho_2^2)^\mu}}{f(\rho^2)}=\frac{A_1^\alpha}{(\rho^2-\rho_1^2)^{\lambda_1}}+\frac{A_2^\alpha}{(\rho^2-\rho_1^2)^{\lambda_1-1}}+\ldots+\frac{A_{\lambda_1}^\alpha}{\rho^2-\rho_1^2}$$

$$+\frac{B_1^\alpha}{(\rho^2-\rho_2^2)^{\lambda_2}}+\frac{B_2^\alpha}{(\rho^2-\rho_2^2)^{\lambda_2-1}}+\ldots \quad (44)$$

$$+\frac{C_1^\alpha}{(\rho^2-\rho_3^2)^{\lambda_3}}+\frac{C_2^\alpha}{(\rho^2-\rho_3^2)^{\lambda_3-1}}+\ldots$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Въ этомъ разложеніи коэффиціенты A, B, C.... не зависятъ отъ ρ^2. Положимъ

$$\rho^2-\rho_1^2=\varepsilon,\quad \nu-\lambda_1=m,\quad \mu-\lambda_2=p,$$

тогда

$$\rho^2=(\rho^2-\rho_1^2)+\rho_1^2=\varepsilon+\rho_1^2,\ \rho^2-\rho_2^2=\varepsilon+\rho_1^2-\rho_2^2,\ \rho^2-\rho_3^2=\varepsilon+\rho_1^2-\rho_3^2,\ldots$$

Умножая выраженіе (44) на ε^ν и $(\rho^2-\rho_2^2)^\mu$, означая черезъ $Q(\varepsilon)$ члены, не обращающіеся въ безконечность при $\rho^2=\rho_1^2$ или ρ_2^2 (члены, содержащіе коэффиціенты C и послѣдующіе), получимъ:

$$\frac{\binom{\alpha}{j}}{f(\rho^2)} = \left\{A_1^\alpha \varepsilon^m + A_2^\alpha \varepsilon^{m+1} + \ldots + A_\lambda^\alpha \varepsilon^{m+\lambda_1-1}\right\}(\varepsilon + \rho_1^2 - \rho_2^2)^\mu$$

$$+\varepsilon^{m+\lambda_1}\left\{B_1^\alpha(\varepsilon+\rho_1^2-\rho_2^2)^p + B_2^\alpha(\varepsilon+\rho_1^2-\rho_2^2)^{p+1} + \ldots\right\} \quad (45)$$

$$+\varepsilon^{m+\lambda_1}(\varepsilon+\rho_1^2-\rho_1^2)^{p+\lambda_2}.\ Q(\varepsilon)$$

Положимъ теперь ε весьма малымъ и разложимъ по биному Ньютона всѣ множители вида $(\varepsilon+\rho_i^2-\rho^2_k)^s$, слѣдующимъ образомъ:

$$(\varepsilon+\rho_i^2-\rho_k^2)^s = (\rho_i^2-\rho^2_k)^s\left(1+\frac{\varepsilon}{\rho_i^2-\rho^2_k}\right)^s = a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + \ldots.$$

т. е. по восходящимъ положительнымъ степенямъ весьма малой величины ε. Тогда выраженіе (45) преобразуется:

$$\frac{\binom{\alpha}{j}}{f(\rho^2)} = r_1^\alpha\varepsilon^m + r_2^\alpha\varepsilon^{m+1} + r_3^\alpha\varepsilon^{m+2} + \ldots, \quad (46)$$

гдѣ m есть цѣлое число, положительное или отрицательное, или же нуль, а r — постоянныя; разложеніе же идетъ по возрастающимъ степенямъ ε.

Внесемъ выраженіе (46) въ (42), получимъ:

$$a_j = \sum_1^n{}_\alpha c_\alpha(r_1^\alpha\varepsilon^m + r_2^\alpha\varepsilon^{m+1} + r_3^\alpha\varepsilon^{m+2} + \ldots) \quad (47)$$

Въ различныхъ членахъ этой суммы, т. е. внутри скобокъ, являющихся множителями у различныхъ c_α, степень m будетъ различна, такъ какъ скобки происходятъ отъ разложенія $\frac{\binom{\alpha}{j}}{f(\rho^2)}$ для различныхъ α.

Въ выраженіи a_j одно изъ значеній m будетъ наименьшимъ; означимъ его черезъ m'_j; если $\varepsilon^{m'_j}$ входитъ въ выра-

женія (47) при нѣсколькихъ c_α, то могло бы случиться, что сумма множителей при $\varepsilon^{m'_j}$ обращается въ нуль; это обстоятельство можетъ быть всегда обойдено соотвѣтственнымъ подборомъ произвольныхъ величинъ c_α. Составляя выраженія (47) для различныхъ a_j т. е. для $a_1, a_2, \ldots . a_n$, въ каждомъ изъ нихъ мы будемъ имѣть нѣкоторое наинизшее m'_j т. е. $m'_1, m'_2, \ldots . m'_n$; изъ этихъ значеній выберемъ наименьшее, которое назовемъ черезъ M. Тогда величины a_j могутъ быть представлены въ такомъ видѣ:

$$a_j = \beta^j \varepsilon^M + \beta^j_1 \varepsilon^{M+1} + \beta^j_2 \varepsilon^{M+2} + \ldots . \qquad (48)$$

гдѣ β^j_i суть дѣйствительныя величины, изъ коихъ нѣкоторыя могутъ быть равны нулю.

Относительно коэффиціентовъ β^j при степени ε^M, замѣтимъ, что всѣ β^j немогутъ быть равны нулю, такъ какъ въ этомъ случаѣ оказалось бы что ε въ низшей степени M не входитъ ни въ одно изъ выраженій a_j, что противорѣчило бы самому опредѣленію ε^M какъ низшей степени ε изъ всѣхъ, входящихъ въ разныя a_j.

Представляя равенства (41) въ видѣ:

$$(\varepsilon + \rho^1_1) T_\alpha + W_\alpha = c_\alpha \text{ для } \alpha = 1, 2, \ldots . n. \qquad (49)$$

внесемъ въ нихъ выраженія (48). При этомъ будемъ обозначать черезъ T^λ_α, W^λ_α, извѣстныя намъ функціи T_α и W_α при замѣнѣ въ нихъ величинъ a_j черезъ λ_j. Получимъ, располагая результатъ подстановки по восходящимъ степенямъ ε:

$$\varepsilon^M(\rho^1_1 T^\beta_\alpha + W^\beta_\alpha) + \varepsilon^{M+1}(T^\beta_\alpha + \rho^1_1 T^{\beta_1}_\alpha + W^{\beta_1}_\alpha) + \ldots . = c_\alpha \qquad (50)$$

$$\text{для } \alpha = 1, 2, \ldots . n.$$

Эти выраженія должны быть справедливы для всякаго значенія ε. Такъ какъ коэффиціенты при степеняхъ ε и посто-

янныя c_α не зависятъ отъ ε, то коэфиціенты при степеняхъ ε, отличныхъ отъ нуля, должны быть равны нулю, коэфиціентъ же при нулевой степени отъ ε долженъ быть равенъ c_α. Такъ какъ c_α по условію выбрано нами отличнымъ отъ нуля, то въ каждомъ изъ выраженій (50) должна находится нулевая степень отъ ε. Такъ какъ всѣ степени отъ ε состоятъ изъ степени M, къ которой прибавляются положительныя числа, то ε въ нулевой степени можетъ входить въ эти выраженія только въ томъ случаѣ, когда M равно нулю или отрицательному числу; и такъ

$$M \leqq 0$$

Покажемъ теперь что M не можетъ быть меньше -1. Если бы M было менѣе -1, то въ уравненіяхъ (50) коэфиціенты при ε^M и ε^{M+1} должны были бы быть равными нулю, и мы имѣли бы:

$$\rho_1^2 T_\alpha^\beta + W_\alpha^\beta = 0 \quad (a)$$

для $\alpha = 1, 2, \ldots . n$.

$$T_\alpha^\beta + \rho_1^2 T_\alpha^{\beta_1} + W_\alpha^{\beta_1} = 0 \quad (b)$$

Умножимъ каждое изъ выраженій b на соотвѣтственное β^α и сложимъ; находимъ:

$$\sum_1^n {}_\alpha \beta^\alpha T_\alpha^\beta + \rho_1^2 \sum_1^n {}_\alpha \beta^\alpha T_\alpha^{\beta_1} + \sum_1^n {}_\alpha \beta^\alpha W_\alpha^{\beta_1} = 0 \quad (b')$$

Умножая каждое изъ уравненій (a) на соотвѣтственное β_1^α и складывая, имѣемъ:

$$\rho_1^2 \sum_1^n {}_\alpha \beta_1^\alpha T_\alpha^\beta + \sum_1^n {}_\alpha \beta_1^\alpha W_\alpha^\beta = 0 \quad (a')$$

Вычитая изъ (b') выраженіе (a') и замѣчая, что по свойству однородности:

$$\sum_1^n{}_\alpha \beta^\alpha T^\beta_\alpha = 2\,T^\beta$$

и кромѣ того

$$\sum_1^n{}_\alpha \beta^\alpha T^{\beta_1}_\alpha = \sum_1^n{}_\alpha \beta^\alpha_1 T^\beta_\alpha,\quad \sum_1^n{}_\alpha \beta^\alpha W^{\beta_1}_\alpha = \sum_1^n{}_\alpha \beta^\alpha_1 W^\beta_\alpha,$$

находимъ:

$$T^\beta = 0,$$

что по свойству функцій T, имѣло бы мѣсто въ томъ только случаѣ, если бы всѣ β^j т. е. коэффиціенты при s^M въ (48) были равны нулю, что, какъ указано выше, невозможно. И такъ M можетъ имѣть только два значенія:

$$M = 0 \text{ или } M = -1.$$

Такъ какъ M есть наименьшее значеніе разности $m = \nu - \lambda_1$ т. е.

$$\nu - \lambda_1 \geqq M$$

то отсюда заключаемъ, что или

$$\nu - \lambda_1 \geqq 0 \text{ откуда } \nu \geqq \lambda_1$$

или

$$\nu - \lambda_1 \geqq -1 \text{ откуда } \nu \geqq \lambda_1 - 1$$

Изъ этихъ двухъ неравенствъ вытекаетъ слѣдующее несомнѣнное заключеніе:

Если детерминантъ имѣетъ λ_1 кратный корень ρ^2_1, то каждый его миноръ 1-го порядка, т. е. $\binom{\alpha}{j}$ содержитъ множитель $\rho^2 - \rho^2_1$ въ степени не меньшей $\lambda_1 - 1$, т. е. множитель $(\rho^2 - \rho^2_1)^{\lambda_1 - 1}$. Выводы, относящіеся къ корню ρ^2_1, очевидно имѣютъ мѣсто и для всякаго другого корня нашего детерминанта.

Каждый изъ миноровъ 1-го порядка $\binom{\alpha}{j}$, происшедшій отбрасываніемъ j-ой вертикали и α-ой горизонтали изъ детерминанта $f(\rho^2)$, будетъ детерминантомъ системы равенствъ (41), въ которыхъ были бы выкинуты α-ое равенство, считая сверху, и j-ые члены въ каждомъ равенствѣ, приведя предварительно лѣвыя ихъ части къ виду (27).

Миноры 1-го порядка этого детерминанта будутъ, отбрасывая j_1-ую вертикаль и послѣдовательно $1, 2, \ldots . n-1$ горизонталь:

$$\binom{\alpha,\ 1}{j,\ j_1},\ \binom{\alpha,\ 2}{j,\ j_1}, \ldots . \binom{\alpha, n-1}{j,\ j_1}; \qquad (51)$$

это будутъ миноры 2-го порядка детерминанта $f(\rho^2)$. Прилагая предъидущій методъ къ видоизмѣненнымъ указаннымъ образомъ равенствамъ (41), мы придемъ къ заключенію, что если ρ_i^2 есть q кратный корень $\binom{\alpha}{j}$, то миноры (51) должны содержать множитель $\rho^2-\rho_i^2$ въ степени не меньшей $q-1$; а такъ какъ q не можетъ быть меньше λ_1-1, то степень $\rho-\rho_i^2$ въ минорахъ 2-го порядка детерминанта $f(\rho^2)$ не можетъ быть менѣе λ_1-2, и т. д.

Отсюда слѣдуетъ, что если детерминантъ $f(\rho^2)$ имѣетъ λ кратный корень ρ_λ^2, то послѣдній будетъ несомнѣнно корнемъ миноровъ $1, 2, 3 \ldots . (\lambda-1)$-го порядка, слѣдовательно какъ детерминантъ, такъ и эти миноры обратятся въ нуль при $\rho^2=\rho_\lambda^2$. Кромѣ того $\rho^2=\rho_\lambda^2$ обратитъ въ нули всѣ производныя до $(\lambda-m-1)$-го порядка включительно, взятыя по ρ отъ минора m-го порядка детерминанта $f(\rho^2)$.

§ 5. Обнаружимъ законы весьма малыхъ движеній системы, когда между n корнями ρ^2 детерминанта $f(\rho^2)$ нѣтъ равныхъ. Положимъ для краткости:

$$m_{sr}\rho^2+g_{sr}=m_{rs}\rho^2+g_{rs}=u_{rs}=u_{sr}. \qquad (52)$$

Уравненія (27) примутъ видъ:

$$\begin{aligned} u_{11}a_1+u_{12}a_2+\ldots\ldots+u_{1n}a_n &= 0 \\ u_{21}a_1+u_{22}a_2+\ldots\ldots+u_{2n}a_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n1}a_1+u_{n2}a_2+\ldots\ldots+u_{nn}a_n &= 0 \end{aligned} \qquad (53)$$

и

$$f(\rho^2)=\begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & \ldots\ldots & u_{1n} \\ u_{21}, & u_{22}, & \ldots\ldots & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1}, & u_{n2}, & \ldots, & u_{nn} \end{vmatrix} \qquad (54)$$

Мы имѣемъ по извѣстнымъ свойствамъ миноровъ:

$$\begin{aligned} & u_{11}\binom{r}{1}+u_{12}\binom{r}{2}+\ldots\ldots+u_{1n}\binom{r}{n}=0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & u_{r1}\binom{r}{1}+u_{r2}\binom{r}{2}+\ldots\ldots u_{rn}\binom{r}{n}=f(\rho^2) \qquad (55) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & u_{n1}\binom{r}{1}+u_{n2}\binom{r}{2}+\ldots\ldots+u_{nn}\binom{r}{n}=0 \end{aligned}$$

для $r=1, 2, \ldots\ldots n$.

Приравняемъ въ этихъ выраженіяхъ величину ρ^2 одному изъ корней детерминанта $f(\rho^2)$, напр. корню $-\nu^2_\mu$. Тогда всѣ правыя части будутъ равны нулю, и сравнивая ихъ съ равенствами (53) взятыми для $\rho^2=-\nu^2_\mu$, ставя при минорахъ индексъ μ для обозначенія подставленнаго въ нихъ корня, и называя

черезъ h_μ произвольное постоянное, видимъ, что равенства (53) удовлетворятся выраженіями:

$$\frac{a_1^\mu}{\binom{r}{1}_\mu}=\frac{a_2^\mu}{\binom{r}{2}_\mu}=\ldots\ldots=\frac{a_n^\mu}{\binom{r}{n}_\mu}=h_\mu \text{ *)} \qquad (56)$$

Если вмѣсто одного значенія r изъ ряда $1, 2, \ldots\ldots n$, подставимъ другое, то h_μ будетъ имѣть иную величину, такъ какъ a_1^μ, $a_2^\mu \ldots\ldots a_n^\mu$, характеризуя одно и тоже движеніе, не измѣняются. Подобнымъ же соотношеніямъ удовлетворяютъ и коэфиціенты b_j^μ, только съ отличной произвольной постоянной h'_μ. И такъ частный интегралъ (39) примѣтъ видъ:

$$\psi_j=\binom{r}{j}_\mu\{h_\mu \cos \nu_\mu t+h'_\mu \sin \nu_\mu t\}; \qquad (58)$$

давая μ всѣ значенія отъ 1 до n, и суммируя соотвѣтсвенные частные интегралы, получимъ общіе интегралы въ видѣ:

$$\psi_1=\sum_1^n{}_\mu\binom{r}{1}_\mu\{h_\mu \cos \nu_\mu t+h'_\mu \sin \nu_\mu t\}=\sum_1^n{}_\mu\binom{r}{1}_\mu A_\mu \cos(\nu_\mu t-\varepsilon_\mu)$$

$$\psi_2=\sum_1^n{}_\mu\binom{r}{2}_\mu\{h_\mu \cos \nu_\mu t+h'_\mu \sin \nu_\mu t\}=\sum_1^n{}_\mu\binom{r}{2}_\mu A_\mu \cos(\nu_\mu t-\varepsilon_\mu)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (59)$$

$$\psi_j=\sum_1^n{}_\mu\binom{r}{j}_\mu\{h_\mu \cos \nu_\mu t+h'_\mu \sin \nu_\mu t\}=\sum_1^n{}_\mu\binom{r}{j}_\mu A_\mu \cos(\nu_\mu t-\varepsilon_\mu)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\psi_n=\sum_1^n{}_\mu\binom{r}{n}_\mu\{h_\mu \cos \nu_\mu t+h'_\mu \sin \nu_\mu t\}=\sum_1^n{}_\mu\binom{r}{n}_\mu A_\mu \cos(\nu_\mu t-\varepsilon_\mu),$$

---

*) Изъ этихъ выраженій мы можемъ получить соотношеніе, которымъ будемъ пользоваться въ дальнѣйшемъ изложеніи. Изъ выраженій (56), написанныхъ для всевозможныхъ r изъ ряда $1, 2 \ldots\ldots n$, мы находимъ:

$$\frac{a_q^\mu}{a_k^\mu}=\frac{\binom{r}{q}}{\binom{r}{k}}=\frac{\binom{\alpha}{q}}{\binom{\alpha}{k}}=\ldots\ldots$$

$$A_\mu = \sqrt{h^2_\mu + h'^2_\mu}, \quad \text{tang}\, \varepsilon_\mu = \frac{h'_\mu}{h_\mu} \tag{60}$$

Эти выраженія содержатъ 2 n произвольныхъ постоянныхъ h_μ и h'_μ (μ=1, ... n) и представляются совокупностью n гармоническихъ движеній съ n различными періодами, т. е. со столькими періодами, сколько система имѣетъ степеней свободы. Всѣ гармоническія движенія одного и того же періода находятся въ одинаковой фазѣ.

Раскроемъ нѣкоторыя новыя свойства миноровъ $f(\rho^2)$.

Выраженія (55) для корня $\rho^2 = -\nu^2_\mu$ могутъ быть представлены въ такомъ видѣ:

$$-\nu^2_\mu \sum_1^n{}_j m_{\alpha j} \binom{r}{j}_\mu + \sum_1^n{}_j g_{\alpha j} \binom{r}{j}_\mu = 0 \quad {}_{\alpha=1,\,2,\,\ldots\,n.} \tag{61}$$

для другаго корня:

$$-\nu^2_{\mu_1} \sum_1^n{}_j m_{\alpha j} \binom{r}{j}_{\mu_1} + \sum_1^n{}_j g_{\alpha j} \binom{r}{j}_{\mu_1} = 0 \quad {}_{\alpha=1,\,2,\ldots\,n.} \tag{62}$$

Умножая каждое изъ выраженій (61) соотвѣтственно на $\binom{r}{1}_{\mu_1}, \binom{r}{2}_{\mu_1}, \ldots \binom{r}{\alpha}_{\mu_1}, \ldots \binom{r}{n}_{\mu_1}$ и складывая, получаемъ:

откуда

$$\binom{r}{q}\binom{\alpha}{k} = \binom{r}{k}\binom{\alpha}{q};$$

Пусть $q=r$, то

$$\binom{r}{r}\binom{\alpha}{k} = \binom{r}{k}\binom{\alpha}{r}$$

Такъ какъ нашъ детерминантъ есть симметрическій, то $\binom{\alpha}{r} = \binom{r}{\alpha}$, и мы получаемъ извѣстное соотношеніе:

$$\binom{r}{r}\binom{\alpha}{k} = \binom{r}{k}\binom{r}{\alpha}. \tag{57}$$

Полагая $k=\alpha$:

$$\binom{r}{r}\binom{\alpha}{\alpha} = \binom{r}{\alpha}^2 \qquad (57)\ \text{bis}$$

$$-\nu^2_\mu \sum_1^n{}_\alpha \sum_1^n{}_j m_{\alpha j} \binom{r}{j}_\mu \binom{r}{\alpha}_{\mu_1} + \sum_1^n{}_\alpha \sum_1^n{}_j g_{\alpha j} \binom{r}{j}_\mu \binom{r}{\alpha}_{\mu_1} = 0. \quad (63)$$

Умножая каждое изъ (62) соотвѣтственно на $\binom{r}{1}_{\mu_1} \ldots \binom{r}{\alpha}_\mu$ $\ldots \binom{r}{n}_\mu$ и складывая, получимъ:

$$-\nu^2_{\mu_1} \sum_1^n{}_\alpha \sum_1^n{}_j m_{\alpha j} \binom{r}{j}_{\mu_1} \binom{r}{\alpha}_\mu + \sum_1^n{}_\alpha \sum_1^n{}_j g_{\alpha j} \binom{r}{j}_{\mu_1} \binom{r}{\alpha}_\mu = 0 \quad (64)$$

Двойныя суммы, стоящія въ выраженіяхъ (63) и (64) соотвѣтственно другъ другу равны. Поэтому, вычитая эти выраженія другъ изъ друга, находимъ:

$$(\nu^2_\mu - \nu^2_{\mu_1}) \sum_1^n{}_\alpha \sum_1^n{}_j m_{\alpha j} \binom{r}{j}_\mu \binom{r}{\alpha}_{\mu_1} = 0$$

Если ν_μ не равно ν_{μ_1}, то необходимо

$$\sum_1^n{}_\alpha \sum_1^n{}_j m_{\alpha j} \binom{r}{j}_\mu \binom{r}{\alpha}_{\mu_1} = 0 \quad (65)$$

и далѣе $\mu \neq \mu_1$

$$\sum_1^n{}_\alpha \sum_1^n{}_j g_{\alpha j} \binom{r}{j}_\mu \binom{r}{\alpha}_{\mu_1} = 0. \quad (66)$$

Замѣтимъ, что эти суммы не влекутъ за собою равенствъ $\binom{r}{j}_\mu = 0$ и пр., ибо они не построены по типу функцій T и W, такъ какъ произведеніе $\binom{r}{j}_\mu \binom{r}{\alpha}_{\mu_1}$ измѣняется при перестановкѣ j и α, между тѣмъ какъ, въ указанныхъ функціяхъ, произведеніе $\psi_j\ \psi_\alpha$ отъ такой перестановки не мѣняется.

Найдемъ теперь значенія суммъ (65) и (66) для случая когда $\mu = \mu_1$. Будемъ означать штрихомъ поставленнымъ свер-

ю производную, взятую отъ функціи по ρ^2. Получимъ изъ выраженій (55):

$$m_{11}\binom{r}{1}+m_{12}\binom{r}{2}+\ldots+m_{1n}\binom{r}{n}+u_{11}\binom{r}{1}'+u_{12}\binom{r}{2}'+\ldots$$
$$+u_{1n}\binom{r}{n}'=0$$

. . . .

$$m_{r1}\binom{r}{1}+m_{r2}\binom{r}{2}+\ldots+m_{rn}\binom{r}{n}+u_{r1}\binom{r}{1}'+u_{r2}\binom{r}{2}'+\ldots$$
$$+u_{rn}\binom{r}{n}'=f'(\rho^2)$$

. . . .

$$m_{n1}\binom{r}{1}+m_{n2}\binom{r}{2}+\ldots+m_{nn}\binom{r}{n}+u_{n1}\binom{r}{1}'+u_{n2}\binom{r}{2}'+\ldots$$
$$+u_{nn}\binom{r}{n}'=0.$$

Отнесемъ эти выраженія къ опредѣленному корню $\rho^2=-\nu^2_\mu$, умножимъ ихъ соотвѣтственно на $\binom{r}{1}$, $\binom{r}{2}$,.. $\binom{r}{r}$,...$\binom{r}{n}$ и сложимъ, обращая вниманіе на уравненія (55), въ которыхъ $f(\rho^2)$ будетъ тоже равна нулю:

$$\sum_1^n{}_\alpha\sum_1^n{}_j m_{\alpha j}\binom{r}{j}_\mu\binom{r}{\alpha}_\mu=\binom{r}{r}_\mu f'(\rho^2)_\mu \ldots \quad (67)$$

и изъ (63) для $\mu=\mu_1$:

$$\sum_1^n{}_\alpha\sum_1^n{}_j g_{\alpha j}\binom{r}{j}_\mu\binom{r}{\alpha}_\mu=\nu^2_\mu\binom{r}{r}_\mu f'(\rho^2)_\mu \ldots \quad (68)$$

Съ помощью найденныхъ соотношеній возможно опредѣлить постоянныя h_μ и h'_μ, по начальнымъ условіямъ движенія. Предположимъ что намъ даны для $t=0$ значенія ψ^0 и $\dot\psi^0$. Изъ (59) находимъ

$$\psi_j^0 = \sum_1^n{}_\mu \binom{r}{j}_\mu h_\mu, \tag{69}$$

$$j=1,\ 2, \ldots.\ n.$$

$$\dot\psi_j^0 = \sum_1^n{}_\mu \binom{r}{j}_\mu \nu_\mu\, h'_\mu. \tag{70}$$

Умножимъ эти уравненія на

$$T^\mu_{rj} = \sum_1^n{}_\alpha m_{\alpha j} \binom{r}{\alpha}_\mu, \tag{71}$$

затѣмъ напишемъ каждое для всѣхъ j, и возьмемъ сумму равенствъ каждой такой группы въ отдѣльности. Получимъ:

$$\sum_1^n{}_j \psi_j^0\, T^\mu_{rj} = h_1 \sum_1^n{}_j T^\mu_{rj} \binom{r}{j}_1 + h_2 \sum_1^n{}_j T^\mu_{rj} \binom{r}{j}_2 + \ldots + h_\mu \sum_1^n{}_j T^\mu_{rj} \binom{r}{j}_\mu + \ldots.$$

$$\sum_1^n{}_j \dot\psi_j^0\, T^\mu_{rj} = h'_1 \nu_1 \sum_1^n{}_j T^\mu_{rj} \binom{r}{j}_1 + h'_2 \nu_1 \sum_1^n{}_j T^\mu_{rj} \binom{r}{j}_2 + \ldots + h'_\mu \nu_\mu \sum_1^n{}_j T^\mu_{rj} \binom{r}{j}_\mu + \ldots.$$

Но по (65) всѣ суммы, коихъ члены содержатъ миноры $\binom{r}{j}_q$ съ индексомъ q отличнымъ отъ верхняго индекса при T^μ_{rj} т. е. отъ μ, равны нулю.

Суммы же, для которыхъ индексъ $q=\mu$, равны по выраженію (67) величинѣ $\binom{r}{r}_\mu f'(\rho^2)_\mu$. И такъ находимъ:

$$h_\mu = \frac{1}{\binom{r}{r}_\mu f'(\rho^2)_\mu} \sum_1^n{}_j \psi_j^0 T^\mu_{rj}$$

$$h'_\mu = \frac{1}{\nu_\mu \binom{r}{r}_\mu f'(\rho^2)_\mu} \sum_1^n {}_j \dot\psi_j^0 T^\mu_{rj}$$

Эти постоянныя входятъ въ интегралъ ψ_k съ факторомъ $\binom{r}{k}_\mu$; умножая предъидущія выраженія на этотъ факторъ, и преобразовывая по (57):

$$\frac{\binom{r}{k}_\mu}{\binom{r}{r}_\mu} T^\mu_{rj} = \sum_1^n {}_\alpha m_{\alpha j} \frac{\binom{r}{\alpha}_\mu \binom{r}{k}_\mu}{\binom{r}{r}_\mu} = \sum_1^n {}_\alpha m_{\alpha j} \binom{\alpha}{k}_\mu = \sum_1^n {}_\alpha m_{\alpha j} \binom{k}{\alpha}_\mu = T^\mu_{kj}$$

получимъ:

$$\binom{r}{k}_\mu h_\mu = \frac{\sum_1^n {}_j \psi_j^0 T^\mu_{kj}}{f'(\rho^2)_\mu}, \quad \binom{r}{k}_\mu h'_\mu = \frac{\sum_1^n {}_j \dot\psi_j^0 T^\mu_{kj}}{\nu_\mu f'(\rho^2)_\mu} \tag{72}$$

Внося эти величины въ выраженіе k-го интеграла въ ряду (59), получаемъ:

$$\psi_k = \sum_1^n {}_j \left\{ \psi_j^0 \sum_1^n {}_\mu \frac{T^\mu_{kj}}{f'(\rho^2)_\mu} \cos \nu_\mu t + \dot\psi_j^0 \sum_1^n {}_\mu \frac{T^\mu_{kj}}{\nu_\mu f'(\rho^2)_\mu} \sin \nu_\mu t \right\} \tag{73}$$

Или, полагая

$$(A) \ldots . \; Q_j^k = \sum_1^n {}_\mu \frac{T^\mu_{kj}}{\nu_\mu f'(\rho^2)_\mu} \sin \nu_\mu t,$$ находимъ:

$$(B) \ldots \psi_k = \sum_1^n {}_j \{ \psi_j^0 \dot Q_j^k + \dot\psi_j^0 Q_j^k \}$$

Если бы одинъ изъ корней, напр. ν_μ равнялся бы нулю, то въ выраженіе (73) вошелъ бы членъ пропорціональный времени изъ множителя

$$\left(\frac{\sin \nu_\mu t}{\nu_\mu}\right)_{\nu_\mu = 0} = t ,$$

но выше было доказано, что ни одинъ изъ корней детерминанта (30) не можетъ быть равенъ нулю.

§ 6. Составимъ теперь выраженія потенціяльной и кинетической энергій, вставляя интегралы (59) въ выраженія (16). Найдемъ:

$$W = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_j \sum_1^n{}_i g_{ij} \psi_i \psi_j =$$

$$\frac{1}{2}\sum_1^n{}_j \sum_1^n{}_i \left\{ g_{ij} \left(\sum_1^n{}_\mu \binom{r}{i}_\mu A_\mu \cos(\nu_\mu t - \varepsilon_\mu) \right) \left(\sum_1^n{}_\mu \binom{r}{j}_\mu \cos(\nu_\mu t - \varepsilon_\mu) \right) \right\}$$

или

$$W = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_\mu \sum_1^n{}_{\mu_1} \left\{ A_\mu A_{\mu_1} \cos(\nu_\mu t - \varepsilon_\mu) \cos(\nu_{\mu_1} t - \varepsilon_{\mu_1}) \left(\sum_1^n{}_j \sum_1^n{}_i g_{ij} \binom{r}{i}_\mu \binom{r}{j}_{\mu_1} \right) \right\}$$

Но всѣ двойныя суммы по i и j, въ коихъ индексы μ и μ_1 при минорахъ различны, равны нулю по (66), въ случаѣ же равенства индексовъ μ и μ_1 представляются выраженіемъ (68). И такъ получаемъ:

$$W = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_\mu \nu^2_\mu \binom{r}{r}_\mu f'(\rho^2)_\mu A^2_\mu \cos^2(\nu_\mu t - \varepsilon_\mu) \qquad (74)$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_\mu \nu^2_\mu \binom{r}{r}_\mu f'(\rho^2)_\mu A^2_\mu \sin^2(\nu_\mu t - \varepsilon_\mu) \qquad (75)$$

Полная энергія системы есть постоянная величина, именно:

$$W + T = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_\mu \nu^2_\mu \binom{r}{r}_\mu f'(\rho^2)_\mu A^2_\mu. \qquad (76)$$

Вмѣсто n перемѣнныхъ ψ, введемъ n новыхъ перемѣнныхъ θ:

$$\theta_\mu = \sqrt{\left(\frac{r}{r}\right)_\mu f'(\rho^2)_\mu}\, A_\mu \cos(\nu_\mu t - \varepsilon_\mu) \tag{77}$$

$$\mu = 1,\ 2, \ldots n.$$

Эти новыя перемѣнныя связаны съ прежними, равенствами (59). Потенціальная и кинетическая энергіи системы представятся выраженіями:

$$W = \frac{1}{2}\sum_1^n \nu^2_\mu\, \theta^2_\mu, \qquad T = \frac{1}{2}\sum_1^n \dot\theta^2_\mu, \tag{78}$$

т. е. линейною подстановкою перемѣнныхъ θ вмѣсто ψ, мы превращаемъ цѣлыя однородныя функціи второго порядка (16) (квадратичныя формы) въ суммы квадратовъ. Перемѣнныя θ называются *нормальными координатами* системы; вводя ихъ, мы разлагаемъ систему съ n степенями свободы на n независимыхъ системъ съ одною степенью свободы.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненія движенія системы въ нормальныхъ координатахъ, внося выраженія (78) въ Лагранжевы уравненія:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot\theta_\mu}\right) + \frac{dW}{d\theta_\mu} = 0$$

$$\mu = 1,\ 2, \ldots n$$

будутъ имѣть видъ:

$$\ddot\theta_\mu + \nu^2_\mu\, \theta = 0$$

$$\mu = 1,\ 2, \ldots n.$$

т. е. каждое изъ уравненій движенія содержитъ только одну перемѣнную θ_μ, какъ и для системы съ одною степенью свободы.

§ 7. Перейдемъ теперь къ случаю когда детерминантъ

$f(\rho^2)$ имѣетъ равные корни. Допустимъ, что корень ν^2_μ есть μ кратный. Если характеристическое уравненіе (30) имѣетъ μ кратный корень, то первые $\mu-1$ производныхъ по ν_μ отъ частныхъ интеграловъ (39), умноженныя на произвольныя постоянныя, будутъ также интегралами уравненій (25) *). Общее число $2n$ произвольныхъ постоянныхъ останется очевидно тѣмъ же самымъ, но видъ интеграловъ для кратнаго корня существенно измѣняется, такъ какъ дифференцированіе по ν_μ выводитъ время t изъ подъ знаковъ періодическихъ функцій. Такъ, полагая $p<\mu-1$, p-я производная по ν_μ отъ частнаго интеграла $b_j^\mu \sin \nu_\mu t$ или, по (58), отъ частнаго интеграла $h'_\mu \binom{r}{j}_\mu \sin \nu_\mu t$ будетъ:

$$h'_\mu \left[\frac{d^p \binom{r}{j}_\mu}{(d\nu_\mu)^p} \sin \nu_\mu t + p \frac{d^{p-1}\binom{r}{j}_\mu}{(d\nu_\mu)^{p-1}} t \sin\left(\nu_\mu t + \frac{\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{p(p-1)}{1.\ 2} \frac{d^{p-2}\binom{r}{j}_\mu}{(d\nu_\mu)^{p-2}} t^2 \sin\left(\nu_\mu t + 2\frac{\pi}{2}\right) + \ldots + \binom{r}{j}_\mu t^p \sin\left(\nu_\mu t + p\frac{\pi}{2}\right)\right] \quad (79)$$

давая p значенія отъ 1 до $\mu-1$, умножая каждое выраженіе на произвольное постоянное, складывая ихъ и прибавляя еще дифференцируемый частный интегралъ, получимъ сумму μ частныхъ интеграловъ, которые войдутъ въ общій интегралъ; мѣняя sin на cos получимъ еще μ частныхъ интеграловъ, и того, для μ кратнаго корня, часть общаго интеграла будетъ содержать 2μ произвольныхъ постоянныхъ т. е. столько, сколько соотвѣтствовало въ прежнемъ случаѣ μ различнымъ корнямъ характеристическаго уравненія. Присутствіе времени t внѣ знаковъ sin и cos указываетъ на движеніе не періодическое, удаляющее систему безпредѣльно изъ ея положенія равно-

*) *Serret*. Cours de calcul differentiel et intégral. 1868. T. II, nº 735.

вѣсія. Это обстоятельство привело, какъ указано выше, Лагранжа къ отрицанію возможности существованія равныхъ корней уравненія $f(\rho^2)=0$. Однако опасеніе, вызванное видомъ выраженія (79) неосновательно. Въ самомъ дѣлѣ, мы доказали (§ 4), что если ν_μ есть μ кратный корень уравненія $f(\rho^2)=0$, то всѣ миноры перваго порядка отъ этого детерминанта имѣютъ ν_μ по крайней мѣрѣ $\mu-1$ кратнымъ корнемъ. Поэтому всѣ эти миноры для $\rho^2=\nu^2_\mu$ и ихъ производныя по ν^2_μ до $\mu-2$-го порядка включительно, будутъ равны нулю.

Поэтому какъ дифференцируемый частный интегралъ, такъ и всѣ производныя вида (79) для $p=1, 2, \ldots \mu-2$ будутъ равны нулю. Для $p=\mu-1$ выраженіе (79) приведется къ своему первому члену; и такъ, вмѣсто μ частныхъ интеграловъ для μ кратнаго корня, мы получаемъ только одинъ, вида:

$$\frac{d^{\mu-1}\left(\frac{r}{j}\right)_\mu}{(d\nu_\mu)^{\mu-1}}\left(h_\mu \cos \nu_\mu t + h'_\mu \sin \nu_\mu t\right) \tag{80}$$

Такъ какъ этотъ интегралъ содержитъ только двѣ произвольныя постоянныя, часть же общаго интеграла соотвѣтствующая корню ν_μ должна содержать 2μ постоянныхъ произвольныхъ, то мы должны отыскать еще $\mu-2$ частныхъ интеграла. Выраженіе (80) показываетъ, что зависимость нашихъ интеграловъ отъ времени таже, какъ и въ частномъ интегралѣ (39); коэфиціенты этихъ частныхъ интеграловъ удовлетворяютъ поэтому прежнимъ уравненіямъ (53); прежній же методъ опредѣленія этихъ коэфиціентовъ и введенія произвольныхъ постоянныхъ не примѣняется, потому что для кратнаго корня равенства (55) становятся тождественными.

Въ разсматриваемомъ случаѣ (§ 4) миноры $\mu-1$-го порядка для $\rho^2=-\nu^2_\mu$ суть нули. Напишемъ μ миноровъ $\mu-1$-го порядка, отбрасывая послѣдовательно изъ μ послѣднихъ ко-

лоннъ и μ послѣднихъ горизонталей детерминанта (54) по $\mu-1$ колоннъ и по $\mu-1$ горизонталей:

$$\begin{vmatrix} u_{1,1} \cdots\cdots u_{1n-\mu} & u_{1,n-\mu+1} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \\ u_{n-\mu,1} \cdots u_{n-\mu,n-\mu} & u_{n-\mu,n-\mu+1} \\ u_{n-\mu+1,1} \cdots u_{n-\mu+1,n-\mu} & u_{n-\mu+1,n-\mu+1} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} u_{11} \cdots\cdots u_{1,n-\mu} & u_{1,n-\mu+2} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \\ u_{n-\mu,1} \cdots u_{n-\mu,n-\mu} & u_{n-\mu,n-\mu+2} \\ u_{n-\mu+2,1} \cdots u_{n-\mu+2,n-\mu} & u_{n-\mu+2,n-\mu+2} \end{vmatrix} = 0$$

.... (81)

$$\begin{vmatrix} u_{11} \cdots u_{1,n-\mu} & u_{1,n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \\ u_{n-\mu,1} \cdots u_{n-\mu,n-\mu} & u_{n-\mu,n} \\ u_{n,1} \cdots\cdots u_{n,n-\mu} & u_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Полагая $i \leqq n-\mu$, и слѣдующіе детерминанты будутъ равны нулю, какъ содержащіе двѣ горизонтальныя строки равными:

$$\begin{vmatrix} u_{11} \cdots u_{1,n-\mu} & u_{1,n-\mu+1} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \\ u_{n-\mu,1} \cdots u_{n-\mu,n-\mu} & u_{n-\mu,n-\mu+1} \\ u_{i1} \cdots u_{i,n-\mu} & u_{i,n-\mu+1} \end{vmatrix} = 0 .. \begin{vmatrix} u_{11} \cdots u_{n-\mu} & u_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \\ u_{n-\mu,1} \cdots u_{n-\mu,n-\mu} & u_{n-\mu,n} \\ u_{i1}, \cdots u_{i,n-\mu} & u_{in} \end{vmatrix} = 0 \qquad (82)$$

Но детерминанты (81) суть ничто иное, какъ детерминанты вида (82) для $i > n-m$. И такъ мы можемъ утверждать, что детерминанты (82) для всѣхъ значеній i отъ 1 до n суть нули.

Умножая послѣдніе столбцы этихъ детерминантовъ на μ произвольныхъ постоянныхъ $a^{\mu}_{n-\mu+1}$, $a^{\mu}_{n-\mu+2}$ .... a^{μ}_{n} и складывая полученные детерминанты вмѣстѣ, найдемъ новый детерминантъ равный нулю:

$$F=\begin{vmatrix} u_{11} \dots u_{1,n-\mu}, (u_{1,n-\mu+1}\, a^{\mu}_{n-\mu+1} + \dots + u_{1n}\, a^{\mu}_{n}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{n-\mu,1} \dots u_{n-\mu,n-\mu}, (u_{n-\mu,n-\mu+1}\, a^{\mu}_{n-\mu+1} + \dots + u_{n-\mu,n}\, a^{\mu}_{n}) \\ u_{i1} \dots u_{i,n-\mu}, \quad (u_{i,n-\mu+1}\, a^{\mu}_{n-\mu+1} + \dots + u_{in}\, a^{\mu}_{n}) \end{vmatrix} = 0 \quad (83)$$

Назовемъ черезъ D^{μ}_{1}, D^{μ}_{2},.... $D^{\mu}_{n-\mu}$, D^{μ} миноры перваго порядка этого детерминанта, получаемые выбрасываніемъ послѣдней горизонтали (содержащей i) и соотвѣтственно 1, 2,....$n-\mu$-ой и послѣдней вертикали. Эти миноры не зависятъ отъ i. По извѣстному свойству детерминантовъ мы можемъ написать равенство:

$$u_{i1} D_1{}^{\mu} + u_{i2} D_2{}^{\mu} + \dots + u_{in-\mu} D^{\mu}{}_{n-\mu} + D^{\mu} (u_{i,n-\mu+1} a^{\mu}{}_{n-\mu+1} + \dots + u_{in}\, a^{\mu}_{n}) = F = 0 \quad (84)$$

Давая i всѣ значенія отъ $i=1$ до $i=n$ получимъ n уравненій. Сравнивая эти уравненія съ (53), отнесенными къ корню μ, видимъ, что они становятся тождественными, полагая

$$a^{\mu}{}_1 = \frac{D^{\mu}{}_1}{D^{\mu}}, \quad a^{\mu}{}_2 = \frac{D^{\mu}{}_2}{D^{\mu}} \dots a^{\mu}{}_{n-\mu} = \frac{D^{\mu}{}_{n-\mu}}{D^{\mu}} \qquad (85)$$

такъ какъ выраженія (84) имѣютъ мѣсто для какихъ угодно

$a_{n-\mu+1} \ldots a^{\mu}_{n}$, то заключаемъ, что эти μ коэфиціента не опредѣляются равенствами (53). И такъ мы имѣемъ μ произвольныхъ постоянныхъ

$$a^{\mu}_{n-\mu+1}, a^{\mu}_{n-\mu+2} \ldots a^{\mu}_{n} \tag{86}$$

Эти произвольныя, какъ видно изъ выраженія (83), входятъ въ миноры $D_1 \ldots D_{n-\mu}$, но они не содержатся въ D^{μ}. И такъ, въ случаѣ μ кратнаго корня $n-\mu$ коэфиціентовъ a выражаются черезъ μ остальные, которые остаются совершенно произвольными. Сказанное о коэфиціентахъ a одинаково прилагается и къ коэфиціентамъ b. И такъ части общихъ интеграловъ въ выраженій (59), относящіяся къ корнямъ не кратнымъ, сохранятъ свой прежній видъ; кратнымъ же корнямъ, напр. μ кратному корню, будутъ соотвѣтствовать слѣдующіе члены:

$$\begin{array}{ll}
\text{въ } \psi_1 \ldots\ldots & \dfrac{D_1{}^{\mu}}{D^{\mu}} \cos \nu_{\mu} t + \dfrac{D_1^{1\mu}}{D^{\mu}} \sin \nu_{\mu} t \\[2ex]
\text{въ } \psi_2 \ldots\ldots & \dfrac{D_2{}^{\mu}}{D^{\mu}} \cos \nu_{\mu} t + \dfrac{D_2^{1\mu}}{D^{\mu}} \sin \nu_{\mu} t \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\[2ex]
\text{въ } \psi_{n-\mu} \ldots & \dfrac{D^{\mu}{}_{n-\mu}}{D^{\mu}} \cos \nu_{\mu} t + \dfrac{D^{1\mu}{}_{n-\mu}}{D^{\mu}} \sin \nu_{\mu} t \\[2ex]
\text{въ } \psi_{n-\mu+1} \ldots & a^{\mu}{}_{n-\mu+1} \cos \nu_{\mu} t + b^{\mu}{}_{n-\mu+1} \sin \nu_{\mu} t \\[1ex]
\text{въ } \psi_{n-\mu+2} \ldots & a^{\mu}{}_{n-\mu+2} \cos \nu_{\mu} t + b^{\mu}{}_{n-\mu+2} \sin \nu_{\mu} t \\[1ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\[1ex]
\text{въ } \psi_n \ldots\ldots & a^{\mu}{}_{n} \cos \nu_{\mu} t + b^{m}_{n} \sin \nu_{\mu} t
\end{array} \tag{87}$$

Приведенная часть содержитъ требуемое числа 2 μ про-

извольныхъ постоянныхъ. Знаки D' представляютъ соотвѣтственныя D, въ коихъ постоянныя a замѣнены постоянными b. Выраженія (87) отличаются отъ (59) тѣмъ, что если, въ случаѣ различныхъ корней, для какого нибудь корня $h_\mu = h'_\mu = 0$, то движеніе съ періодомъ ν_μ исчезаетъ во всей системѣ; между тѣмъ какъ въ случаѣ равныхъ корней, если нѣкоторыя изъ постоянныхъ a и b выраженія (87) равны нулю, то движеніе съ періодомъ ν_μ выпадаетъ только въ нѣкоторыхъ координатахъ ψ а не во всей системѣ; т. е. только нѣкоторыя движенія системы, а не всѣ, не будутъ имѣть періода ν_μ; мы скажемъ, для наглядности, что эти координаты опредѣляютъ узловыя точки для колебаній соотвѣтственнаго періода.

Различіе обоихъ случаевъ обнаруживается еще въ слѣдующемъ: разсмотримъ три частные интеграла, относящіеся къ одному и тому же корню и входящіе въ три независимыя координаты, напр. ψ_1, ψ_2, ψ_3, для корня одиночнаго и для корня многократнаго. Сложимъ эти три движенія, разсматривая ψ_1, ψ_2, ψ_3, какъ прямоугольныя координаты. Это сложеніе будетъ имѣть значеніе не только геометрической иллюстраціи, но представитъ результирующее дѣйствительное движеніе, если мы разсматриваемъ системы свободныя, причемъ удаленія 1, 2, 3... точекъ этой системы изъ начальнаго положенія параллельно осямъ координатъ, т. е.

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \text{ и т. д.}$$

означены соотвѣтственно буквами:

$$(\psi_1, \psi_2, \psi_3), (\psi_4, \psi_5, \psi_6) \text{ и т. д.}$$

Для корня однозначнаго три упомянутые выше частные интеграла имѣютъ видъ (по 59):

$$\psi_1 = \binom{r}{1}_\mu A^\mu \cos(\nu_\mu t - \varepsilon_\mu)$$

$$\psi_2 = \binom{r}{2}_\mu A_\mu \cos(\nu_\mu t - \varepsilon_\mu)$$

$$\psi_3 = \binom{r}{3}_\mu A_\mu \cos(\nu_\mu t - \varepsilon_\mu)$$

Исключая изъ этихъ выраженій время t, мы находимъ соотношеніе между ψ_1, ψ_2, ψ_3, представляющее уравненіе траэкторіи точки. Находимъ:

$$\frac{\psi_1}{\binom{r}{1}_\mu} = \frac{\psi_2}{\binom{r}{2}_\mu} = \frac{\psi_3}{\binom{r}{3}_\mu} = \frac{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2}}{\sqrt{\binom{r}{1}_\mu^2 + \binom{r}{2}_\mu^2 + \binom{r}{3}_\mu^2}}$$

Это суть уравненія прямой l, дѣлающей съ осями координатъ углы, коихъ косинусы суть (обращая вниманіе на (57) bis):

$$\cos(l, x) = \frac{\binom{r}{1}_\mu}{\sqrt{\binom{r}{1}_\mu^2 + \binom{r}{2}_\mu^2 + \binom{r}{3}_\mu^2}} = \sqrt{\frac{\binom{1}{1}_\mu}{\binom{1}{1}_\mu^2 + \binom{2}{2}_\mu^2 + \binom{3}{3}_\mu^2}}$$

$$\cos(l, y) = \frac{\binom{r}{2}_\mu}{\sqrt{\binom{r}{1}_\mu^2 + \binom{r}{2}_\mu^2 + \binom{r}{3}_\mu^2}} = \sqrt{\frac{\binom{2}{2}}{\binom{1}{1}_\mu^2 + \binom{2}{2}_\mu^2 + \binom{3}{3}_\mu^2}}$$

$$\cos(l, z) = \frac{\binom{r}{3}_\mu}{\sqrt{\binom{r}{1}_\mu^2 + \binom{r}{2}_\mu^2 + \binom{r}{3}_\mu^2}} = \sqrt{\frac{\binom{3}{3}_\mu}{\binom{1}{1}_\mu^2 + \binom{2}{2}_\mu^2 + \binom{3}{3}_\mu^2}}$$

Слѣдовательно составное движеніе будетъ прямолинейное. Перейдемъ теперь къ случаю кратнаго корня. По выраженіямъ (87):

$$\psi_1=\frac{1}{D^\mu}(D_1{}^\mu \cos\nu_\mu t+D_1{}'^\mu \sin\nu_\mu t)$$

$$\psi_2=\frac{1}{D^\mu}(D_2{}^\mu \cos\nu_\mu t+D_2{}'^\mu \sin\nu_\mu t) \qquad (88)$$

$$\psi_3=\frac{1}{D^\mu}(D_3{}^\mu \cos\nu_\mu t+D_3{}'^\mu \sin\nu_\mu t)$$

Полагая

$$A_1=\frac{1}{D^\mu}\sqrt{(D_1{}^\mu)^2+(D_1{}'^\mu)^2},\ A_2=\frac{1}{D^\mu}\sqrt{(D_2{}^\mu)^2+(D_2{}'^\mu)^2},$$

$$A_3=\frac{1}{D^\mu}\sqrt{(D_3{}^\mu)^2+(D_3{}'^\mu)^2}$$

$$tg\varepsilon_1=\frac{D_1{}'^\mu}{D_1{}^\mu},\ tg\varepsilon_2=\frac{D_2{}'^\mu}{D_2{}^\mu},\ tg\varepsilon_3=\frac{D_3{}'^\mu}{D_3{}^\mu},$$

мы преобразуемъ предъидущія выраженія въ слѣдующія:

$$\psi_1=A_1\cos(\nu_\mu t-\varepsilon_1),\quad \psi_2=A_2\cos(\nu_\mu t-\varepsilon_2),\quad \psi_3=A_3\cos(\nu_\mu t-\varepsilon_3).$$

Эти выраженія отличаются существенно отъ тѣхъ, которыя имѣютъ мѣсто для однозначнаго корня тѣмъ, что фазы ихъ другъ отъ друга различны; одинаковыми они могутъ быть только въ частныхъ случаяхъ. Отыщемъ опять траэкторію точки.

Исключая изъ первыхъ двухъ уравненій (88) $\cos\nu_\mu t$ и $\sin\nu_\mu t$ получимъ:

$$\sin\nu_\mu t=D_\mu\,\frac{D_2{}^\mu\,\psi_1-D_1{}^\mu\,\psi_2}{D_1{}'^\mu D_2{}^\mu-D_1{}^\mu\,D_2{}'^\mu}$$

$$\cos\nu_\mu t=-D_\mu\,\frac{D_2^{1\mu}\,\psi_1-D_1^{1\mu}\,\psi_2}{D_2^{1\mu}\,D_2{}^\mu-D_1{}^\mu\,D_2^{1\mu}} \qquad (89)$$

вносія ихъ въ послѣднее изъ уравненій (88) получаемъ:

$$(D_3^{\mu}\, D_2'^{\mu} - D_3'^{\mu}\, D_2^{\mu})\psi_1 + (D_3'^{\mu}\, D_1^{\mu} - D_3^{\mu}\, D_1'^{\mu})\psi_2 + \\ + (D_1'^{\mu}\, D_2^{\mu} - D_1^{\mu}\, D_2'^{\mu})\psi_3 = 0 \qquad (90)$$

Возвышая же (89) въ квадратъ и складывая:

$$(D_2'^{\mu}\psi_1 - D_1'^{\mu}\psi_2)^2 + (D_2^{\mu}\psi_1 - D_1^{\mu}\psi_2)^2 = \frac{(D_1'^{\mu}D_2^{\mu} - D_1^{\mu}D_2'^{\mu})^2}{D^2_{\mu}} \qquad (91)$$

Уравненіе (90) есть уравненіе плоскости, въ которой лежитъ траэкторія точки; уравненіе же (91)—прямого эллиптическаго цилиндра, коего образующія параллельны оси ψ_3. Сѣченіе цилиндра и плоскости даетъ эллипсисъ, который и есть траэкторія точки. Уравненія плоскости и эллиптическаго цилиндра могутъ быть представлены еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_3).\frac{\psi_1}{A_1} + \sin(\varepsilon_3 - \varepsilon_1).\frac{\psi_2}{A_2} + \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\frac{\psi_3}{A_3} = 0 \\ \frac{\psi_1^2}{A_1^2} - 2\cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\frac{\psi_1}{A_1}\frac{\psi_2}{A_2} + \frac{\psi_2^2}{A_2^2} = \sin^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \qquad (92)$$

Это колебаніе превратится въ прямолинейное когда разности $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\varepsilon_3 - \varepsilon_1$ равны цѣлому числу разъ π.

И такъ мы приходимъ къ заключенію, что если детерминантъ свободной системы имѣетъ корни различные, то каждому періоду соотвѣтствуютъ всегда колебанія прямолинейныя; если же детерминантъ имѣетъ кратные корни, то каждому періоду соотвѣтствуютъ эллиптическія колебанія, которыя только въ частныхъ случаяхъ могутъ переходить въ прямолинейныя.

II. Колебанія системы съ одною степенью свободы. Созвучіе и абсорбція.

§ 1. Движеніе системы съ одною степенью свободы можно разсматривать какъ движеніе матеріяльной точки по неподвижной прямой. Если положеніе системы будемъ опредѣлять независимою перемѣнною ψ, отсчитываемою отъ положенія устойчиваго равновѣсія, то для безконечно малыхъ удаленій системы изъ этого положенія, означая черезъ $\dot\psi$ производную отъ ψ по времени t:

кинетическая энергія будетъ . . . . . $T=\frac{m}{2}\dot\psi^2$, (1)

потенціяльная энергія внутреннихъ консервативныхъ силъ . . . . $W=\frac{g}{2}\psi^2$; (2)

положимъ еще, что на систему, или на представляющую ее матеріяльную точку, дѣйствуетъ сила, направленная въ каждый моментъ времени противуположно ея движенію и пропорціональная ея скорости т. е. $\dot\psi$. Эту силу, называемую силою тренія, означимъ черезъ

$$F=-2a\dot\psi \qquad (3)$$

Вставляя (1), (2), (3) въ уравненія движенія Лагранжа въ независимыхъ перемѣнныхъ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot\psi}\right)-\frac{d(T-W)}{d\psi}=F,$$

мы получаемъ:

$$m\ddot{\psi}+2a\dot{\psi}+g\psi=0 \qquad (4)$$

Коэфиціенты m и g положительны, какъ показано было въ предъидущей статьѣ; легко доказать что и коэфиціентъ a будетъ величиною положительною. Умножимъ выраженіе (4) на $\dot{\psi}$; оно получитъ видъ:

$$\frac{d}{dt}(T+W)=-2a\dot{\psi}^2$$

Лѣвая часть представляетъ измѣненіе съ временемъ полной энергіи системы; при существованіи силъ тренія, эта энергія съ временемъ должна убывать, почему ея производная по времени должна быть отрицательной для дѣйствительныхъ значеній скоростей $\dot{\psi}$, что возможно въ томъ лишь случаѣ когда a положительно.

Прежде чѣмъ мы приступимъ къ разсмотрѣнію движенія системы подъ дѣйствіемъ періодической силы, напомнимъ свойства интеграла дифференціальнаго уравненія (4). Частный интегралъ имѣетъ видъ

$$\psi=Ae^{\nu t}; \qquad (5)$$

вставляя его въ (4), получаемъ

$$m\nu^2+2a\nu+g=0, \qquad (6)$$

откуда

$$\nu=-\frac{a\pm\sqrt{a^2-mg}}{m}. \qquad (7)$$

Это выраженіе должно быть разсмотрѣно нами для трехъ различныхъ случаевъ:

(a) оба корня ν не равны и $a^2<mg$;
(b) оба корня ν не равны и $a^2>mg$;
(c) оба корня ν равны, т. е. $a^2=mg$.

Въ случаѣ (a), корень $\sqrt{a^2-mg}$ будетъ мнимымъ, и полагая

$$\frac{a^2-mg}{m^2}=-n_1{}^2,$$

мы получаемъ демфированное періодическое движеніе

$$\psi=e^{\frac{-at}{m}}(A\cos n_1t+B\sin n_1t)$$

съ амплитудою, убывающею (ибо $\frac{a}{m}$ положительно) съ временемъ въ прогрессіи геометрической; періодъ колебанія есть $\frac{2\pi}{n_1}$ и называется естественнымъ періодомъ системы съ треніемъ. Если тренія нѣтъ т. е. $a=0$, то мы получаемъ гармоническое движеніе съ постоянною амплитудою и естественнымъ періодомъ $\frac{2\pi}{n}$, гдѣ $n^2=\frac{g}{m}$.

Въ случаѣ (b) оба корня дѣйствительны и такъ какъ $\sqrt{a^2-mg}<a$, то оба корня r отрицательны, и мы получаемъ движеніе

$$\psi=Ae^{-\frac{a-\sqrt{a^2-mg}}{m}t}+Be^{-\frac{a+\sqrt{a^2-mg}}{m}t}$$

ассимптотически приближающее систему къ положенію устойчиваго равновѣсія.

Случай (c) равныхъ корней разсмотримъ слѣдующимъ образомъ.

Внося частный интегралъ (5) въ уравненіе (4), мы можемъ написать слѣдующее тождество:

$$m\frac{d}{dt^2}(Ae^{\nu t})+2a\frac{d}{dt}(Ae^{\nu t})+g(Ae^{\nu t})=A(m\nu^2+2a\nu+g)e^{\nu t}.$$

Продифференцируемъ обѣ части этого тождества по ν; получимъ:

$$m\frac{d}{dt^2}(Ate^{\nu t})+2a\frac{d}{dt}(Ate^{\nu t})+g(Ate^{\nu t})=2A(m\nu+a)e^{\nu t}$$
$$+At(m\nu^2+2a\nu+g)e^{\nu t}$$

Но въ случаѣ (c): $\nu=-\frac{a}{m}$ и, кромѣ того, удовлетворяется выраженіе (6); поэтому вторая часть предъидущаго уравненія равна нулю, и оно переходитъ въ дифференціяльное уравненіе (4), въ которое вмѣсто ψ было бы подставлено $Ate^{\nu t}$; и такъ выраженіе этого вида есть тоже частный интегралъ нашего дифференціяльнаго уравненія. Поэтому общій интегралъ, содержащій два произвольныхъ постоянныхъ, въ случаѣ (c) будетъ:

$$\psi=Ae^{\nu t}+Bte^{\nu t}$$

или, такъ какъ $\nu=-\frac{a}{m}$:

$$\psi=e^{-\frac{a}{m}t}(A+Bt)$$

Это есть движеніе, удаляющее вначалѣ систему отъ ея положенія устойчиваго равновѣсія; а потомъ, послѣ достиженія величиною ψ нѣкотораго maximum'а, система ассимптотически приближается къ положенію равновѣсія. Движенія, соотвѣтствующія случаямъ (b) и (c) называются *аперіодическими* *)

Въ дальнѣйшемъ изложеніи буквою ψ' мы будемъ означать общій интегралъ уравненія (4), относящійся къ какому либо изъ разсмотрѣнныхъ нами случаевъ.

---

*) Приложенія теоріи даны Гауссомъ: «Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel« *Gauss*. Werke. 1867. Bd. V. стр. 374. Условія аперіодическаго движенія магнитовъ открылъ Emil du Bois-Reymond въ 1869 г. Теорія аперіодическаго движенія и ея примѣненія подробно изложены: E. du Rois-Reymond, Gesammelte Abhandlungen, Leipzig. 1875, Bd. I, стр. 284 и слѣд.

§ 2. Положимъ что система находится подъ дѣйствіемъ внѣшней силы Φ. Уравненіе движенія будетъ:

$$m\ddot{\psi}+2a\dot{\psi}+g\psi=\Phi.$$

Раздѣлимъ это выраженіе на m; замѣчая, что $\frac{g}{m}=n^2$, и называя $\frac{a}{m}$ черезъ k и $\frac{1}{m}\,\Phi$ черезъ V, получимъ:

$$\ddot{\psi}+2k\dot{\psi}+n^2\psi=V \tag{8}$$

Мы принимаемъ что внѣшняя сила V слѣдуетъ закону:

$$V=Ae^{(\alpha+\beta i)t}+Be^{(\alpha-\beta i)t} \tag{9}$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$ и α, β суть дѣйствительныя величины. Интегралъ уравненія (8) представится въ видѣ

$$\psi=\psi'+\psi'',$$

гдѣ ψ' есть извѣстный намъ интегралъ уравненія (8) при $V=0$, а

$$\psi''=ae^{(\alpha+\beta i)t}+be^{(\alpha-\beta i)t} \tag{10}$$

Мы займемся изслѣдованіемъ этого послѣдняго выраженія. Подставляя его въ (8), мы находимъ два уравненія для опредѣленія постоянныхъ a и b, приравнивая нулю коэфиціенты при $e^{(\alpha+\beta i)t}$ и $e^{(\alpha-\beta i)t}$:

$$a\{(\alpha+\beta i)^2+2k(\alpha+\beta i)+n^2\}=A$$

$$b\{(\alpha-\beta i)^2+2k(\alpha-\beta i)+n^2\}=B$$

Полагая

$$\sigma=\alpha^2-\beta^2+2k\alpha+n^2,$$

$$\sigma_1=2(\alpha+k)\beta, \tag{11}$$

получаемъ:

$$a=\frac{A(\sigma-\sigma_1 i)}{\sigma^2+\sigma_1{}^2},\ b=\frac{B(\sigma+\sigma_1 i)}{\sigma^2+\sigma_1{}^2}. \qquad (12)$$

Внося эти постоянныя въ выраженіе ψ'' и замѣчая, что дѣйствительныя и мнимыя части въ отдѣльности удовлетворяютъ нашему уравненію, находимъ, полагая

$$A+B=M \text{ и } A-B=N: \qquad (13)$$

если $V=Me^{\alpha t}\cos\beta t,$

то $\psi''=Me^{\alpha t}\dfrac{\sigma\cos\beta t+\sigma_1\sin\beta t}{\sigma^2+\sigma_1{}^2}$; $\qquad (14)$

если $V=Ne^{\alpha t}\sin\beta t,$

то $\psi''=Ne^{\alpha t}\dfrac{\sigma\sin\beta t-\sigma_1\cos\beta t}{\sigma^2+\sigma_1{}^2}$. $\qquad (15)$

Эти выраженія справедливы пока сумма $\sigma^2+\sigma_1{}^2$ не равна нулю; если же эта сумма есть нуль, то a и b становятся неопредѣленными, и вопросъ требуетъ дальнѣйшаго изслѣдованія.

Предположимъ сначала что сумма $\sigma^2+\sigma_1{}^2$ не равна нулю. Выраженія (14) и (15) приводятъ насъ къ такимъ заключеніямъ:

(1) α и β отличны отъ нуля: внѣшняя сила есть періодическая съ періодомъ $\frac{2\pi}{\beta}$ и убывающею или возрастающею съ временемъ амплитудою; движеніе есть гармоническое, амплитуда слѣдуетъ тому же закону какъ и амплитуда внѣшней силы, періодъ движенія равенъ періоду внѣшней силы т. е. $\frac{2\pi}{\beta}$.

(2) $\alpha=0$: отличается отъ предъидущаго постоянствомъ амплитуды.

(3) $\beta=0$: внѣшняя сила возрастаетъ или убываетъ съ

временемъ въ геометрической прогрессіи; тому же закону слѣдуетъ и движеніе.

(4) $\alpha=0$ и $\beta=0$: внѣшняя сила постоянна и равна M; система, подъ ея дѣйствіемъ, перемѣщается на постоянную величину изъ положенія устойчиваго равновѣсія:

$$\psi''=\frac{M}{n^2} \tag{16}$$

Эту величину мы назовемъ *растяженіемъ* системы подъ дѣйствіемъ постоянной силы M. Въ случаѣ (2) движеніе ψ'' будетъ имѣть наибольшую амплитуду при $\sigma=0$, т. е. когда $\beta=n$ или періодъ внѣшней силы равенъ естественному періоду системы безъ тренія. Амплитуда $\frac{M}{2kn}$ можетъ сдѣлаться очень значительной при маломъ треніи. Явленія, соотвѣтствующія этому случаю наз. явленіями *резонанса*. Дѣйствіе звуковой волны на струну можно уподобить дѣйствію періодической силы; поэтому тонъ, находящійся въ униссонѣ съ однимъ изъ тоновъ, которые издавала бы струна если бы между ея частицами не существовало внутреннее треніе, вызоветъ колебанія большаго напряженія чѣмъ другіе тоны равной съ нимъ силы: струна будетъ резонировать, издавая тонъ n весьма мало разнящійся при незначительномъ треніи отъ тона n_1, издаваемаго струною въ дѣйствительности.

Примемъ теперь, что сумма $\sigma^2+\sigma_1{}^2=0$, т. е. $\sigma=0$ и $\sigma_1=0$, или:

$$\begin{aligned} \alpha^2-\beta^2+2k\alpha+n^2&=0 \\ (\alpha+k)\beta&=0 \end{aligned} \tag{17}$$

Здѣсь возможны два случая:

(1'). β не равно нулю; тогда $\alpha=-k$ и

$$\beta=\sqrt{n^2-k^2}=\frac{\sqrt{mg-a^2}}{m}=n_1 \tag{18}$$

слѣдовательно періодъ внѣшней силы $\frac{2\pi}{\beta}$ равенъ естественному періоду $\frac{2\pi}{n_1}$ системы съ треніемъ; если тренія нѣтъ, т. е. $k=0$ то

$$\beta=n, \tag{19}$$

и періодъ внѣшней силы $\frac{2\pi}{\beta}$ равенъ естественному періоду $\frac{2\pi}{n}$ системы безъ тренія. Для обозначенія этого случая мы будемъ говорить условно, что внѣшняя сила и система находятся въ *созвучіи*.

(2′). $\beta=0$; тогда первое изъ уравненій (17) даетъ

$$\alpha^2+2k\alpha+n^2=0$$

откуда

$$\alpha=-k\pm\sqrt{k^2-n^2};$$

такъ какъ α, по условію, дѣйствительно, то предъидущее выраженіе имѣетъ мѣсто пока $k>n$, т. е. въ случаѣ весьма большаго тренія или движенія аперіодическаго; α при этомъ условіи тождественно съ ν въ выраженіи (7). Этотъ случай намъ не интересенъ и мы остановимся на (1′).

Выраженія ψ'' (14) и (15) становятся неопредѣленными и чтобы отыскать ихъ истинное значеніе, мы обратимся къ общимъ соображеніямъ. Представимъ первую часть уравненія движенія (8) черезъ

$$\Phi(\psi).$$

Вставляя сюда вмѣсто ψ частные интегралы $a\,e^{(\alpha\pm\beta i)t}$ и совершая дѣйствія, обозначенныя символически предъидущимъ выраженіемъ, получаемъ тождество:

$$\Phi(ae^{(\alpha\pm\beta i)t})=ae^{(\alpha\pm\beta i)t}((\alpha\pm\beta i)^2+2k(\alpha\pm\beta i)+n^2)$$

Продифференцируемъ обѣ части по $(\alpha\pm\beta i)$; получимъ:

$$\Phi(ate^{(\alpha\pm\beta i)t}) = 2ae^{(\alpha\pm\beta i)t}[(\alpha\pm\beta i)+k] + ate^{(\alpha\pm\beta i)t}[(\alpha\pm\beta i)^2+2k(\alpha\pm\beta i)+n^2]. \quad (20)$$

Если $\sigma=0$ и $\sigma_1=0$, то

$$(\alpha\pm\beta i)^2+2k(\alpha\pm\beta i)+n^2=0$$

и изъ (20):

$$\Phi(ate^{(\alpha\pm\beta i)t}) = 2a[(\alpha\pm\beta i)+k]e^{(\alpha\pm\beta i)t} \quad (21)$$

или короче

$$= Ne^{(\alpha\pm\beta i)t}$$

Сравнивая это выраженіе съ уравненіемъ движенія (8), мы видимъ, что если $V=Ne^{(\alpha\pm\beta i)t}$ и $\sigma=\sigma_1=0$, уравненіе движенія имѣетъ частные интегралы вида:

$$\psi''=ate^{(\alpha\pm\beta i)t};$$

оставляя символическія обозначенія и обращая вниманіе на величины α и β въ случаѣ (1'), заключаемъ:

если
$$V=e^{-kt}(Ae^{n_1it}+Be^{-n_1it})$$

то
$$\psi''=te^{-kt}(ae^{n_1it}+be^{-n_1it})$$

Постоянныя a и b легко опредѣлить, замѣчая что введенное выше N замѣняетъ или A или B и имѣетъ значеніе:

$$N=\begin{cases} 2a[(\alpha+\beta i)+k]=2an_1i=A \\ \text{или} \\ 2b[(\alpha-\beta i)+k]=-2bn_1i=B \end{cases}$$

Откуда

$$a=-\frac{A}{2n_1}i,\quad b=\frac{B}{2n_1}i$$

И такъ: если $V=Me^{-kt}\cos n_1 t$, то $\psi''=\frac{M}{2n_1}te^{-kt}\sin n_1 t$, $M=A+B$.

если $V=Ne^{-kt}\sin n_1 t$, то $\psi''=-\frac{N}{2n_1}te^{-kt}\cos n_1 t$, $N=A-B$ (22)

Если $k=0$, т. е. въ системѣ нѣтъ тренія, то амплитуда движенія неограничено возрастаетъ съ временемъ; такое движеніе мы назовемъ *абсорбирующимъ*, при немъ $n_1=n$; разсматриваемое ддиженіе называется абсорбирующимъ потому, что безпредѣльное возрастаніе его кинетической энергіи можетъ совершаться только на счетъ энергіи внѣшней періодической силы. Изъ линейности уравненія движенія слѣдуетъ, что если вмѣсто одной періодической силы дѣйствуютъ нѣсколько, то къ интегралу ψ' прибавятся столько интеграловъ ψ'', сколько есть дѣйствующихъ силъ и каждый изъ этихъ интеграловъ опредѣлится, указаннымъ методомъ, по силѣ, коей онъ соотвѣтствуетъ.

И такъ, если на систему съ одною степенью свободы и безъ тренія дѣйствуютъ періодическія силы, то эта система совершаетъ рядъ гармоническихъ движеній съ періодами равными періодамъ дѣйствующихъ силъ; но изъ всѣхъ движеній выдѣлится по своей напряженности одно, безпредѣльно возрастающее съ временемъ: это есть движеніе, вызываемое силою, имѣющею періодъ равный естественному періоду системы; оно называется *колебаніемъ или абсорбціей по созвучію.*

Мы находимъ здѣсь частный случай закона абсорбціи Кирхгофа, разсматривая дѣйствіе колебаній нѣкоторой среды на погруженныя въ нее инородныя съ нею молекулы, какъ дѣйствіе нѣкоторой періодической силы на систему матеріяльныхъ точекъ: система абсорбируетъ колебанія съ періодомъ равнымъ одному изъ ея естественныхъ періодовъ,

т. е. равнымъ одному изъ періодовъ тѣхъ колебаній, которыя ею могутъ быть лучеиспускаемы.

Если въ системѣ есть треніе, т. е. k не равно нулю, то наибольшее значеніе амплитудъ

$$\frac{Mte^{-kt}}{2n_1} \quad \text{или} \quad \frac{Nte^{-kt}}{2n_1}$$

будетъ имѣть мѣсто для $t=\frac{1}{k}$, въ чемъ легко убѣдиться по извѣстнымъ правиламъ отысканія max. и min. выраженій. Maximum амплитуды равенъ:

$$\frac{M}{2n_1ke} \quad \text{или} \quad \frac{N}{2n_1ke};$$

амплитуда тѣмъ больше, чѣмъ менѣе k. И такъ въ случаѣ малаго тренія, колебанія, вызываемыя по созвучію, выдѣляются изъ прочихъ своею напряженностью; но эта напряженность, достигнувъ нѣкотораго максимума, постепенно падаетъ. Абсорбція энергіи, сопровождающая это движеніе наз. *неполной абсорбціей*; она можетъ быть очень значительна для малаго k, т. е. для малаго тренія, ибо при этомъ моментъ $t=\frac{1}{k}$ поворота движенія къ убыли весьма удаленъ отъ момента возникновенія этого движенія.

§ 3. Разсматривая весьма малыя уклоненія системы изъ ея положенія устойчиваго равновѣсія, мы останавливались въ разложеніи потенціальной энергіи по степенямъ малыхъ перемѣщеній на членахъ втораго порядка [форм. (2) настоящей статьи и форм. (12) предъидущей], т. е. въ разложеніи внутреннихъ силъ — на членахъ перваго порядка. Обратимся теперь къ изслѣдованію тѣхъ движеній, которыя, въ системѣ съ одною степенью свободы, обусловливаются присутствіемъ въ выраженіи потенціяльной энергіи членовъ выше второго порядка,

а слѣдовательно въ выраженіи внутреннихъ силъ — членовъ выше перваго порядка.

И такъ, вмѣсто выраженія (2) для потенціальной энергіи, мы принимаемъ слѣдующее:

$$W=\frac{g}{2}\psi^2+\frac{a_1}{3}\psi^3+\frac{a_2}{4}\psi^4+\ldots. \qquad (23)$$

Консервативная сила, обусловливаемая потенціальною энергіей равна, какъ извѣстно, $-\frac{dW}{d\psi}$; означая ее черезъ R, находимъ:

$$-R=g\psi+a_1\psi^2+a_2\psi^3+\ldots. \qquad (24)$$

Въ этомъ общемъ видѣ величина R не будетъ одинаковою для двухъ значеній ψ равныхъ въ абсолютной величинѣ, но противуположныхъ по знаку. Поэтому написанное выше R имѣетъ мѣсто для системъ съ нѣкоторыми особыми свойствами.

Изслѣдованіе движенія системъ съ одною степенью свободы имѣетъ интересъ еще въ томъ отношеніи, что даетъ возможность дѣлать заключенія о движеніи системъ не съ одною а со многими степенями свободы въ тѣхъ случаяхъ, когда рѣшеніе вопроса для системы сложной представляетъ большія трудности. Это перенесеніе результатовъ имѣло бы значеніе совершенно точное для такой системы, движеніе которой введеніемъ перемѣнныхъ ψ, при существованіи силъ тренія, могло бы быть сведено на движеніе нѣсколькихъ независимыхъ другъ отъ друга системъ съ одною степенью свободы; мы встрѣтили подобный случай въ предъидущей статьѣ.

Если бы мы желали по движенію системы съ одной степенью свободы при дѣйствіи силы R (24), составить себѣ представленіе о движеніи системы со многими степенями свободы, то должны были бы сдѣлать слѣдующія ограниченія:

Распространеніе выводовъ, которые будутъ нами получены изъ сдѣланной гипотезы—на движеніе матеріяльной точки

внутренней, т. е. находящейся внутри системы со многими степенями свободы, возможно для средъ *несимметричныхъ*, т. е. такихъ, въ которыхъ при перемѣщеніи матеріальной точки изъ положенія равновѣсія въ двухъ діаметрально противуположныхъ направленіяхъ, вызывались бы неравныя силы. Невозможно подобное распространеніе на движеніе внутренней точки системы изотропной или симметрической, т. е. такой, для которой силы при перемѣщеніи точки изъ положенія равновѣсія въ двухъ діаметрально противуположенныхъ направленіяхъ всегда другъ другу равны. Выводы, получаемые для движенія несимметрической системы съ одною степенью свободы, могутъ быть переносимы: 1) на движеніе матеріяльныхъ точекъ, находящихся при поверхностяхъ или на границахъ системъ; въ этихъ положеніяхъ матеріяльныя точки находятся подъ дѣйствіемъ несимметрическихъ внутреннихъ силъ; въ жидкихъ тѣлахъ такія силы обусловливаютъ, между прочимъ, капиллярныя явленія, и коэфиціенты выраженія (24) должны зависѣть отъ удаленія матеріяльной точки отъ поверхности и отъ кривизны этой поверхности; 2) на системы съ ограниченнымъ числомъ степеней свободы; къ такого рода системамъ мы можемъ причислить молекулы, разсматриваемыя какъ группы состоящія изъ ограниченнаго числа матеріяльныхъ точекъ—атомовъ; перепонки, закрѣпленныя по своимъ краямъ и испытывающія одностороннее натяженіе; подобную перепонку представляетъ напр. барабанная перепонка въ человѣческомъ ухѣ: она сильно притянута внутрь уха, слѣдовательно односторонне, рукояткой молоточка*), и пр.

Мы привели примѣры системъ несимметричныхъ; для тѣлъ симметричныхъ выраженіе (24) не должно содержать четныхъ степеней независимыхъ перемѣнныхъ, т. е. потенціяльная энергія не должна содержать степеней нечетныхъ.

---

*) *Helmholtz*. Die Lehre von den Tonempfindungen. 1877. Beilage XII: Theorie der Combinationstöne.

Примѣръ среды съ одною степенью свободы мы можемъ найти *) въ системѣ, состоящей изъ двухъ матеріяльныхъ точекъ, изъ коихъ одна неподвижна, другая же можетъ двигаться вдоль прямой, проходящей черезъ первую; между ними дѣйствуютъ двѣ силы: одна отталкивательная, другая притягательная. При нѣкоторомъ разстояніи обѣ силы взаимно уравновѣшиваются; соотвѣтственное положеніе есть положеніе равновѣсія. Если при сближеніи точекъ отталкивательная сила возрастаетъ быстрѣе, а при удаленіи медленнѣе чѣмъ притягательная, то результирующая внутренняя сила будетъ стремиться возвращать подвижную матеріяльную точку въ ея положеніе равновѣсія, независимо отъ направленія перемѣщенія. St. Vénant разсматриваетъ въ своей статьѣ случай, когда приведенная система несимметрична: графически она можетъ характеризоваться тѣмъ, что если мы примемъ за абсциссы разстоянія подвижной точки отъ неподвижной, а за ординаты — соотвѣтственныя абсолютныя величины результирующей внутренней силы, то плоская кривая, изображающая законъ ея измѣненія съ разстояніемъ, не будетъ симметрична относительно ординаты, соотвѣтствующей положенію равновѣсія. Выводы, полученные изъ изученія движенія такой системы, St. Venant переноситъ на движенія внутреннихъ точекъ изотропной системы, что не можетъ быть признано законнымъ, по причинамъ указаннымъ выше; мы коснемся еще этого вопроса. Если кривая внутренней силы симметрична относительно указанной ординаты, то наша система есть симметричная, и въ выраженіи W (23) будутъ отсутствовать члены съ нечетными степенями ψ.

Вернемся къ нашей задачѣ. Допустимъ что коэфиціенты при различныхъ степеняхъ ψ въ выраженіи W (23) становятся все меньше, чѣмъ дальше мы подвигаемся въ разложе-

*) *Saint-Vénant.* Sur la manière dont les vibrations calorifiques peuvent dilater les corps et sur les coéficients des dilatations (Comptes rendus des séances de l'Academie des sciences. T. 82. 1876).

нія этой функціи; такимъ образомъ чѣмъ выше степень ψ, тѣмъ незначительнѣе ея вліяніе на движеніе. Сдѣланное допущеніе представимъ аналитически слѣдующими равенствами:

$$a_1 = \theta b', \; a_2 = \theta^2 c', \ldots.$$

гдѣ θ есть постоянная малая величина перваго порядка, и b', c' .... суть величины одного порядка съ g. Мы получаемъ:

$$W = \frac{g}{2}\psi^2 + \frac{\theta b'}{3}\psi^3 + \frac{\theta^2 c'}{4}\psi^4 + \ldots,$$

Внося это выраженіе въ уравненія движенія Лагранжа, замѣняя $\frac{b'}{m}$, $\frac{c'}{m}$ .... через b, c ...., получаемъ:

$$\ddot{\psi} + 2k\dot{\psi} + n^2\psi = V - \theta b\psi^2 - \theta^2 c\psi^3 - \ldots. \qquad (25)$$

Интегралъ этого уравненія будетъ содержать члены разныхъ порядковъ, соотвѣтственно порядкамъ членовъ второй его части. Мы положимъ поэтому

$$\psi = \psi_1 + \theta\psi_2 + \theta^2\psi_3 + \ldots. \qquad (26)$$

Внося это выраженіе въ дифференціяльное уравненіе движенія (25), приравнивая нулю коэфиціенты при различныхъ степеняхъ θ, получаемъ рядъ уравненій:

$$\begin{aligned} &\ddot{\psi}_1 + 2k\dot{\psi}_1 + n^2\psi_1 = V \\ &\ddot{\psi}_2 + 2k\dot{\psi}_2 + n^2\psi_2 = -b\psi_1^2 \qquad (27) \\ &\ddot{\psi}_3 + 2k\dot{\psi}_3 + n^2\psi_3 = -2b\psi_1\psi_2 - c\psi_1^3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Пользуясь теоріей, изложенной въ § 2, легко отыскать интегралы этихъ уравненій если V имѣетъ видъ (9); мы можемъ разсматривать правыя части всѣхъ уравненій, начиная

со второго, какъ данныя внѣшнія силы, ибо они опредѣляются по предшествующимъ уравненіямъ.

Допустимъ, пока, что внѣшнія силы V не дѣйствуютъ на систему, и ея движеніе начинается въ моментъ $t=0$ изъ состоянія покоя вслѣдствіе сообщенной начальной скорости v_0. Мы отыщемъ интегралъ (26) при условіи, что для $t=0$:

$$\begin{aligned} &\psi_1=0,\ \psi_2=0,\ \psi_3=0\ \ldots. \\ &\dot\psi_1=v_0,\ \dot\psi_2=0,\ \dot\psi_3=0\ \ldots. \end{aligned} \tag{28}$$

Интегралъ перваго изъ уравненій (27) будетъ, при маломъ треніи, по § 1, случай (a):

$$\psi_1=\frac{v_0}{n_1}e^{-kt}\sin n_1 t \tag{29}$$

Внося эту величину въ правую часть второго изъ ур. (27), послѣднее представитъ уравненіе движенія подъ дѣйствіемъ фиктивной внѣшней силы:

$$-\frac{bv_0^2}{n_1^2}e^{-2kt}\sin^2 n_1 t \text{ или } -\frac{bv_0^2}{2n_1^2}e^{-2kt}(1-\cos 2n_1 t) \tag{30}$$

Интегралъ уравненія будетъ состоять изъ двухъ частей:

$$\psi_2=\psi'_2+\psi''_2$$

Первая часть, т. е. ψ'_2 есть интегралъ второго уравненія въ случаѣ отсутствія внѣшнихъ силъ: этотъ интегралъ намъ извѣстенъ. Вторая часть, т. е. ψ''_2 обусловливается фиктивными внѣшними силами (30). Два произвольныхъ постоянныхъ, входящихъ въ ψ'_2 опредѣлятся тѣмъ, что по условіямъ (28) для $t=0$:

$$\psi_2=0 \text{ и } \dot\psi_2=0.$$

Внѣшняя фиктивная сила, представляемая первымъ членомъ выраженія (30), т. е. $-\frac{bv_0^2}{2n_1^2}e^{-2kt}$ обусловитъ въ ψ_2''

движеніе, видъ котораго опредѣлится по уравненію (14) полагая въ немъ $\alpha = -2k$, $\beta = 0$; откуда $\sigma = n^2$, $\sigma_1 = 0$ и искомое движеніе есть

$$-\frac{bv_1^2}{2n_1^2 n^2} e^{-2kt}.$$

Чтобы получить видъ движенія обусловливаемаго въ ψ_2'' фиктивною внѣшнею силою, представляемою вторымъ членомъ выраженія (30) т. е. $\frac{bv_1^2}{2n_1^2} e^{-2kt} \cos 2n_1 t$, мы полагаемъ въ уравненіи (14) $\alpha = -2k$, $\beta = 2n_1$, откуда $\sigma = n^2 - 4n_1^2$, $\sigma_1 = -4kn_1$. Получаемое движеніе вмѣстѣ съ вышенайденнымъ представляется формулой:

$$\psi_2'' = \frac{-bv_1^2}{2n_1^2} e^{-2kt} \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{(n^2 - 4n_1^2)\cos 2n_1 t - 4kn_1 \sin 2n_1 t}{(n^2 - 4n_1^2)^2 + 16k^2 n_1^2} \right\} \dots \quad (31)$$

Замѣтимъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ σ не обращается въ нуль при $k=0$, а потому мы можемъ непосредственно переходить отъ приведенныхъ выраженій къ тѣмъ, которыя должны существовать для системы безъ тренія: они будутъ содержать тѣже члены только съ $k=0$. Выраженіе (31) показываетъ, что естественное колебаніе системы будетъ содержать не только движеніе извѣстнаго намъ періода $\frac{2\pi}{n_1}$, но еще и періода $\frac{2\pi}{2n_1}$. т. е. октавою выше. Разсматривая слѣдующія уравненія изъ группы (27), видимъ что къ естественнымъ тонамъ*) системы будетъ принадлежать рядъ гармоническихъ тоновъ съ числами колебаній пропорціональными hn_1, гдѣ h есть цѣлое число. Естественные тоны $\frac{2\pi}{n_1}$ и $\frac{2\pi}{n}$

*) Слово тонъ употреблено нами для удобства выраженія.

въ отличіе отъ остальныхъ, даваемыхъ системой, мы назовемъ основными естественными тонами; остальные — обертонами.

Непеpiодическiй членъ, входящiй въ выраженiе (31), опредѣляетъ положенiе около котораго совершается перiодическое движенiе матерiяльной точки. Если мы, слѣдуя St. Vénant, перенесемъ наши выводы на систему, состоящую изъ двухъ матерiяльныхъ точекъ—одной неподвижной и другой подвижной, то неперiодическiй членъ выраженiя (31), т. е.

$$-\frac{bv_0^2}{2n_1^2n^2}e^{-2kt} \tag{32}$$

представитъ, для отрицательнаго b, увеличенiе разстоянiя между обѣими точками, послѣ того какъ вторая пришла въ колебательное состоянiе. Удлинненiе происходящее отъ колебательнаго состоянiя системы, въ отличiе отъ растяженiя производимаго внѣшней силой, мы назовемъ *расширенiемъ*. St. Vénant проводитъ аналогiю между этимъ расширенiемъ и тѣмъ, которое производится въ тѣлахъ движенiемъ тепловымъ. Такимъ образомъ, по мнѣнiю St. Vénant, зависимость внутреннихъ силъ отъ высшихъ степеней перемѣщенiй объясняетъ измѣненiе объема тѣла, послѣ того какъ его частицы пришли въ колебательное состоянiе, а слѣдовательно и расширенiе тѣлъ отъ теплоты, если послѣднюю будемъ разсматривать какъ перiодическое движенiе. Убыванiе амплитуды этого движенiя съ временемъ соотвѣтствовало бы охлажденiю тѣла.

Обращая вниманiе на то обстоятельство, что расширенiе (32) существуетъ пока b отлично отъ нуля, что имѣетъ мѣсто, по приведенному выше анализу выраженiя (24), только для поверхности изотропныхъ тѣлъ, мы можемъ вывести одно заключенiе: *когда частицы тѣла приходятъ въ колебательное состоянiе, поверхностные слои его измѣняютъ свою плотность.* Точно также: *колебательное состоянiе молекулы соединено съ измѣненiемъ ея объема.*

Распространяя выводы, получаемые изъ разсмотрѣнія движенія системы съ одною степенью свободы на движенія, происходящія внутри изотропныхъ и симметричныхъ тѣлъ, мы должны принимать $b=0$, и потому взглядъ St. Venant'а на выраженіе (32) долженъ быть оставленъ. Можно искать тепловое расширеніе въ непеaріодическихъ членахъ, входящихъ въ интегралъ ψ_3 третьяго изъ уравненій (27) и въ интегралы послѣдующихъ уравненій, принявъ, предварительно, всѣ коэфиціенты при четныхъ степеняхъ ψ въ выраженіи (25) равными нулю. Полагая $b=0$, третье уравненіе представитъ движеніе подъ дѣйствіемъ внѣшней фиктивной силы $c\psi_1{}^3$ или

$$-\frac{cv_0^3}{n_1^3}e^{-3kt}\sin^3 n_1 t; \tag{33}$$

это выраженіе не даетъ неперіодическаго члена. Не разбирая будутъ ли правыя части послѣдующихъ уравненій содержать члены неперіодическіе, замѣтимъ что ихъ интегралы будутъ имѣть амплитуды пропорціональныя v_0 въ степени выше 3-ей, т. е. амплитуды не пропорціональныя v_0^2 или начальной живой силѣ, сообщенной системѣ. Разсматривая теплоту какъ родъ описываемыхъ здѣсь движеній, количество тепла сообщаемаго тѣлу должно быть принимаемо пропорціональнымъ начальной живой силѣ, т. е. v_0^2; поэтому тепловое расширеніе тѣлъ должно мало уклоняться отъ пропорціональности v_0^2. Это обстоятельство представляло сильный доводъ въ пользу мнѣнія, составленнаго St. Vénant'омъ о выраженіи (32), и представляетъ доводъ столь же убѣдительный противъ допущенія, что неперіодическіе члены, которые могли бы встрѣтиться въ интегралахъ уравненій (27), начиная съ четвертаго, будучи пропорціональны v_0^4, v_0^5, и пр. могли бы быть пріурочиваемы расширенію, производимому тепловымъ движеніемъ.

Перейдемъ теперь къ случаю, когда внѣшнія силы V существуютъ, при чемъ

$$V = N \sin \beta t. \tag{34}$$

Тогда къ движенію (29) прибавится другое, обусловливаемое внѣшнею силою. Мы найдемъ его, полагая въ (15): $\alpha = 0$, $\sigma = n^2 - \beta^2$, $\sigma_1 = 2\beta k$. Такимъ образомъ все движеніе ψ_1 представится выраженіемъ:

$$\psi_1 = \frac{A}{n_1} e^{-kt} \sin(n_1 t + \alpha) + N \frac{(n^2 - \beta^2) \sin \beta t - 2\beta k \cos \beta t}{(n^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2 k^2}, \tag{35}$$

гдѣ произвольныя постоянныя A и α опредѣляются по начальнымъ условіямъ.

Полагая

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{2\beta k}{n^2 - \beta^2}, \quad (n^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2 k^2 = a^2, \tag{36}$$

находимъ:

$$\psi_1 = \frac{A}{n_1} e^{-kt} \sin(n_1 t + \alpha) + \frac{N}{a} \sin(\beta t - \varepsilon) \tag{37}$$

Внося эту величину въ правую часть второго изъ ур. (27), оно представитъ движеніе подъ дѣйствіемъ фиктивной внѣшней силы:

$$-b\left\{\frac{A^2}{n_1^2} e^{-2kt} \sin^2(n_1 t + \alpha) + \frac{2NA}{n_1 a} e^{-kt} \sin(n_1 t + \alpha) \sin(\beta t - \varepsilon) + \frac{N^2}{a^2} \sin^2(\beta t - \varepsilon)\right\},$$

или

$$-\frac{b}{2}\left\{\frac{A^2}{n_1^2} e^{-2kt} (1 - \cos(2n_1 t + 2\alpha)) + \frac{N^2}{a^2}(1 - \cos 2(\beta t - 2\varepsilon))\right\} \tag{38}$$

$$-\frac{NbA}{n_1 a} e^{-kt} \left\{\cos([\beta - n_1]t - \varepsilon - \alpha) - \cos([\beta + n_1]t - \varepsilon + \alpha)\right\}$$

Способы отысканія движенія при этихъ условіяхъ изложены уже выше; воспользуемся ими.

Выраженіе (38) показываетъ намъ, что ψ_2'' будетъ содержать: 1) расширеніе убывающее съ временемъ и подобное

разсмотрѣнному ранѣе; 2) растяженіе, обусловливаемое постоянной силой, независящее отъ времени и равное $\frac{N^2b}{2a^2n^2}$; 3) гармоническія демфированныя движенія изъ коихъ одно представляетъ тонъ октавою выше основнаго естественнаго тона системы; два другія движенія представляютъ разностный и суммовой комбинаціонные тоны, составленные изъ тона періодической силы и основнаго естественнаго тона системы; наконецъ гармоническое движеніе октавою выше періодической силы.

Мы уже знаемъ, что члены съ амплитудой пропорціональной времени t появятся въ выраженіи ψ_2'' когда нѣкоторыя изъ внѣшнихъ силъ (38), въ данномъ случаѣ фиктивныхъ, будутъ имѣть періодъ равный основному естественному періоду системы, при чемъ коэффиціентъ α при t въ факторѣ $e^{\alpha t}$ амплитуды силы будетъ равенъ $-k$. Указаннымъ условіямъ удовлетворяетъ періодическая сила съ $\beta = 2n_1$, которая даетъ въ выраженіи (38) фиктивную періодическую силу $\frac{NbA}{n_1 a} e^{-kt} \cos(n_1 t - \varepsilon - \alpha)$, находящуюся въ униссонѣ съ основнымъ тономъ системы.

И такъ въ несимметрической системѣ съ треніемъ неполная абсорбція имѣетъ мѣсто въ ранѣе изслѣдованномъ движеніи ψ_1, когда періодическая сила находится въ униссонѣ съ основнымъ естественнымъ тономъ системы, и въ движеніи ψ_2, когда тонъ періодической силы октавою выше основнаго естественнаго тона системы. Въ послѣднемъ случаѣ абсорбирующее движеніе не можетъ быть названо созвучіемъ, ибо его тонъ есть основный естественный тонъ, между тѣмъ какъ тонъ силы, его вызвавшей, октавою выше.

Для системы безъ тренія, т. е. при $k=0$ абсорбція становится полной и происходитъ при только что указанныхъ условіяхъ и еще при $\beta=\frac{n}{2}$, такъ какъ при этомъ въ выра-

женіи (38) появится фиктивная сила $\cos(2\beta t-2\varepsilon)=\cos(nt-2\varepsilon)$ находящаяся въ униссонѣ съ основнымъ естественнымъ тономъ. И такъ здѣсь абсорбція еще вызывается силою, имѣющею тонъ октавою ниже основнаго естественнаго тона. Соотвѣтственное движеніе, имѣя періодъ одинаковый съ основнымъ естественнымъ, тоже не можетъ быть названо движеніемъ по созвучію. Абсорбція въ высшей и низсшей октавѣ значительно слабѣе абсорбціи по созвучію.

Для наглядности приложимъ полученный результатъ къ свѣтовому явленію. Остановимъ наше вниманіе на блестящей линіи *n* въ спектрѣ раскаленныхъ паровъ какого нибудь тѣла. Если молекулы такого пара несимметричны, то разсматривая спектръ пропущеннаго черезъ него солнечнаго луча, въ *видимой* части мы замѣтимъ только одну абсорбціонную линію, соотвѣтствующую линіи *n*; кромѣ этой линіи должны существовать еще двѣ другія, соотвѣтствующія высшей и низсшей октавѣ, но обѣ эти линіи не будутъ уже лежать въ видимомъ спектрѣ, а одна въ ультрафіолетовой, а другая въ ультракрасной его части, потому что крайніе лучи видимаго спектра разнятся менѣе чѣмъ на октаву; эти двѣ линіи не существуютъ въ спектрѣ лучеиспускаемомъ паромъ. Если бы мы имѣли растворъ тѣла съ несимметричными молекулами, то каждой абсорбціонной полосѣ въ видимомъ спектрѣ могли бы соотвѣтствовать или одна въ ультрафіолетовой и одна въ ультракрасной части, или двѣ въ ультрафіолетовой, или двѣ въ ультракрасной; только въ первомъ случаѣ видимая абсорбціонная полоса соотвѣтствовала бы естественнымъ колебаніямъ молекулъ раствореннаго тѣла; во второмъ случаѣ естественнымъ колебаніямъ соотвѣтствовала бы абсорбціонная полоса въ ультрафіолетовомъ концѣ, лежащая ближе къ видимой части спектра и подобное же въ третьемъ случаѣ.

Разсмотримъ теперь дѣйствіе постоянной силы. Она обусловитъ постоянный членъ въ выраженіи ψ_1, вслѣдствіе чего

въ уравненіе движенія ψ_2 войдетъ внѣшняя фиктивная сила, пропорціональная $e^{-kt}\sin n_1 t$, если треніе есть и $\sin nt$ если тренія нѣтъ.

Слѣдовательно постоянная сила, обусловливающая въ движеніи ψ_1 только растяженіе, въ движеніи ψ_2 дастъ членъ пропорціональный $t\sin nt$ или $te^{-kt}\sin n_1 t$ и будетъ усиливать естественныя колебанія системы. И такъ: *несимметричная система обладаетъ тѣмъ характернымъ свойствомъ, что внѣшняя постоянная сила и, вообще, растяженіе увеличиваютъ энергію естественныхъ колебаній системы. Эта система является поглощающею энергію не только изъ работы силъ, находящихся съ нею въ униссонѣ, или октавою ниже или выше, но и изъ работы, затрачиваемой внѣшними постоянными силами, дѣйствующими на систему.*

Внѣшняя періодическая сила, находящаяся въ униссонѣ съ несимметричною системою безъ тренія, обусловливаетъ въ ψ_1, какъ мы знаемъ, движеніе абсорбирующее съ амплитудою пропорціональною $t\sin nt$. Этотъ членъ по отношенію къ ψ_2 явится фиктивною внѣшнею силою $t^2\sin^2 nt$ или $\frac{t^2}{2}(1-\cos 2nt)$. Часть пропорціональная t^2 введетъ въ ψ_2'' выраженіе

$$at^2+c;$$

первый членъ представляетъ движеніе, подчиненное тому же закону какъ и движеніе точки подъ дѣйствіемъ силы постоянной по величинѣ и направленію: это движеніе соединено съ сильной абсорбціей.

Ломмель, въ своей теоріи флуоресценціи и абсорбціи*), представляетъ внутреннюю силу, дѣйствующую на атомъ мо-

---

*) *E. Lommel.* Theorie der Absorption und Fluorescenz. Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie. Bd. III p. 251 1878 г.

лекулы, выраженіемъ подобнымъ (24). При этомъ онъ полагаетъ, что имъ не вносится никакой новой гипотезы, напротивъ того выраженіе внутренней силы, принимавшееся обыкновенно пропорціональнымъ первой степени перемѣщенія, освобождается отъ ненужнаго ограниченія. Благодаря болѣе общему виду внутренней силы получаются для абсорбціи молекулы приведенные выше результаты. Ломмель не обращаетъ при этомъ вниманія на то обстоятельство, что выводы, обусловленные присутствіемъ члена второго порядка въ выраженіи силы, имѣютъ мѣсто если молекула можетъ быть разсматриваема какъ система несимметричная; такимъ образомъ въ разсужденіе вводится не одно обобщеніе выраженія силы, но совершенно новая гипотеза. Допуская эту гипотезу, мы должны распространить на молекулы и другія, изложенныя здѣсь свойства несимметричной системы. Предположеніе о томъ что молекула есть система несимметричная, представляется весьма вѣроятнымъ, обращая вниманіе на то обстоятельство, что силы дѣйствующія между атомами должны быстро измѣняться съ измѣненіемъ ихъ взаимныхъ разстояній: при этомъ въ системѣ, состоящей изъ ограниченнаго числа матеріяльныхъ точекъ, неравныя приращенія силы при движеніи точки въ двухъ противуположныхъ направленіяхъ болѣе вѣроятны, чѣмъ равныя.

Въ примѣненіи къ средѣ несимметричной, заслуживали бы вниманія заключенія, вытекающія изъ доказаннаго выше усиленія ея колебательнаго состоянія подъ дѣйствіемъ постоянной силы или, вообще, при ея растяженіи и сжатіи. Напряженіе колебательнаго состоянія среды, описывающей траекторію въ полѣ дѣйствія консервативной силы, увеличивается съ приближеніемъ среды къ мѣстамъ дѣйствія большей силы, и ослабляется съ удаленіемъ отъ этихъ мѣстъ; если среда отдаетъ энергію своего колебательнаго состоянія т. е. лучеиспускаетъ, то лучеиспусканіе будетъ наиболѣе силь-

нымъ во время прохожденія мѣстъ наибольшаго дѣйствія силы; въ другихъ частяхъ траэкторіи лучеиспусканіе будетъ слабѣе. Если центръ консервативной силы окруженъ средою, напряженіе ея колебательнаго состоянія и лучеиспусканіе будетъ сильнѣе вблизи центра силы и слабѣе въ частяхъ болѣе удаленныхъ. Всякое сотрясеніе среды вызоветъ въ частяхъ ближайшихъ къ центру силы лучеиспусканіе большаго напряженія чѣмъ въ частяхъ удаленныхъ. Эти заключенія, послѣ болѣе обстоятельнаго изслѣдованія, послужили бы, можетъ быть, къ объясненію нѣкоторыхъ космическихъ явленій.

Обращаясь къ изложенному выше, мы должны очевидно дѣлать различіе между *абсорбціей молекулярной*, т. е. обусловливаемой движеніями атомовъ внутри молекулы, отъ абсорбціи *межмолекулярной*, т. е. обусловливаемой колебаніями самихъ молекулъ.

Мы закончимъ настоящій параграфъ разсмотрѣніемъ случая, когда на несимметричную систему дѣйствуютъ двѣ силы двухъ различныхъ періодовъ

$$A\cos(pt+\varepsilon_1)+B\cos(qt+\varepsilon_2)$$

Движеніе съ этими же періодами получится и въ ψ_1. Соотвѣтственные члены дадутъ для движенія ψ_2 фиктивныя внѣшнія силы съ періодами $\frac{2\pi}{2p}$, $\frac{2\pi}{2q}$, $\frac{2\pi}{q-p}$, $\frac{2\pi}{q+p}$, а слѣдовательно и движенія съ такими же періодами. На этомъ обстоятельствѣ основана гипотеза высказанная Гельмгольцемъ о происхожденіи *комбинаціонныхъ тоновъ* въ томъ случаѣ, когда они не существуютъ внѣ человѣческаго уха. Барабанная перепонка, какъ указано выше, представляетъ несимметричную систему; поэтому два раздѣльныхъ тона съ числами колебаній пропорціональными q и p, достигая барабанной перепонки, сообщаютъ ей періодическія движенія съ числомъ колебаній пропор-

ціональнымъ $q-p$ и $q+p$; эти колебанія передаются во внутреннее ухо и ощущаются нами какъ два новыхъ раздѣльныхъ тона; эти тоны называются комбинаціонными тонами— разностными и суммовыми (подробнѣе см. Helmholtz l. c.).

§ 4. Укажемъ способъ отысканія количества энергіи поглощаемой или лучеиспускаемой системой.

Полная энергія системы представляется суммою ея потенціяльной и кинетической энергій

$$T+W,$$

вычисленной для даннаго момента t. Измѣненіе этой суммы съ временемъ, отнесенное къ единицѣ времени, т. е.

$$\frac{d}{dt}(T+W)$$

служитъ, для даннаго момента, мѣрою абсорбціи энергіи извнѣ, если эта производная положительна, и мѣрою лучеиспусканія если она отрицательна.

Подставляя величину T (1) въ уравненіе движенія системы съ треніемъ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{\psi}}\right)+\frac{dW}{d\psi}=\Phi-2a\dot{\psi},$$

получаемъ:

$$m\ddot{\psi}+\frac{dW}{d\psi}=\Phi-2a\dot{\psi}.$$

Умножая на $\dot{\psi}$, замѣняя Φ черезъ $m\ V$ (см. ур. (8)), находимъ:

$$\frac{d}{dt}(T+W)=mV\dot{\psi}-2a\dot{\psi}^2.$$

Называя черезъ A абсорбцію для даннаго момента времени, т. е. полагая

$$A = mV\psi - 2a\psi^2,$$

мы составимъ интегралъ

$$J = \int_0^t A dt.$$

Если этотъ интегралъ равенъ нулю для всякаго t, или же съ возрастаніемъ верхняго предѣла колеблется около нѣкотораго конечнаго значенія, которое можетъ быть и нулемъ, то система или сохраняетъ неизмѣнное количество энергіи, или, послѣ нѣкотораго поглощенія, абсорбируетъ и лучеиспускаетъ энергію въ равныхъ количествахъ: обращая вниманіе на конечный процессъ, мы скажемъ что въ этомъ случаѣ система не абсорбируетъ и не лучеиспускаетъ энергіи. Если же интегралъ J возрастаетъ съ временемъ или приближается къ конечному предѣльному значенію, мы скажемъ, смотря по знаку интеграла, что система абсорбируетъ или же лучеиспускаетъ энергію.

Когда на систему не дѣйствуютъ ни внѣшнія силы, ни треніе, т. е. $a = 0$, $V = 0$, то и $A = 0$: абсорбціи нѣтъ.

Если $V = 0$, но треніе есть, то

$$J = -2a \int_0^t \psi^2 dt;$$

мы видимъ что система постоянно отдаетъ энергію, ибо правая часть предъидущаго выраженія существенно отрицательна. Отдача приближается къ нѣкоторой предѣльной величинѣ съ прохожденіемъ или безъ прохожденія нѣсколькихъ уменьшающихся максимумовъ и минимумовъ. Сюда относятся случаи (a), (b), (c) § 1 и движеніе $\psi_1 + \psi_2$, составленное по формуламъ (29) и (31) § 3.

Для движеній, названныхъ нами *абсорбирующими*, интегралъ J будетъ положительнымъ и возрастаетъ до нѣкотораго максимума при абсорбціи неполной и затѣмъ падаетъ; для полной же абсорбціи возрастаніе интеграла безпредѣльно. Если

движеніе системы не есть абсорбирующее, т. е. не совершается съ періодомъ равнымъ естественному періоду, и періодъ внѣшней силы V отличенъ отъ естественнаго періода системы, то J не возрастаетъ безпредѣльно съ временемъ, не стремится къ нѣкоторому предѣльному значенію, слѣдовательно система не абсорбируетъ энергіи.

Разсмотримъ для примѣра систему безъ тренія, находящуюся подъ дѣйствіемъ періодической силы

$$V = M\cos\beta t + N\sin\beta t.$$

Полагая въ ур. (14) и (15) $\alpha = 0$, $k = 0$, $\sigma = n^2 - \beta^2$, мы находимъ общій интегралъ.

$$\psi = A\sin(nt + \varepsilon) + \frac{\sqrt{M^2 + N^2}}{\sigma}\cos(\beta t - \theta)$$

гдѣ

$$\tang\theta = \frac{N}{M}.$$

Отсюда

$$J = m\sqrt{M^2+N^2}\int_0^t \cos(\beta t - \theta)\left\{nA\cos(nt+\varepsilon) - \beta\frac{\sqrt{M^2+N^2}}{\sigma}\sin(\beta t - \theta)\right\}dt$$

или J будетъ равно:

$$nmA\sqrt{M^2+N^2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin[(\beta+n)t - (\theta-\varepsilon)] + \sin(\theta-\varepsilon)}{2(\beta+n)} \\ + \dfrac{\sin[(\beta-n)t - (\theta+\varepsilon)] + \sin(\theta+\varepsilon)}{2(\beta-n)}\end{array}\right\}$$

$$+ \frac{m(M^2+N^2)}{2\sigma}\{\cos 2(\beta t - \theta) - \cos 2\theta\}$$

это выраженіе даетъ для J величины, колеблющіяся около нѣкоторой средней въ ту или другую сторону по мѣрѣ возрастанія времени t, если β не равно n.

Мы сочли нелишнимъ изложить здѣсь способъ, дающій возможность опредѣлять поглощательную способность системы, такъ какъ въ этомъ направленіи встрѣчаются сужденія неправильныя *).

---

*) Напр. у Ломмеля l. c. p. 258 для только что разобраннаго случая, съ *присоединеніемъ* силъ тренія, получается поглощеніе энергіи, возрастающее пропорціонально времени—результатъ неточный и происшедшій отъ неправильнаго выбора критерія для абсорбціи.

Непосредственныя примѣненія солнечной теплоты.

(Инсолаторы)

Проф. В. Н. Лигина.

Въ обширномъ смыслѣ, всѣ двигатели, которыми пользуются въ промышленности, порождаются солнечной радіаціей. Теченія и паденія водъ въ рѣкахъ, движущія гидравлическія машины, и воздушныя теченія, вращающія вѣтряные пріемники, происходятъ отъ разнообразныхъ дѣйствій солнечной теплоты. Топливо, питающее паровыя и другія термическія машины, есть продуктъ химическихъ разложеній, вызванныхъ въ растительномъ царствѣ лучистой энергіей солнца. Животный организмъ, разсматривая его какъ механическій двигатель, есть своего рода термическая машина, расходующая топливо въ видѣ органической пищи, образованной подъ вліяніемъ тѣхъ-же лучей. Такимъ образомъ солнечная радіація является конечнымъ источникомъ всей энергіи, которую, подъ разнообразными формами, расходуетъ наша промышленность.

Но во всѣхъ этихъ случаяхъ дѣйствіемъ солнечныхъ лучей пользуются *косвенно*, утилизируя энергію, сообщенную ими, путемъ болѣе или менѣе сложныхъ превращеній, массамъ воды или воздуха и представителямъ органической жизни. Съ давнихъ поръ останавливались на вопросѣ,—нельзя-ли этимъ начальнымъ источникомъ энергіи, вызывающимъ посредственно чуть-ли не всѣ движенія на нашей планетѣ, воспользоваться *прямо*, воспринимая какимъ нибудь особеннымъ приборомъ теп-

ловую радіацію солнца подобно тому, какъ водяное колесо или вѣтряная мельница воспринимаютъ непосредственно энергію водяного потока или воздушнаго теченія?

Многочисленные опыты, сдѣланные физиками для измѣренія тепловой напряженности солнечной радіаціи у земной поверхности, позволяютъ принять приближенно, что площадь, равная одному квадратному метру и перпендикулярная къ солнечнымъ лучамъ, получаетъ въ среднемъ около 10 единицъ теплоты въ минуту, или 600 такихъ единицъ въ часъ. Но изъ механической теоріи теплоты извѣстно, что каждая тепловая единица способна произвести механическую работу въ 424 килограмметра. Изъ сопоставленія этихъ чиселъ слѣдуетъ, что количество солнечной теплоты, падающей отвѣсно на площадь въ 1 квадр. метръ, могло-бы, если-бы оно все было превращено въ механическую работу, доставить работу, равную почти одной паровой лошади (75 килограмметровъ въ секунду). Конечно, никогда не удастся достигнуть полнаго превращенія всей получаемой теплоты въ работу. Но результатъ приведеннаго теоретическаго разсчета такъ значителенъ, что онъ не оставляетъ никакого сомнѣнія относительно практической важности поставленнаго выше вопроса о непосредственной утилизаціи тепловой энергіи, проливаемой солнцемъ на поверхность земли.

Для рѣшенія этого вопроса было издавна сдѣлано много различныхъ попытокъ; но всѣ онѣ не имѣли серьезнаго практическаго значенія [1]). Только въ послѣднія два десятилѣтія

[1]) Чтобы не расширять чрезмѣрно предѣлы настоящаго очерка, мы должны пройти молчаніемъ различныя попытки, сдѣланныя многими предшественниками и частью современниками Мушо для прямой утилизаціи солнечной теплоты. Обстоятельное изложеніе всѣхъ этихъ изслѣдованій читатель найдетъ въ сочиненіи Mouchot «La chaleur solaire et ses applications industrielles». Приводимъ здѣсь только слѣдующій краткій хронологическій перечень.

212 до Р. Х.—Архимедъ сжигаетъ, съ помощью зеркалъ, римскій флотъ, осаждающій Сиракузы.

100 до Р. Х. — Геронъ Александрійскій строитъ солнечный фонтанъ.

непосредственные пріемники солнечной теплоты или *инсоляторы* (какъ ихъ стали называть въ самое недавнее время) достигли, благодаря настойчивымъ изслѣдованіямъ французскаго ученаго Мушо (Mouchot), такихъ усовершенствованій, что пригодность ихъ для практическихъ цѣлей въ извѣстныхъ условіяхъ едва-ли можетъ подлежать сомнѣнію.

Посвящая этимъ приборамъ настоящій очеркъ, мы, кромѣ общаго интереса, какой можетъ представлять новое изобрѣтеніе, имѣли въ виду и то обстоятельство, что болѣе близкое знакомство съ свойствами инсоляторовъ могло-бы содѣйствовать разрѣшенію вопроса о степени практической примѣнимости ихъ въ нѣкоторыхъ частяхъ нашего отечества.

Изслѣдованія Мушо надъ пріемниками солнечной теплоты начались съ 1860 года и продолжались двадцать лѣтъ почти

1551. — Адамъ Лонисеръ предлагаетъ способъ перегонки посредствомъ солнечной теплоты.

1620.—Саломонъ де-Ко изобрѣтаетъ солнечную машину.

1640.—Мартини изобрѣтаетъ часы, движимые солнечной теплотой.

1662.—Вильетъ сосредоточиваетъ солнечные лучи помощью большого зеркала.

1670.—Кирхеръ изобрѣтаетъ часы, движимые дѣйствіемъ солнечныхъ лучей.

1747. — Бюффонъ посредствомъ зеркалъ воспламеняетъ доски на разстояніи 68 метровъ.

1767.—Соссюръ достигаетъ значительнаго нагрѣванія, окружая выставленныя на солнце тѣла стеклянными оболочками, и строитъ свой геліотермометръ.

1780.—Дюкарла строитъ солнечную печь.

1784.—Ла-Клишъ предлагаетъ пользоваться солнцемъ какъ движущей силой.

1834.—Джонъ Гершель повторяетъ опыты Соссюра и пользуется солнечной теплотой для приготовленія кушаній.

1847.—Франшо строитъ солнечный пріемникъ съ цилиндрическимъ рефлекторомъ.

1849.—Андро строитъ свои солнечныя печи.

1865.—Деліанкуръ строитъ солнечный насосъ.

1868.—Эриксонъ приводитъ въ дѣйствіе солнечной теплотой паровую и воздушную машину.

непрерывно. Мы не станемъ слѣдовать за изобрѣтателемъ по всему торному пути постепенныхъ усовершенствованій задуманнаго прибора, а остановимся прямо на выработанныхъ имъ основныхъ положеніяхъ, изъ сочетанія которыхъ получился современный инсолаторъ.

Если какое-нибудь тѣло, принадлежащее къ хорошимъ проводникамъ теплоты и имѣющее при незначительной толщинѣ большую поверхность нагрѣва или инсоляціи, напримѣръ тонкій листъ мѣди, покрыть слоемъ сажи, съ цѣлью увеличить способность поглощенія тепла, и выставить этотъ листъ на солнце такъ, чтобы солнечные лучи падали на него отвѣсно, то температура листа сначала довольно быстро повышается, но затѣмъ останавливается на нѣкоторомъ предѣлѣ, значительно низшемъ, чѣмъ точка кипѣнія воды. Эта остановка въ нагрѣваніи происходитъ отъ того, что листъ не сохраняетъ всей поглощаемой имъ теплоты, а теряетъ большую ея часть, вслѣдствіе лучеиспусканія въ наружное пространство и соприкосновенія съ окружающимъ воздухомъ и тѣлами, на которыхъ покоится листъ. Но если тотъ-же листъ помѣстить на дурной проводникъ теплоты, напримѣръ—положить его въ деревянный, открытый сверху ящикъ и покрыть этотъ ящикъ тонкой пластинкой чистаго стекла, то температура листа поднимется значительно выше и можетъ даже перейти за точку кипѣнія воды. Главную роль играетъ въ этомъ опытѣ наложенная на ящикъ стеклянная пластинка. Она, во первыхъ, прекращаетъ происходившую прежде безпрерывно замѣну прилегающаго къ листу и нагрѣтаго имъ слоя воздуха новымъ холоднымъ слоемъ; во вторыхъ, по особенному свойству стекла, эта пластинка, пропуская съ большою легкостью извнѣ *свѣтлые* тепловые лучи, въ то-же время не даетъ прохода наружу *темнымъ* тепловымъ лучамъ, испускаемымъ почерненнымъ мѣднымъ листомъ, передавая лишь весьма медленно эту внутреннюю теплоту наружному воздуху путемъ проводности. Такимъ

образомъ стекло здѣсь играетъ роль сберегателя солнечной теплоты, свободно пропускающаго ее въ ящикъ, но преграждающаго ей выходъ изъ этого пространства.

Это замѣчательное свойство стекла послужило исходной точкой изслѣдованій Мушо. Оно было замѣчено очень давно, вѣроятно, вслѣдъ за изобрѣтеніемъ стекла, которое, по свидѣтельству Страбона, восходитъ по меньшей мѣрѣ до Египтянъ; ибо на этомъ свойствѣ основано столь-же древнее употребленіе стеклянныхъ рамъ въ домахъ и парникахъ [1]).

Только-что сказанное приводитъ насъ къ первому положенію относительно устройства инсолатора: въ этихъ приборахъ *нагрѣваемое тѣло, въ которое скопляютъ солнечную теплоту, должно быть заключено въ стеклянную оболочку.* Стекло должно быть чистое, бѣлое и не слишкомъ толстое, такъ какъ число пропускаемыхъ лучей замѣтно убываетъ съ увеличеніемъ его толщины.

Кромѣ стеклянныхъ листовъ и оболочекъ, съ давнихъ поръ пользовались еще двумя другими средствами для прямой утилизаціи солнечной теплоты, сосредоточивая послѣднюю помощью собирательныхъ зеркалъ или собирательныхъ стеколъ.

Кому не извѣстенъ разсказъ о томъ, какъ Архимедъ сжегъ римскій флотъ, осаждавшій Сиракузы, наведя на корабли систему зажигательныхъ зеркалъ. Правда, что возможность

---

[1]) Возможность значительно усиливать нагрѣваніе тѣлъ солнечными лучами посредствомъ стеклянныхъ оболочекъ доказалъ еще Соссюръ слѣдующимъ простымъ опытомъ: взявъ пять стеклянныхъ прямоугольныхъ ящиковъ разныхъ размѣровъ и вложивъ эти ящики одинъ въ другой, такъ, чтобы между ихъ стѣнками оставались небольшіе промежутки, въ которые были введены термометры, онъ замѣтилъ, что солнечные лучи, падающіе на такой приборъ, поднимаютъ столбъ термометра, находящагося между двумя меньшими, внутренними, ящиками, до 87°5 Ц. Принявъ затѣмъ еще нѣкоторыя предосторожности для устраненія охлажденія, Соссюру удалось довести температуру до 110° Ц.—Гершель, производя подобные-же опыты у мыса Доброй Надежды въ 1834 году только съ двумя стеклянными оболочками, достигалъ поднятія термометра до 97°, 103° и даже, въ одномъ исключительномъ случаѣ, 116° Ц.

этого факта долгое время подвергалась сомнѣнію, которое поддерживалось даже такими авторитетами, какъ Кеплеръ, Декартъ и Монжъ; но опыты Бюффона[1]) и вычисленія Пейрара[2]) окончательно доказали возможность подвига, приписываемаго Архимеду. Исторіи извѣстенъ впрочемъ примѣръ еще болѣе древняго примѣненія зажигательныхъ зеркалъ. Въ Италіи, еще до основанія Рима, жрецы культа Весты, когда случайно потухалъ священный огонь, поддерживаемый весталками на алтарѣ этой богини, возобновляли его нерукотворно, собирая теплоту солнца помощью полированныхъ металлическихъ зеркалъ. У Плутарха встрѣчается даже описаніе этихъ рефлекторовъ, изъ котораго съ большой вѣроятностью можно заключить, что они имѣли форму конуса, происходящаго отъ обращенія равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника около одного изъ катетовъ, т. е. конуса, котораго образующая составляетъ уголъ въ 45° съ осью. Достойно вниманія, что именно эту форму собирательныхъ зеркалъ, оставленную безъ употребленія около двухъ тысячъ лѣтъ, примѣнилъ въ недавнее время

---

[1]) Приборъ, построенный Бюффономъ, представлялъ сложное зеркало, состоящее изъ 360 небольшихъ стеклянныхъ зеркалъ, которыя держались въ общей прямоугольной оправѣ шириной 2, 27 метр. и вышиной 2, 60 метр. Каждое малое зеркало, высотой 16 сантим. и шириной 22 сантим., имѣло кромѣ того свою оправу, такъ что могло отдѣльно обращаться во всѣ стороны и отдѣлялось отъ сосѣднихъ промежутками въ 1 сантим. Нужно было около получаса, чтобы привести въ совпаденіе всѣ отраженныя изображенія, но приборъ разъ установленный могъ служить неопредѣленное время, пока не было надобности измѣнять фокуснаго разстоянія. Размѣры фокуса мѣнялись съ его разстояніемъ отъ зеркала; на разстояніи 16 метр. онъ имѣлъ въ діаметрѣ около 16 сантим., на разстояніи 48 метр.—около 43 сантим. 10 апрѣля 1747 г., 128 зеркалъ зажгли смоленную сосновую доску на разстояніи 48 метр., при чемъ воспламененіе послѣдовало внезапно и на всемъ протяженіи фокуса. На разстояніи 68 метр. загоралось дерево, а на разстояніи 8,10 и 13 метр. плавились металлы. См. Buffon, Introduction à l'histoire des minéraux (6-me mémoire).

[2]) По вычисленіямъ Пейрара, система изъ 590 зеркалъ высотой въ 0,5 метр., направляемая 60 человѣками, можетъ зажечь флотъ на разстояніи 1 километра.

Тиндаль для сосредоточенія слабыхъ лучей лунной теплоты[1]), а по его примѣру, какъ мы скоро увидимъ, и Мушо—для солнечныхъ пріемниковъ.

Такъ какъ цѣль инсоляторовъ заключается въ скопленіи на данномъ протяженіи возможно большаго количества солнечной теплоты, то къ дѣйствію стеклянной оболочки важно присоединить еще дѣйствіе собирательнаго элемента,—зеркала или стекла. Выборъ между этими двумя типами не представляетъ затрудненій. Дѣйствительно, употребленіе собирательнаго стекла имѣло-бы нѣсколько важныхъ неудобствъ: 1) оно сосредоточиваетъ теплоту на очень ограниченномъ пространствѣ, тогда какъ для всѣхъ важнѣйшихъ примѣненій инсолятора, напримѣръ, для нагрѣванія нѣкоторой массы воды, необходимо, чтобы концентрація теплоты происходила на возможно большемъ протяженіи этой массы, чего можно было-бы достигнуть лишь цѣлой системой стеколъ; 2) собирательное стекло, во первыхъ, отражаетъ часть падающихъ на него лучей, а изъ оставшихся еще поглощаетъ тѣмъ большее число, чѣмъ значительнѣе толщина стекла; 3) необходимость помѣщать такое стекло между солнцемъ и нагрѣваемымъ тѣломъ, лишаетъ послѣднее непосредственной инсоляціи, что составляетъ новое неудобство. Съ употребленіемъ собирательнаго зеркала устраняются всѣ эти затрудненія, такъ какъ, избравъ для него извѣстную форму, можно получить гораздо болѣе обширный (линейный) фокусъ, а надлежащимъ выборомъ матеріала для отражательной поверхности легко ослабить потерю лучей въ очень значительной мѣрѣ; наконецъ, затѣненіе нагрѣваемаго предмета устраняется само-собой.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ второму заключенію, что *солнечные лучи должны сосредоточиваться на нагрѣваемый предметъ собирательнымъ зеркаломъ.*

---

[1]) Тиндаль. Теплота, § 662.

Разсмотримъ теперь,—какая форма и какой матеріалъ для отражательной поверхности рефлектора всего лучше удовлетворяютъ нашей задачѣ.

Форма зеркала должна прежде всего быть настолько проста, чтобы его конструкція не представляла практическихъ затрудненій. При этомъ ограниченіи и въ предположеніи, что всѣ падающіе лучи параллельны, какъ это имѣетъ мѣсто для столь отдаленнаго источника радіаціи, какъ солнце, намъ для выбора представляются три типа собирательныхъ зеркалъ: круговое, параболическое и коническое.

Представимъ себѣ дугу круга AB (фиг. 1), которой центръ находится въ C, а средина въ D. На основаніи законовъ отраженія и свойствъ окружности, легко убѣдиться, что, когда дуга AB содержитъ небольшое число градусовъ, всѣ лучи, падающіе параллельно къ прямой CD на вогнутую сторону этой дуги, разсматривая послѣднюю какъ отражающую линію, послѣ отраженія соединятся приблизительно въ одной точкѣ F, лежащей въ срединѣ разстоянія CD. Это замѣчаніе даетъ возможность построить два рода круговыхъ собирательныхъ зеркалъ. Съ одной стороны, если вообразимъ, что дуга DA вращается около прямой DC, то получимъ часть шаровой поверхности,—сферическій сегментъ; давая вогнутому зеркалу форму такого сегмента, это *сферическое* зеркало будетъ, по выше сказанному, отражать въ одну точку F всѣ лучи, падающіе параллельно къ его оси. Съ другой стороны, если представимъ, что прямая линія опредѣленной длины, проведенная изъ точки A перпендикулярно къ плоскости дуги AB, движется, оставаясь постоянно себѣ параллельной и опираясь своимъ основаніемъ на дугу AB, эта прямая опишетъ цилиндрическую поверхность, имѣющую поперечнымъ сѣченіемъ дугу круга, и ясно, что вогнутое *круго-цилиндрическое* зеркало, имѣющее форму такой поверхности, будетъ собирать всѣ лучи, падающіе параллельно къ CD, во всѣ точки прямой, перпен-

дикулярной въ *F* къ плоскости дуги *AB* и имѣющей длину, равную подвижной образующей линіи. Изъ этихъ двухъ рѣшеній только второе можетъ имѣть значеніе для нашей задачи, такъ какъ сферическое зеркало собираетъ отраженные лучи въ одной только точкѣ. Но и второе рѣшеніе непримѣнимо въ большинствѣ случаевъ: упомянутое условіе, чтобы дуга *AB* составляла небольшую часть окружности, необходимо потому, что въ противномъ случаѣ крайніе лучи, падающіе въ концахъ дуги *AB*, соединяются въ другой точкѣ *E*, которой разстояніе отъ *F* возрастаетъ вмѣстѣ съ числомъ градусовъ, заключенныхъ въ дугѣ *AB*. Если радіусъ *CD*, которымъ, очевидно, опредѣляется разстояніе нагрѣваемаго предмета отъ зеркала, не великъ, то, при маломъ числѣ градусовъ дуги *AB*, и самая эта дуга будетъ незначительна, т. е., зеркало будетъ лишь малыхъ размѣровъ, чѣмъ ограничивается число падающихъ и отраженныхъ лучей, а слѣдовательно и производимое нагрѣваніе. Увеличивать же радіусъ *CD* неудобно потому что вмѣстѣ съ этимъ возрастаетъ разстояніе *FD*, а слѣдовательно и путь лучей послѣ отраженія, что, вслѣдствіе охлажденія въ проходимыхъ слояхъ воздуха, ослабляетъ ихъ тепловую напряженность. Такимъ образомъ, круго-цилиндрическое зеркало пригодно лишь для слабыхъ инсоляторовъ.

Этого неудобства можно избѣжать, замѣнивъ дугу круга дугой параболы. На основаніи свойствъ послѣдней кривой легко убѣдиться, что, какова-бы ни была длина взятой нами параболической дуги *AB* (фиг. 2), всѣ лучи, падающіе на вогнутую часть этой дуги параллельно къ оси *DF* параболы, отразятся въ одну и ту же точку, именно въ фокусъ *F* кривой. Воображая теперь, какъ въ случаѣ круговой дуги, одинъ разъ, что дуга *DA* вращается около оси *DF*, а другой разъ, что прямая опредѣленной длины, возставленная въ *A* перпендикулярно къ плоскости кривой *ADB*, движется, сохраняя свое направленіе и описывая своимъ основаніемъ дугу *AB*,

получимъ двѣ формы вогнутаго собирательнаго зеркала, *параболическую* и *параболо-цилиндрическую*, изъ которыхъ первая сосредоточиваетъ падающіе параллельно къ *FD* лучи въ одной фокальной точкѣ *F*, а вторая—вдоль цѣлой фокальной прямой, перпендикулярной въ *F* къ плоскости параболы *AB* и равной высотѣ цилиндра. Отстраняя снова первое изъ этихъ рѣшеній, какъ непригодное для нашей цѣли, у насъ остается параболо-цилиндрическая форма, не имѣющая уже тѣхъ недостатковъ, какіе представляла круго-цилиндрическая.

Эти двѣ цилиндрическія формы, параболо-цилиндрическую и круго-цилиндрическую, и употреблялъ Мушо въ своихъ первыхъ инсолаторахъ, построенныхъ имъ до 1869 года [1]); примѣръ такого примѣненія представленъ на фиг. 3, гдѣ *A* есть сосудъ съ нагрѣваемой водой, *B* и *C*—стеклянный цилиндръ съ такой-же крышкой, составляющіе вмѣстѣ стеклянную оболочку, а *D*—цилиндрическое зеркало, поставленное такъ, чтобы солнечные лучи падали на него параллельно къ оси.

Но обѣ указанныя цилиндрическія формы представляютъ одно важное неудобство. Какъ видно изъ примѣра фигуры 3, такіе рефлекторы могутъ отражать солнечные лучи лишь на одну часть поверхности помѣщеннаго въ фокусѣ тѣла и, слѣдовательно, нагрѣвать непосредственно это тѣло только съ одной стороны; это соображеніе и побудило Мушо, въ 1869 году, замѣнить цилиндрическія зеркала—*коническими*.

Образованіе этой послѣдней формы крайне просто: стоитъ представить себѣ, что прямоугольный треугольникъ *ADB* (фиг. 4) вращается около одного изъ своихъ катетовъ, *DB*. Принявъ внутреннюю поверхность полученнаго такимъ образомъ конуса за зеркальную, ясно, что всѣ лучи, падающіе на

---

[1]) Еще раньше, въ 1847 г., пытался примѣнить параболо-цилиндрическое зеркало для той-же цѣли извѣстный инженеръ Франшо (Franchot); опыты его не имѣли успѣха, потому что онъ не окружалъ нагрѣваемое тѣло стеклянной оболочкой.

эту поверхность параллельно къ ея оси DB, послѣ отраженія сойдутся въ различныхъ точкахъ этой оси или ея продолженія, такъ что эта прямая и будетъ служить фокальной линіей. Подобное зеркало имѣетъ передъ цилиндрическими два преимущества: во первыхъ, и это главное его достоинство, оно направляетъ солнечные лучи на расположенное по его оси нагрѣваемое тѣло со всѣхъ сторонъ, производя такимъ образомъ равномѣрное нагрѣваніе по всей поверхности; во вторыхъ, конструкція его чрезвычайно проста. Но здѣсь необходимо обратить вниманіе еще на одно обстоятельство.

При одной и той-же величинѣ отверстія AC, можно различно располагать угломъ ABC при вершинѣ конуса, взявъ его тупымъ, прямымъ или острымъ, и представляется вопросъ, какая величина этого угла всего выгоднѣе для цѣлей инсолатора. Помощью элементарнаго геометрическаго разсужденія не трудно доказать, что если уголъ ABC прямой, или, другими словами, если производящій прямоугольный треугольникъ ADB равнобедренный, то фокальная линія, занимая пространство DB, т. е. именно ось зеркала, будетъ короче, чѣмъ въ случаяхъ, когда уголъ ABC, при той-же величинѣ отверстія AC, острый или тупой [1]); слѣдовательно, въ первомъ случаѣ отражен-

---

[1]) Пусть ABC (фиг. 5) будетъ прямоугольно-коническое зеркало, а $AB'C$ и $AB''C$ два другія коническія зеркала, одно остроугольное, другое тупоугольное, но съ такимъ-же отверстіемъ. Чтобы доказать, что фокальная линія перваго зеркала короче фокальныхъ линій двухъ остальныхъ, можно воспользоваться замѣчаніемъ Dupuy (Mémoires de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, t. 35), что всякій лучъ, параллельный къ оси коническаго зеркала, отражается по прямой, составляющей съ образующей, проходящей чрезъ точку паденія, уголъ равный тому, который эта образующая составляетъ съ осью зеркала. Изъ этого свойства слѣдуетъ, что лучъ MA, параллельный къ общей оси DB' трехъ зеркалъ, отражается отъ прямоугольнаго конуса по AD, отъ остроугольнаго по AD', отъ тупоугольнаго по AD'', и что треугольники ABD, $AB'D'$, $AB''D''$ равнобедренные, т. е., что $AD=BD$, $AD'=B'D'$, $AD''=B''D''$. Но такъ какъ MA есть крайній лучъ, то фокальныя линіи трехъ зеркалъ будутъ соотвѣтственно BD, $B'D'$, $B''D''$; и изъ того, что перпендикуляръ AD меньше наклонныхъ AD', AD'', слѣдуетъ, что фокальная линія BD также меньше фокальныхъ линій $B'D'$, $B''D''$.

ные лучи будутъ сосредоточены на меньшемъ пространствѣ, такъ что нагрѣваніе будетъ сильнѣе. И такъ, прямоугольный конусъ, въ которомъ уголъ при вершинѣ прямой, выгоднѣе другихъ. По этимъ соображеніямъ Мушо и употреблялъ въ своихъ послѣднихъ солнечныхъ пріемникахъ исключительно одни прямоугольно - коническіе рефлекторы. Въ дѣйствительности пользуются лишь усѣченной частью *AEFC* прямоугольнаго конуса, заключенной между двумя плоскостями *AC*, *EF*, перпендикулярными къ его оси.

Въ очень недавнее время, французскій инженеръ Пифръ (Pifre) сдѣлалъ еще новый шагъ въ усовершенствованіи зеркалъ инсоляторовъ. Зеркало Пифра состоитъ изъ трехъ усѣченныхъ конусовъ *M*, *N*, *P*, соединенныхъ попарно вдоль окружностей основанія, такъ, что ихъ оси *EF*, *FG*, *GH* лежатъ на одной прямой, какъ видно изъ фиг. 6, представляющей сдѣланный чрезъ ось разрѣзъ зеркала. Въ среднемъ усѣченномъ конусѣ *N*, образующая составляетъ съ осью уголъ въ 45°, какъ въ коническомъ рефлекторѣ инсоляторовъ Мушо; образующая-же нижняго усѣченнаго конуса *M* наклонена къ оси подъ угломъ нѣсколько бо́льшимъ чѣмъ 45°, а образующая верхняго *P*—подъ угломъ нѣсколько меньшимъ. При такомъ расположеніи, три фокальныя линіи, произведенныя отраженіемъ лучей, падающихъ на три пояса *M*, *N*, *P* параллельно къ ихъ общей оси *HE*, почти совпадаютъ, налагаясь одна на другую приблизительно вдоль той части оси, которая служитъ фокальной линіей средняго усѣченнаго конуса. Отсюда, во-первыхъ, слѣдуетъ, что линейный фокусъ такого *сложно-коническаго* зеркала короче и сильнѣе, чѣмъ въ прямоугольно-коническомъ. Кромѣ того, область наибольшаго нагрѣва лежитъ гораздо ниже. Дѣйствительно, если представимъ себѣ прямоугольно-коническое зеркало раздѣленнымъ на очень узкія коническія полоски рядомъ плоскостей, проведенныхъ перпендикулярно къ оси на равныхъ и очень близкихъ другъ отъ

друга разстояніяхъ, то линейный фокусъ одной отдѣльно-взятой полоски будетъ тѣмъ напряженнѣе, чѣмъ выше лежитъ эта полоска, ибо верхнія полоски имѣютъ бо́льшую поверхность и, слѣдовательно, отражаютъ бо́льшее число лучей; значитъ, прямоугольно-коническое зеркало нагрѣваетъ верхнюю часть оси больше нижней. Это обстоятельство составляетъ большое неудобство въ тѣхъ случаяхъ, соотвѣтствующихъ именно важнѣйшимъ примѣненіямъ инсолаторовъ, когда ими пользуются для кипяченія воды и обращенія этой воды въ паръ; потому что нагрѣваніе воды происходитъ быстрѣе въ верхней части котла, чѣмъ въ нижней, что идетъ въ разрѣзъ съ обыкновеннымъ способомъ отопленія котловъ и съ условіями возможно полной утилизаціи получаемой теплоты. Зеркало Пифра въ значительной степени устраняетъ это неудобство, какъ это видно изъ сравненія фиг. 7 и 8, въ которыхъ штрихованныя площади представляютъ, для каждаго пояса, количества падающей на нагрѣваемый сосудъ теплоты. Такимъ образомъ сложно-коническій рефлекторъ имѣетъ ту выгоду, что позволяетъ уменьшить высоту котла на счетъ его діаметра и нагрѣвать этотъ котелъ съ нижней части.

Справедливость этихъ теоретическихъ заключеній о сравнительныхъ достоинствахъ прямоугольно-коническихъ и сложно-коническихъ зеркалъ вполнѣ подтвердилась рядомъ опытовъ, сдѣланныхъ въ 1882 году специальной коммиссіей, назначенной французскимъ правительствомъ для изученія практической пригодности инсоляторовъ. Примѣняя два зеркала этихъ системъ съ одинаковой площадью нагрѣва къ дистилляціи воды, коммиссія нашла, что въ одинаковое время зеркало Пифра даетъ, въ среднемъ, на 25% больше дистилированной воды, чѣмъ прямоугольно-коническій рефлекторъ.

Для облегченія чистки и починокъ, большія зеркала системы Пифра составляются изъ нѣсколькихъ секторовъ, которые легко укрѣпляются на общемъ скелетѣ изъ металлическихъ

прутьевъ (см. фиг. 14). Въ малыхъ приборахъ секторы скрѣпляютъ просто крючками, такъ что нѣтъ надобности въ подобномъ скелетѣ, а самый рефлекторъ состоитъ лишь изъ двухъ усѣченныхъ конусовъ, вмѣсто трехъ (см. фиг. 12 и 13), при чемъ одинъ изъ нихъ тупоугольный, а другой остроугольный, но оба мало разнятся отъ прямоугольнаго; дѣйствіе такого упрощеннаго сложно-коническаго зеркала можно прослѣдить по діаграммамъ фигуры 9.

Обращаясь теперь къ вопросу, изъ какого вещества долженъ состоять рефлекторъ инсолатора, для того чтобы онъ отражалъ на нагрѣваемое тѣло возможно большее число падающихъ тепловыхъ лучей, съ перваго взгляда естественно остановиться на амальгамированныхъ стеклахъ, т. е. на обыкновенныхъ стеклянныхъ зеркалахъ, такъ какъ они хорошо отражаютъ свѣтовые лучи и, кромѣ того, не страдаютъ отъ атмосферныхъ вліяній (послѣднее условіе важно потому, что солнечные пріемники дѣйствуютъ всегда на открытомъ воздухѣ). Но, съ другой стороны, имѣя въ виду извѣстныя намъ свойства теплоты, можно ожидать, что значительная часть солнечныхъ лучей, проникнувъ свободно сквозь стекло, преобразуются зеркальной амальгамой въ темные лучи и теряютъ такимъ образомъ способность снова проходить черезъ стекло. Это предположеніе вполнѣ подтвердилось опытами, которые доказали преимущество полированныхъ металлическихъ рефлекторовъ.

Но полированные металлы обладаютъ не одинаковой способностью отражать теплоту и не въ равной степени сопротивляются атмосфернымъ вліяніямъ. По новѣйшимъ изслѣдованіямъ, отражательная способность полированныхъ металловъ, т. е., отношеніе отраженной ими теплоты къ принятой, зависитъ отъ рода падающихъ лучей. Для солнечной теплоты, Дезенъ (Desains) и Лапровостэ (Laprovostaye) нашли слѣдующіе результаты [1]:

[1]) Desains, «Leçons de Physique», an. 1865, t. II, p. 599.

МЕТАЛЛЪ ЗЕРКАЛА	Отражательная способность для солнечной теплоты
Серебро	0,92
Золото	0,87
Зеркальн. металлъ (сплавъ мѣди и олова)	0,64
Сталь	0,60
Платина	0,60

Но такъ какъ эта таблица обнимаетъ лишь небольшое число металловъ, а болѣе обширныхъ наблюденій относительно отраженія именно солнечной теплоты отъ металлическихъ зеркалъ произведено не было, то мы приводимъ еще другую таблицу, выведенную изъ опытовъ тѣхъ-же ученыхъ надъ отраженіемъ лучей искуственнаго источника, именно такъ называемой лампы Локателли, при углѣ паденія въ 50°:

МЕТАЛЛЪ	Отражательная способность для лампы Локателли
Серебро	0,97
Золото	0,96
Красная мѣдь. .	0,93
Желтая мѣдь . .	0,93
Зеркальн. металлъ	0,86
Олово	0,85
Сталь	0,83
Цинкъ.	0,81
Полиров. платина	0,80
Желѣзо	0,77

Эти данныя показываютъ, что полнѣе другихъ должны утилизировать тепловую радіацію солнца серебряныя зеркала;

сверхъ того, они сравнительно мало подвержены атмосфернымъ вліяніямъ. Къ сожалѣнію, самый выгодный металлъ есть вмѣстѣ съ тѣмъ одинъ изъ самыхъ дорогихъ. Чтобъ уменьшить стоимость такихъ рефлекторовъ, ихъ дѣлаютъ изъ мѣдныхъ листовъ, покрытыхъ съ отражающей стороны тонкимъ, хорошо полированнымъ слоемъ серебра [1]).

Изъ всего сказаннаго о формѣ и веществѣ рефлекторовъ вытекаетъ слѣдующее третье положеніе: *зеркало инсолатора должно имѣть сложно-коническую форму и отражательная его поверхность должна быть изъ полированнаго серебра.*

Главную задачу въ примѣненіяхъ инсолаторовъ составляетъ, какъ мы увидимъ ниже, кипяченіе жидкостей и превращеніе ихъ въ пары помощью солнечной теплоты. Этимъ обусловливается необходимость еще одной существенной части прибора—*котла*, помѣщеннаго вдоль линейнаго фокуса рефлектора внутри стеклянной оболочки. Стѣнки этого сосуда должны быть сдѣланы изъ вещества, возможно лучше проводящаго получаемую отъ зеркала теплоту, а въ этомъ отношеніи всего выгоднѣе красная мѣдь, теплопроводность которой значительно больше, чѣмъ у другихъ пригодныхъ для нашей цѣли металловъ. Дѣйствительно, изъ наблюденій Видемана и Франца получается слѣдующая сравнительная таблица:

МЕТАЛЛЪ	Теплопроводность
Красная мѣдь . .	0,736
Желтая мѣдь . .	0,236
Цинкъ	0,193
Олово	0,145
Желѣзо	0,119
Свинецъ	0,085

---

[1]) Мушо пытался замѣнить серебро полированной желтой мѣдью, обладающей также значительной отражательной способностью, но оказалось, что такія зеркала быстро тускнутъ и поэтому требуютъ очень частой чистки.

Наружную поверхность стѣнокъ котла покрываютъ сажей для увеличенія ихъ поглощательной способности[1]). Что касается формы и устройства котла, то они зависятъ отъ той специальной цѣли, къ которой примѣняется дѣйствіе инсолатора; вообще-же они должны отвѣчать условію возможно малой потери теплоты путемъ проводности чрезъ точки опоры и лучеиспусканія въ наружное пространство.

Намъ остается коснуться еще одной принадлежности инсолатора. Для полнаго дѣйствія солнечныхъ лучей, падающихъ на зеркало, они должны быть направлены параллельно къ оси послѣдняго, т. е. перпендикулярно къ плоскости его верхняго основанія; чтобъ это условіе не переставало выполняться при перемѣщеніи солнца на небесномъ сводѣ, необходимо чтобы зеркало вмѣстѣ съ котломъ и стеклянной оболочкой слѣдовали за этимъ движеніемъ солнца. При малыхъ размѣрахъ инсолатора, такое перемѣщеніе достигается весьма просто, поворачивая чрезъ каждыя $^1/_4$ или $^1/_2$ часа подставку рефлектора въ горизонтальной плоскости и наклоняя ее къ этой плоскости вращеніемъ на шарнирахъ (см. фиг. 12 и 13). Большіе-же пріемники, съ значительнымъ вѣсомъ, приходится снабжать особымъ механизмомъ, позволяющимъ съ легкостью сообщать прибору нужныя движенія помощью рычаговъ или рукоятокъ. Подобные механизмы могутъ быть устроены различно; но мы не станемъ останавливаться на этомъ вопросѣ, имѣющемъ здѣсь лишь второстепенный интересъ, тѣмъ болѣе, что дальше мы встрѣтимъ нѣсколько примѣровъ такого рода приспособленій.

---

[1]) Въ длинномъ ряду ученыхъ и изобрѣтателей, стремившихся практически утилизировать теплоту солнечныхъ лучей, первый, примѣнившій почерненіе поверхности нагрѣваемаго тѣла, былъ повидимому французскій физикъ Дюкарла (1738—1816), которому, благодаря этому пріему, удалось варить мясо и овощи подъ стеклянными колпаками, выставленными на солнце. Успѣху опытовъ Дюкарла препятствовало главнымъ образомъ то ошибочное его воззрѣніе, что нагрѣваніе должно усиливаться съ числомъ стеклянныхъ оболочекъ, окружающихъ нагрѣваемый предметъ. Приборъ Дюкарла описанъ подробно въ его сочиненіи «Traité du feu complet».

Во всемъ предшествующемъ мы старались намѣтить въ краткихъ чертахъ тотъ логическій путь, который постепенно привелъ Мушо и его послѣдователей къ изобрѣтенію современнаго инсолатора. Соединивъ всѣ добытыя при этомъ общія положенія, мы приходимъ къ слѣдующему окончательному выводу:

Инсоляторъ состоитъ изъ сложно-коническаго посеребреннаго металлическаго зеркала, сосредоточивающаго солнечные лучи на мѣдный, снаружи почерненный котелъ, расположенный вдоль линейнаго фокуса рефлектора и заключенный въ стеклянную оболочку; приборы большихъ размѣровъ, сверхъ того, снабжены механизмомъ для перемѣщенія ихъ вслѣдъ за солнцемъ.

Этими немногими словами дѣйствительно выражается вся сущность устройства современнаго солнечнаго пріемника, въ чемъ можно убѣдиться, взглянувъ, напримѣръ, на фиг. 12, 13 и 14, представляющія нѣкоторыя изъ его новѣйшихъ конструкцій[1]). Такимъ образомъ приборъ этотъ является для насъ прямымъ и естественнымъ результатомъ сочетанія опредѣленныхъ научныхъ выводовъ и мы можемъ дать себѣ полный отчетъ въ происхожденіи и значеніи его отдѣльныхъ частей.

Обращаясь теперь къ примѣненіямъ инсолатора для практическихъ цѣлей, замѣтимъ сначала, что до настоящаго времени этимъ приборомъ пытались воспользоваться преимущественно въ трехъ направленіяхъ: 1) для приведенія въ дѣйствіе паровыхъ машинъ и, слѣдовательно, вообще для механическихъ цѣлей, напримѣръ, для подъема воды, ирригаціи, различныхъ другихъ потребностей сельскаго хозяйства, и т. д.; 2) для перегонки, напримѣръ, для дистилляціи морской или нечистой воды, для фабрикаціи спирта, водокъ, ликеровъ, духовъ и проч.; и 3) для приготовленія горячихъ напитковъ и кушаній. Особен-

---

[1]) На черт. 14 кромѣ пріемника изображенъ въ сторонѣ еще холодильный аппаратъ, состоящій изъ частей U, H, Q и предназначенный для дистилляціи жидкости, кипящей въ котлѣ.

ныхъ выгодъ ждутъ отъ всѣхъ этихъ примѣненій инсолатора въ очень южныхъ краяхъ, гдѣ съ необыкновенной силой и продолжительностью солнечнаго нагрѣванія соединяется почти полное отсутствіе топлива, гдѣ воду для питья необходимо очищать перегонкой, а растительность немыслима безъ поливки.

Начало изслѣдованій Мушо по занимающему насъ предмету относится, какъ уже было замѣчено выше, къ 1860 году. Но какъ эти первыя его попытки, такъ и длинный рядъ другихъ опытовъ, сдѣланныхъ въ теченіе пятнадцати послѣдующихъ лѣтъ, производились съ дешевыми аппаратами малыхъ размѣровъ, устроенными въ то время еще мало извѣстнымъ изслѣдователемъ на скудныя сбереженія отъ скромнаго учительскаго жалованья [1]). Первый инсолаторъ значительныхъ размѣровъ Мушо удалось построить лишь въ 1874 году, благодаря назначенной ему для этой цѣли правительственной субсидіи.

Въ этомъ приборѣ (фиг. 10) прямоугольно-коническій рефлекторъ имѣлъ въ діаметрѣ верхняго основанія 2,6 метра, а въ діаметрѣ нижняго 1 метръ; онъ состоялъ изъ 12 посеребренныхъ секторовъ, вдвинутыхъ въ пазы прутьевъ желѣзнаго скелета. Такъ называемая *площадь нормальной инсоляціи*, т. е., площадь нормальнаго (поперечнаго) сѣченія пучка падающихъ на отражательную поверхность солнечныхъ лучей, за вычетомъ неполированныхъ частей внутри конуса, каковы кругъ нижняго основанія, прутья скелета и проч.,—эта площадь нормальной инсоляціи равнялась 4 квадр. метр. Въ нижнее или малое

---

[1]) Проходя здѣсь, для краткости, молчаніемъ эти начальные опыты Мушо, нельзя однако не указать на то, что они именно и подготовили изобрѣтеніе современнаго инсолатора и потому съ научно-исторической точки зрѣнія представляютъ большой интересъ. Читатель найдетъ описаніе этихъ опытовъ въ 8 и 9 главахъ сочиненія Мушо «La chaleur solaire et ses applications industrielles», 2-me édition.

отверстіе зеркала былъ вставленъ чугунный кругъ, на которомъ покоился мѣдный котелъ. Послѣдній состоялъ изъ двухъ концентрическихъ сосудовъ, имѣвшихъ форму колокола, изъ коихъ большій имѣлъ 80, меньшій 50 сантим. высоты, при діаметрахъ въ 28 и 22 сантим. Нагрѣваемая вода помѣщалась въ промежуткѣ между этими сосудами, образуя такимъ образомъ кольцевидный цилиндрическій слой толщиной въ 3 сантим. Объемъ воды не превышалъ 20 литровъ [1]), такъ что паръ занималъ пространство около 10 литр. Внутренній сосудъ оставался пустымъ; онъ оканчивался мѣдной трубой, которая однимъ концомъ входила въ паровую камеру, а другимъ сообщалась помощью гибкой трубки или съ паровой машиной, или съ дистилляціоннымъ аппаратомъ Другая гибкая трубка, выходящая изъ основанія котла, служила для питанія послѣдняго водой. Стеклянная оболочка, окружающая весь котелъ, имѣла также видъ колокола, стоящаго на днѣ рефлектора, высотой 85 сантим. и 40 сантим. въ діаметрѣ, при толщинѣ стѣнокъ въ 5 миллиметр., такъ что между стѣнками этого стекляннаго колокола и котла оставался промежутокъ въ 5 сантим. Для перемѣщенія прибора за солнцемъ, его поворачивали на 15° въ часъ вокругъ вала, параллельнаго къ оси міра, и постепенно наклоняли къ этому валу сообразно склоненію солнца. Для достиженія этой двоякой цѣли инсолаторъ опирался цапфами на валъ, перпендикулярный къ ихъ оси, и валъ этотъ составлялъ съ горизонтомъ, отъ сѣвера къ югу, уголъ, равный широтѣ мѣста. Такимъ образомъ получались два движенія, позволяющія прибору слѣдовать за ходомъ солнца, ибо, при полуоборотѣ вала, инсолаторъ поворачивался отъ востока къ западу, тогда какъ вращеніемъ на цапфахъ онъ устанавливался противъ солнца, каково-бы ни было видимое положеніе послѣдняго. Каждое изъ этихъ двухъ движеній производилось

[1]) 1 литръ=0,0813 ведра=61,027 куб. дюйм.—1 метръ=3,2809 русск. фут.=1,4061 арш.

зацѣпленіемъ безконечнаго винта и требовало лишь толчка о рукоятку: первое черезъ каждые полчаса, второе разъ въ недѣлю.

Опыты съ этимъ инсолаторомъ производились въ Турѣ и дали, между прочимъ, слѣдующіе результаты.

8 мая[1]), при обыкновенной ясной погодѣ, 20 литр. воды въ 20°, влитые въ котелъ въ 8 ч. 30 м. утра, дали послѣ 40 минутъ паръ въ 2 атмосферы давленія, т. е. температуры 121°. Давленіе, затѣмъ, быстро достигло 5 атмосферъ,—предѣла, за которымъ было опасно продолжать опытъ, такъ какъ стѣнки котла имѣли толщину лишь въ 3 миллим. Около полудня, при 12 литр. воды въ котлѣ, паръ въ 100° поднялся менѣе чѣмъ въ 15 мин. до 5 атм. давленія, т. е. до температуры 153°.

22 іюля, около 1 ч. пополудни, при необыкновенной жарѣ, приборъ обращалъ въ пары 5 литр. воды въ часъ, что соотвѣтствуетъ расходу пара въ 140 литр. въ минуту.

За неимѣніемъ паровой машины, приспособленной къ инсолатору, пришлось употребить большую учебную модель машины безъ расширенія и безъ холодильника, которой цилиндръ вмѣщалъ $^1/_3$ литра. Эта машина въ ясную погоду дѣлала 80 ударовъ въ минуту при постоянномъ давленіи въ 1 атмосферу.

Проведя паръ изъ котла въ дистиляціонный аппаратъ, 5 литр. вина закипали въ $^1/_4$ часа; тотъ-же паръ очень быстро варилъ овощи и т. п.[2]).

Эти первые крупные опыты Мушо обратили вниманіе публики, ученыхъ и правительства на новое изобрѣтеніе. Въ началѣ 1877 года Мушо былъ посланъ министромъ народнаго

[1]) Всѣ числа мѣсяца приведены въ настоящей статьѣ по новому стилю, температуры—по термометру Цельзія.

[2]) Comptes rendus de l'Académie des sciences, t. 81, an. 1875, p. 571—574.

просвѣщенія Ваддингтономъ на годъ въ Алжирію для изученія дѣйствій солнечныхъ пріемниковъ въ болѣе благопріятныхъ условіяхъ.

Изъ отчета объ этой поѣздкѣ, представленнаго Мушо Парижской Академіи наукъ[1]) и министру[2]), мы извлекаемъ слѣдующую таблицу, показывающую, какія количества теплоты, въ различныхъ мѣстахъ Алжиріи, способенъ утилизировать инсолаторъ въ минуту и на квадратный метръ площади нормальной инсоляціи. Цифры этой таблицы получены Мушо изъ опытовъ съ особымъ небольшимъ пріемникомъ, названнымъ имъ солнечнымъ кипятильникомъ. Онъ состоитъ изъ прямоугольно-коническаго зеркала, имѣющаго площадь нормальной инсоляціи въ 18 квадр. дециметр., стекляннаго цилиндра и почерненнаго снаружи небольшого котла, снабженнаго крышкой, сквозь которую проходитъ термометръ. Въ котелъ, при каждомъ опытѣ, вливалось $^3/_4$ литра воды; наблюдалась начальная ея температура, время, протекшее до начала кипѣнія, равно какъ и температура кипѣнія,—и по этимъ даннымъ вычислялось количество тепловыхъ единицъ, которое утилизировалось въ минуту на каждый квадратный метръ площади нормальной инсоляціи.

Мѣсто наблюденія.	Время наблюденія.	Состояніе неба.	Число единицъ теплоты, утилизир. въ минуту на квадр. метръ площ. нормальн. инсоляціи.
Алжиръ. . . .	апрѣль	чисто	7 (средняя)
	май	»	8 »
	іюнь	»	8,5 »
Барджъ-Бу-Арреридж . .	30 іюля	очень ярк. солнце	8,5
Сетифъ	1 августа	»	7,8
»	2 »	»	6

[1]) Comptes rendus, t. 86, an. 1878, p. 1019—1021.

[2]) «La chaleur solaire», 2-me édition, p. 232—243.

Мѣсто наблюденія.	Время наблюденія.	Состояніе неба.	Число единицъ теплоты, утилизир. въ минуту на квадр. метръ площ. нормальн. инсоляціи.
Константина .	3 августа	очень ярк. солнце	7,4
Бискра	10 »	»	9
»	11 »	слегка покрыто парами	5
»	13 »	яркое солнце	9,2
Пикъ Шеліа .	18 »	солнце и вѣтеръ	9,7
Ткудъ	17 »	солнце	9,6
Батна	22 »	»	9,2
Пикъ Тонгуръ	23 »	солнце и вѣтеръ	9
Медеа	16 сентября	яркое солнце	7
Богари	19 »	»	7,1
Джелфа	20 »	»	7,3
Лагуатъ . . .	22 »	чистое небо	8,4
»	23 »	подернуто	7,8
Эль-Ариша . .	26 »	яркое солнце	9,8
Жеривиль . .	4 октября	»	8,7
» . . .	4 »	легкія облака	6,7
Бенъ-Атабъ . .	5 »	яркое солнце	9,4
Эль-Мей . . .	7 »	»	9,4
Тарауа	8 »	»	7,6
Оранъ	23 »	»	8,1
		Средняя	8,5

По замѣчанію Мушо, цифры послѣдняго столбца, выведенныя, какъ мы видѣли, изъ опытовъ съ очень малымъ приборомъ, должны быть меньше тѣхъ, какія могли-бы дать, при равныхъ прочихъ условіяхъ, инсоляторы значительныхъ размѣровъ, такъ какъ по наблюденіямъ, сдѣланнымъ имъ въ Турѣ, количество теплоты, утилизируемой въ данное время

на каждый квадратный метръ площади нормальной инсоляціи, возрастаетъ вмѣстѣ съ размѣрами рефлектора [1]).

Другой интересный практическій выводъ изъ Алжирскихъ наблюденій Мушо, относится къ возможной продолжительности рабочаго дня инсоляторовъ въ климатѣ Алжиріи. Слѣдя за измѣненіями напряженности солнечной теплоты въ теченіе дня, Мушо нашелъ, что эти колебанія вообще мало чувствительны между 8 час. утра и 4 час. пополудни. Напряженность тепловыхъ лучей уже достаточна отъ 6 до 7 час. утра; она быстро возрастаетъ съ 7 до 8 час. и проходитъ въ обратномъ порядкѣ тѣ-же измѣненія между 4 и 6 час. вечера. Отсюда слѣдуетъ, что въ Алжиріи, въ ясные дни, можно расчитывать на 8, нерѣдко даже на 10 часовъ дѣйствія инсолатора.

Возвратясь въ ноябрѣ 1877 года въ Алжиръ, Мушо представилъ свои приборы и результаты наблюденій мѣстному Общему Совѣту (Conseil général), который немедленно ассигновалъ ему 5000 франковъ на сооруженіе большого инсолатора для готовившейся тогда Парижской всемірной выставки. Къ этой первой субсидіи присоединились вскорѣ другія: именно 5000 франк. по назначенію генералъ-губернатора Алжиріи и 5200 франк. со стороны Французской Ассосіаціи для успѣховъ наукъ, всегда готовой на щедрую помощь нуждающемуся изслѣдователю. Наконецъ, для покрытія расходовъ на выставкѣ министерство земледѣлія ассигновало Мушо еще около 15000 франк. «Пусть скажутъ теперь», восклицаетъ по этому поводу Ройомонъ [2]), «что во Франціи не поощряютъ изобрѣтателей!».

При такихъ-то благопріятныхъ условіяхъ и съ практической помощью талантливаго молодаго инженера Абеля Пифра,

---

[1]) Къ сожалѣнію, Мушо не сообщилъ числовыхъ данныхъ, которыя его привели къ этому интересному заключенію о возрастаніи полезнаго дѣйствія съ размѣрами пріемника, такъ что нельзя судить о томъ, въ какой пропорціи происходитъ это возрастаніе. Было-бы полезно произвести спеціальный рядъ опытовъ для разъясненія этого вопроса.

[2]) Royaumont, «La conquête du soleil», Paris, 1882, p. 241.

которому, какъ мы увидимъ, пришлось впослѣдствіи играть очень видную роль въ вопросѣ, Мушо выступилъ на всемірной выставкѣ 1878 года съ громаднѣйшимъ инсолаторомъ, какой когда-либо былъ построенъ (фиг. 11).

Площадь большого основанія прямоугольно-коническаго рефлектора имѣла около 20 квадр. метр. Вдоль фокуса его, длина котораго равнялась 2 метр., былъ установленъ желѣзный трубчатый котелъ, вѣсившій, со всѣми принадлежностями, до 200 килограммовъ; вмѣстимость котла была въ 100 литр., изъ коихъ 30 для паровой камеры и 70 для воды. Посредствомъ особаго механизма можно было мгновенно установить приборъ для данной широты, т. е., такъ наклонить главный валъ, около котораго совершается суточное движеніе, чтобы онъ составлялъ съ горизонтомъ уголъ, равный широтѣ мѣста. Другая система зубчатыхъ колесъ позволяла наклонять рефлекторъ вмѣстѣ съ котломъ къ главному валу сообразно склоненію солнца. Наконецъ, посредствомъ рукоятки снабженной двойнымъ шарниромъ Гука, можно было перемѣщать приборъ съ востока на западъ. Такъ какъ рефлекторъ съ котломъ уравновѣшивались противовѣсомъ, то послѣднее движеніе требовало лишь незначительнаго усилія; его даже можно было сдѣлать автоматическимъ при помощи часового механизма. Всѣ эти детали легко прослѣдить на фиг. 11.

Этотъ инсолаторъ дѣйствовалъ въ первый разъ 2 сентября. 70 литровъ воды закипѣли въ $^1/_2$ часа. Манометръ, не смотря на значительныя побѣги пара, показывалъ до 6 атмосферъ.

12 сентября, при слегка облачномъ небѣ, давленіе въ котлѣ возрастало быстрѣе; котелъ питался посредствомъ инжектора безъ замѣтнаго уменьшенія давленія.

22 сентября, при постоянномъ, но не вполнѣ ясномъ солнцѣ, давленіе достигло 6,2 атмосферъ. Въ тотъ-же день былъ приведенъ въ дѣйствіе инсолаторомъ, подъ постояннымъ давленіемъ около 3 атм., насосъ системы Танжи, который под-

нималъ отъ 1500 до 1800 литр. воды въ часъ на высоту 2 метр.

29 сентября солнце показалось къ 11 час. 30 мин., а въ полдень закипѣли 75 литр. воды; упругость пара въ теченіе 2 часовъ постепенно возрастала отъ 1 до 7 атмосф., предѣльнаго показанія манометра, не смотря на нѣсколько преходящихъ облаковъ. Паръ былъ проведенъ въ ледодѣльный аппаратъ Карре и получились первые куски льда, произведенные дѣйствіемъ солнечныхъ лучей.

Эти результаты заслуживаютъ тѣмъ большаго вниманія, что они достигнуты при не совсѣмъ благопріятныхъ обстоятельствахъ: вслѣдствіе неудовлетворительной конструкціи, котелъ пропускалъ паръ то чрезъ предохранительный клапанъ, то чрезъ паропроводную трубку; сверхъ того оказалось, что для инсоляторовъ трубчатые котлы менѣе выгодны, чѣмъ обыкновенные цилиндрическіе или кольцеобразные.

Рядомъ съ описаннымъ большимъ инсоляторомъ, на выставкѣ дѣйствовали и малые пріемники. Зеркала въ $^1/_6$ квадр. метра жарили $^1/_2$ килогр. мяса и кипятили $^3/_4$ литра воды въ $^1/_2$ часа, варили кофе, и т. п. Солнечные дистиляторы тоже работали успѣшно; съ рефлекторами въ $^1/_2$ квадр. метра 3 литра вина закипали въ $^1/_2$ часа и получалась водка хорошаго качества [1]).

Экспертная коммиссія выставки и французское правительство поспѣшили отдать должную честь изобрѣтателю, достигшему послѣ почти двадцатилѣтнихъ неуклонныхъ изслѣдованій этихъ блестящихъ результатовъ. Первая присудила Мушо золотую медаль, второе назначило ему значительную пожизненную пенсію.

Этотъ громкій успѣхъ не усыпилъ однако въ Мушо его прежней энергіи и настойчивости въ преслѣдованіи разъ по-

---

[1]) «La chaleur solaire», 2-me édit., p. 243—246.

ставленной цѣли. Уже нѣсколько мѣсяцевъ послѣ закрытія всемірной выставки, онъ предпринимаетъ въ окрестностяхъ Алжира новый рядъ опытовъ надъ техническими примѣненіями инсолаторовъ и представляетъ въ маѣ 1880 года отчетъ о нихъ Академіи.

Съ прямоугольно-коническимъ рефлекторомъ, имѣющимъ 0,8 метр. въ діаметрѣ большого основанія, Мушо достигаетъ внутри стеклянной оболочки температуръ въ 400 — 500° и съ успѣхомъ примѣняетъ этотъ результатъ къ плавленію кварцовъ, къ приготовленію бензойной кислоты, къ очищенію льняного масла, къ сгущенію сироповъ, къ сублимаціи сѣры, къ дистилляціи сѣрной кислоты, и проч.

Другой инсолаторъ бо́льшихъ размѣровъ, предназначенный для механическихъ цѣлей, имѣлъ площадь нормальной инсоляціи въ 3,8 квадр. метр. Въ немъ замѣчается новое устройство котла, при которомъ испаряемая жидкость постоянно остается въ соприкосновеніи со всей поверхностью нагрѣва и для пара оставлено большее пространство; стѣнкамъ котла дана толщина въ 5 миллим.

Въ этомъ приборѣ, 18-го ноября, 35 литр. воды закипѣли въ 80 минутъ, а $1^1/_2$ часа спустя давленіе пара достигло 8 атмосф. Приспособленный къ прямой перегонкѣ, тотъ-же инсолаторъ доставлялъ 22 декабря около 5100 литр. пара нормальнаго давленія въ часъ и перегналъ 24 декабря изъ 25 литр. вина 4 литр. водки въ 85 минутъ.

Въ началѣ марта тотъ-же пріемникъ приводилъ въ движеніе горизонтальную паровую машину безъ расширенія и безъ холодильника со скоростью 120 оборотовъ въ минуту подъ постояннымъ давленіемъ въ 3,5 атмосф. Наконецъ, 18 марта, подъемная машина весьма посредственной конструкціи, движимая этимъ инсолаторомъ, поднимала 6 литр. воды на 3,5 метр. и выбрасывала на 12 метр. водяную струю для поливки [1]).

[1]) Comptes rendus, t. 90, an. 1880, p. 1212—1213.

Еще въ 1876 году, вскорѣ послѣ Турскихъ опытовъ, Мушо продалъ права на всѣ свои привиллегіи, кромѣ французской, нѣкоему Кордье въ Лондонѣ. Въ 1878 году онъ уступилъ права и на французскій патентъ своему помощнику на всемірной выставкѣ Пифру, который, выкупивъ иностранныя привиллегіи у Кордье, сталъ такимъ образомъ полнымъ владѣльцемъ предпріятія. Но чтобы вести съ успѣхомъ дѣло распространенія и дальнѣйшаго совершенствованія новаго изобрѣтенія, нужны были значительныя матеріальныя средства. Уже годъ спустя, Пифру удалось составить акціонерное общество съ крупнымъ основнымъ капиталомъ подъ названіемъ «Центральнаго Общества утилизаціи солнечной теплоты» (Société Centrale d'utilisation de la chaleur solaire). Это общество, во главѣ котораго стоитъ извѣстный предприниматель Куврё (Couvreux), основало въ Парижѣ съ 1881 года обширныя мастерскія, гдѣ не только изготовляются инсолаторы для продажи, но и продолжаются, подъ руководствомъ Пифра, различныя изслѣдованія, клонящіяся къ дальнѣйшимъ практическимъ улучшеніямъ солнечныхъ пріемниковъ.

Главныя усовершенствованія, сдѣланныя Пифромъ въ инсолаторахъ Мушо, заключаются въ замѣнѣ прямоугольно-конической формы рефлектора сложно-конической, въ уменьшеніи высоты котла и въ упрощеніи механизма для періодическихъ перемѣщеній прибора.

Съ выгодами сложно-коническаго зеркала мы уже знакомы изъ прежняго.

Эти выгоды должны были, какъ мы видѣли, отразиться и на расположеніи котла. При прямоугольно-коническомъ рефлекторѣ приходилось давать котлу очень большую высоту; это увеличивало вѣсъ инсолатора, повышало его центръ тяжести и затрудняло управленіе приборомъ. Съ введеніемъ рефлектора Пифра, вслѣдствіе укороченія и усиленія линейнаго фо-

куса, получилась возможность значительно уменьшить высоту котла, укоротивъ его и сверху и снизу, такъ чтобы одинъ паровой куполъ поднимался надъ уровнемъ верхняго основанія рефлектора, а между дномъ котла и дномъ зеркала оставался нѣкоторый промежутокъ, которымъ можно воспользоваться, заполняя его какимъ-нибудь дурнымъ проводникомъ теплоты. Чтобы съ такимъ уменьшеніемъ высоты котла не пришлось, для сохраненія объема, увеличивать его діаметра, Пифръ устранилъ внутренній пустой цилиндръ котловъ Мушо, замѣнивъ, слѣдовательно, прежнюю кольцеобразную полость для воды и пара сплошной цилиндрической; для нѣкоторыхъ примѣненій удержано впрочемъ кольцеобразное расположеніе. Тогда какъ боковыя стѣнки котла, заключенныя въ стеклянный цилиндръ, снаружи почернены съ цѣлью усилить поглощеніе теплоты, мѣдный куполъ, выдающійся изъ стеклянная сосуда и соприкасающійся съ наружнымъ воздухомъ, имѣетъ, наоборотъ, полированную и блестящую поверхность, что уменьшаетъ потерю теплоты чрезъ лучеиспусканіе.

Для установки ихъ по солнцу, инсоляторы Пифра имѣютъ двойное движеніе около двухъ осей, одной горизонтальной и другой вертикальной (см. фиг. 14). Для перемѣщенія въ горизонтальной плоскости, отъ востока къ западу и обратно, служитъ простой рычагъ, движущій платформу, на которой стоитъ рефлекторъ. Наклоненіе-же прибора достигается слѣдующимъ образомъ: зеркало, съ одной стороны, ходитъ на двухъ шарнирахъ съ общей горизонтальной осью, а съ другой, опирается на одну или двѣ круговыя зубчатки, смотря по величинѣ прибора. Эти зубчатки, а съ ними и рефлекторъ, можно поднимать двумя шестернями, которыя вращаютъ рукояткой, снабженной безконечнымъ винтомъ. Оба эти движенія требуютъ лишь незначительнаго усилія. Вслѣдствіе такого упрощенія оріентирующаго механизма, и штативъ, на которомъ покоится весь приборъ, сталъ гораздо легче и удобнѣе для переноски.

Не подлежитъ сомнѣнію, что этими усовершенствованіями и нѣкоторыми другими детальными улучшеніями, на которыхъ здѣсь неумѣстно останавливаться, Пифръ увеличилъ полезное дѣйствіе солнечныхъ пріемниковъ и облегчилъ ихъ практическое употребленіе.

Инсоляторы, которые изготовляются теперь въ мастерскихъ Центральнаго Общества утилизаціи солнечной теплоты, можно раздѣлить на четыре типа, разнящіеся по своему назначенію и размѣрамъ.

Приборы перваго типа (фиг. 12), небольшой величины, могутъ служить или какъ учебныя модели для физическихъ и механическихъ кабинетовъ, или же какъ солнечные котелки для приготовленія напитковъ и кушаній. Подставка прибора состоитъ изъ двухъ досокъ, соединенныхъ шарнирными петлями; одна ставится горизонтально, а другую, на которой укрѣплено зеркало, можно наклонять вращеніемъ на петляхъ, сообразно положенію солнца. Въ стеклянный цилиндръ, расположенный по фокусу зеркала, вставляется, смотря по надобности, обыкновенный кипятильникъ, кофейникъ, рѣшетка, вертелъ, и т. д.

Инсоляторы втораго типа (фиг. 13), получившіе названіе *караванныхъ* аппаратовъ, предназначаются для военныхъ и другихъ экспедицій и, вообще, для путешествій по знойнымъ и безлѣснымъ пустынямъ, какъ дорожныя солнечныя кухни. Секторы, изъ которыхъ составляется рефлекторъ, и всѣ кухонныя принадлежности укладываются въ небольшой, удобный для дороги ящикъ. Раскладка и укладка отнимаютъ мало времени; зеркало устанавливается на самой крышкѣ ящика.

Третій типъ составляютъ приборы, спеціально приспособленные къ перегонкѣ и подобнымъ цѣлямъ. Котелъ состоитъ изъ двухъ концентрическихъ цилиндровъ, между которыми помѣщается испаряемая жидкость, купола, гдѣ собираются пары, и трубокъ, проводящихъ эти пары въ холодильникъ.

Наконецъ, къ четвертому типу относятся инсолаторы большихъ размѣровъ, служащіе для доставленія движущей силы. Подножье у нихъ чугунное; секторы рефлектора вставлены въ легкій желѣзный скелетъ (фиг. 14); стеклянный цилиндръ составленъ изъ трехъ цилиндрическихъ вырѣзокъ. Котелъ устроенъ какъ въ предыдущихъ приборахъ. Мѣдная трубка, выходящая изъ купола и спускающаяся параллельно къ оси котла, проводитъ паръ въ резервуаръ, на которомъ вправлены предохранительный клапанъ, манометръ и другая трубка, ведущая паръ къ пріемной машинѣ; сверхъ того, котелъ снабженъ сверху указателемъ уровня. Самые большіе инсолаторы этого рода имѣютъ 5,5 метр. въ діаметрѣ верхняго основанія рефлектора.

Разсмотрѣнныя выше улучшенія въ устройствѣ инсолаторовъ были задуманы Пифромъ еще въ началѣ 1879 года. Чтобы изучить ихъ практическое значеніе, онъ осенью того-же года предпринялъ поѣздку въ Алжирію. Произведенные здѣсь опыты привели его къ столь поощрительнымъ выводамъ, что въ августѣ 1880 года онъ рѣшился выступить передъ Парижскими учеными и публикой съ своимъ измѣненнымъ инсолаторомъ, испытывая публично его дѣйствіе въ теченіе цѣлаго мѣсяца въ Conservatoire des Arts-et Métiers. Отчетъ Пифра объ этихъ испытаніяхъ былъ тогда-же сообщенъ Академіи наукъ Мангономъ [1]).

«Рефлекторъ прибора», говорится въ этомъ отчетѣ, «имѣетъ 9,25 кв. метр. полезной площади, а котелъ вмѣщаетъ 50 литр. воды. При ясномъ небѣ, кипѣніе начинается черезъ 40 минутъ, а давленіе пара возрастаетъ на 1 атмосф. каждыя 7 или 8 минутъ. Паровая машина спеціально приспособлена для солнечныхъ пріемниковъ. Составляя одно цѣлое съ приборомъ, она установлена такъ, что ея валъ сохраняетъ постоянное направленіе, не смотря на то, что она участвуетъ въ пе-

---

[1]) Comptes rendus, t. 91, an. 1880, p. 388—389.

ремѣщенія инсолатора вслѣдъ за солнцемъ. Вращательный насосъ, который она приводитъ въ движеніе, поднимаетъ, подъ постояннымъ давленіемъ, даже во время питанія котла, 99 литр. воды въ минуту на высоту 3 метр. При этомъ нужно замѣтить, что паровая машина слишкомъ сильна для испытываемаго солнечнаго пріемника; ее слѣдовало-бы двигать рефлекторомъ, имѣющимъ полезную площадь по крайней мѣрѣ въ 20 квадр. метр. или 5,5 метр. въ діаметрѣ большого основанія; тогда ея дѣйствительная сила достигла бы 1 пар. лошади».

Весной 1881 года Пифръ выставилъ свои усовершенствованные инсолаторы на земледѣльческой и промышленной выставкѣ, открытой въ Алжирѣ во время 10-го съѣзда Французской Ассосіаціи для успѣховъ наукъ; здѣсь самый большой приборъ имѣлъ 3,5 метр. въ діаметрѣ большого основанія зеркала и приводилъ въ движеніе паровую машину подъ среднимъ давленіемъ въ 4,5 атмосф. Наконецъ, въ 1882 году можно было видѣть тѣ-же приборы на выставкѣ въ Бордо, а также въ Тюльерійскомъ саду, гдѣ, напримѣръ, 6 августа инсолаторъ съ рефлекторомъ въ 3,5 метр. двигалъ небольшую типографскую машину Маронини, выпускавшую первые листы, печатанные дѣйствіемъ солнечныхъ лучей.

Въ то время, когда Пифръ знакомилъ публику съ дѣйствіями инсолаторовъ, въ правительственныхъ сферахъ Франціи оживленно обсуждался грандіозный проектъ проведенія желѣзныхъ дорогъ черезъ Сахару. Извѣстный инженеръ Жакменъ (Jacqmin) обратилъ вниманіе министра общественныхъ работъ на пользу, которую можно ожидать при постройкѣ и эксплуатаціи этихъ дорогъ отъ пріемниковъ солнечной теплоты, въ виду тѣхъ необыкновенно благопріятныхъ условій, какія встрѣтило бы ихъ примѣненіе въ Африканской пустынѣ. Для окончательнаго разъясненія вопроса о степени практической пригодности инсолаторовъ къ означенной цѣли, 19 февраля

1880 года была учреждена министромъ спеціальная «Коммиссія солнечной теплоты» (Commission de la chaleur solaire)[1]). Эта коммиссія въ свою очередь испросила у министра назначенія двухъ подкоммиссій, которымъ было поручено произвести— одной въ Монпелье, другой въ Константинѣ (въ Алжиріи)— сравнительные опыты надъ двумя совершенно одинаковыми инсоляторами и опредѣлить ихъ *коеффиціентъ полезнаго дѣйствія*[2]).

Изъ этихъ двухъ подкоммиссій только одна, работавшая въ Монпелье, опубликовала пока результаты своихъ изслѣдованій; отчетъ ея, написанный профессоромъ Крова (Crova), какъ главнымъ руководителемъ всѣхъ произведенныхъ наблюденій, былъ представленъ Бертело Парижской Академіи 3 апрѣля 1882 года[3]). Трудъ этотъ есть несомнѣнно самое точное и обстоятельное научное изслѣдованіе надъ свойствами инсоляторовъ, какое было сдѣлано по настоящее время, и имѣетъ еще особую цѣну вслѣдствіе хорошо извѣстной ученому міру спеціальной компетенціи профессора Крова въ области явленій солнечной радіаціи, т. е., именно тѣхъ явленій, на которыхъ основано дѣйствіе инсоляторовъ; поэтому намъ необходимо съ особеннымъ вниманіемъ остановиться на выводахъ этой работы.

«Солнечными аппаратами», говоритъ проф. Крова въ началѣ своего отчета, «называютъ приборы, служащіе для при-

---

[1]) Въ составъ этой коммиссіи вошли инженеры *Tarbé* (предсѣдатель), *Hardy*, *Jacquin*, *Hirsch*, *Gariel*, *Lemoine*, *Brosselin* (секретарь) и *Marié-Davy*, директоръ Парижской метеорологической обсерваторіи.

[2]) Подкоммиссія въ Монпелье состояла изъ профессора *Crova* и инженеровъ *Duponchel* (предсѣдатель), *Guibal* (секретарь) и *Fulcrand*. Во вторую подкоммиссію (въ Константинѣ) вошли инженеры *Lebiez* (предсѣдатель), *Tiscot*, *Moll* и *Jus* (секретарь), профессоръ физики въ мѣстномъ коллежѣ *Charbonnière*, полковникъ генеральнаго штаба *de Polignac* и артиллерійскій капитанъ *Mangenot*.

[3]) Comptes rendus, t. 94, an. 1882, p. 943—945. Въ болѣе подробной формѣ этотъ отчетъ помѣщенъ профессоромъ Крова въ Mémoires de l'Académie des Sciences et Lettres de Montpellier, Section des Sciences, t. 10. Въ настоящей статьѣ мы пользовались и той и другой редакціей.

нятія лучистой энергіи солнца и для превращенія ея въ термометрическую теплоту, которой можно пользоваться или непосредственно, или-же преобразуя ее въ одну изъ формъ энергіи, каковы механическая, электрическая или химическая работа.

Самые извѣстные изъ этихъ приборовъ — рефлекторы, которые были въ послѣднее время предметомъ настойчивыхъ изслѣдованій Мушо и въ устройствѣ которыхъ Пифръ сдѣлалъ важныя усовершенствованія. Были высказаны самыя разнообразныя мнѣнія относительно практической пользы этихъ приборовъ: одни смотрятъ на нихъ только какъ на интересный опытъ, не имѣющій практическаго значенія; другіе предвидятъ для нихъ большую будущность, считая ихъ призванными во многихъ случаяхъ доставлять промышленности ту энергію, которую мы обыкновенно заимствуемъ изъ горѣнія угля». «Въ виду этихъ преувеличеній въ одну или въ другую сторону, можно было предложить себѣ слѣдующіе вопросы: 1) пригодны-ли солнечные пріемники, въ томъ видѣ, въ какомъ они были построены Мушо и усовершенствованы Пифромъ, для примѣненій къ промышленнымъ цѣлямъ; 2) извѣстны-ли болѣе совершенныя средства утилизировать солнечную энергію.

Работа, которую мы предприняли въ 1881 году подъ покровительствомъ г. министра общественныхъ работъ, дастъ, мы надѣемся, полезный матеріалъ для рѣшенія перваго вопроса. Мы изложимъ только полученные численные результаты, предоставляя каждому оцѣнивать значеніе этихъ приборовъ по доставляемымъ ими результатамъ. Что-же касается втораго вопроса, то мы полагаемъ, что онъ не подлежитъ обсужденію въ настоящее время въ виду скудности нашихъ познаній по этому предмету».

Инсолаторъ, надъ которымъ производились испытанія, изображенъ на фиг. 14 [1]). Его рефлекторъ имѣлъ 2,7 метр. въ

[1]) Приборъ, отправленный для второй подкоммиссіи въ Константину, имѣетъ точно такіе же размѣры и устройство.

діаметрѣ верхняго, 0,8 метр. въ діаметрѣ нижняго основанія и площадь нормальной инсоляціи, равную 5,22 квадр. метр. Котелъ имѣлъ вмѣстѣ съ куполомъ 1,3 метр. высоты и 0,2 метр. въ діаметрѣ, а средній объемъ воды въ немъ равнялся 20 литр. Опыты производились на возвышенномъ и открытомъ со всѣхъ сторонъ мѣстѣ; они продолжались съ 1 января по 31 декабря 1881 года и дѣлались ежечасно во всѣ дни, когда свѣтило солнце и когда наблюденія были возможны[1]). Паръ, развивающійся въ котлѣ инсолатора, сгущался въ змѣевикѣ, охлаждаемомъ токомъ холодной воды. Взвѣшивая количество воды, продистилированной въ часъ, можно было, на основаніи извѣстныхъ формулъ Реньо, опредѣлить число тепловыхъ единицъ, утилизированныхъ въ то-же время инсолаторомъ; а раздѣляя это число на площадь нормальной инсоляціи, т. е., на 5,22 кв. метр., получалось число тепловыхъ единицъ, утилизированныхъ приборомъ на 1 квадр. метръ площади нормальной инсоляціи въ часъ. Кромѣ того, изъ актинометрическихъ наблюденій, производившихся ежечасно посредствомъ актинометра Крова[2]), выводилось падающее въ теченіе каждаго часа количество теплоты. Такимъ образомъ наблюдатели имѣли, съ одной стороны, дѣйствительное число тепловыхъ единицъ, полученныхъ отъ солнца въ часъ на площадь, равную 1 квадр. метр. и перпендикулярную къ солнечнымъ лучамъ, а съ другой стороны—число тепловыхъ единицъ, которые были утилизированы приборомъ въ то-же время и на такую-же площадь для дистиляціи нѣкотораго количества воды. Частное отъ раздѣленія втораго числа на первое давало отношеніе

---

[1]) Такихъ дней было въ теченіе всего года 189, изъ коихъ—74 полныхъ, въ которые солнце свѣтило цѣлый день, и 115 неполныхъ, когда солнце свѣтило лишь часть дня.

[2]) Описаніе этого прибора можно найти въ статьѣ проф. Крова «Mesure de l'intensité calorifique des radiations solaires et leur absorption par l'atmosphère terrestre», (2-me partie), помѣщенной въ Journal de Chimie et de Physique, série V, t. 19, p. 167—194.

энергіи, утилизированной приборомъ для дистиляціи воды, къ падающей энергіи, т. е., коеффиціентъ полезнаго дѣйствія инсолатора.

Параллельно съ этими опытами для опредѣленія коеффиціента полезнаго дѣйствія производился рядъ другихъ наблюденій, съ цѣлью принять въ разсчетъ обстоятельства, которыя вліяютъ на абсолютную напряженность солнечной радіаціи и на коеффиціентъ полезнаго дѣйствія прибора: измѣрялись температура воздуха въ тѣни, его влажность, направленіе и приблизительная сила вѣтра, а также высота солнца, которая давала возможность вычислять толщину атмосфернаго слоя, пройденнаго солнечными лучами въ моментъ наблюденія, посредствомъ формулы, данной Лапласомъ.

Въ теченіе всего 1881 года было сдѣлано 930 наблюденій, при чемъ продистилировано 2725 литр. воды.

За все это время приборъ, установленный неподвижно, на открытомъ воздухѣ, безъ всякой защиты, не обнаружилъ никакихъ повреждений и сохранился до конца въ отличномъ состояніи безъ большаго ухода и при самыхъ незначительныхъ починкахъ,—что служитъ убѣдительнымъ доказательствомъ его практической пригодности съ этой стороны. Рефлекторъ, по полученнымъ коммиссіей предписаніямъ, былъ предоставленъ днемъ и ночью вліяніямъ перемѣнъ погоды безъ всякаго ухода, кромѣ чистки спиртомъ съ мѣломъ.

Обращаясь къ разбору полученныхъ результатовъ и взявъ среднія изъ чиселъ, доставленныхъ упомянутыми многочисленными наблюденіями, проф. Крова приходитъ прежде всего къ слѣдующимъ общимъ выводамъ:

1) Среднее количество воды, перегнанной дѣйствіемъ всей поверхности зеркала, равно 13,814 литр. въ день, что составляетъ 2,425 литр. на квадр. метръ площади нормальной инсоляціи въ день.

2) Количество теплоты, утилизированной непосредствен-

но въ часъ и на квадратный метръ, равно въ среднемъ 258,8 единицъ теплоты; наибольшая величина, котораго достигало это количество, есть 545,7 ед. тепл.[1])

3) Средняя величина коэффиціента полезнаго дѣйствія инсолатора за годъ равна 0,491, такъ что въ Монпелье приборъ утилизируетъ въ среднемъ около половины падающей теплоты; наименьшее изъ наблюдавшихся значеній этого коэффиціента было 0,204, а наибольшее 0,854[2]).

Стараясь, затѣмъ, выяснить какія обстоятельства преимущественно вліяютъ на величину коэффиціента полезнаго дѣйствія инсолатора, проф. Крова приходитъ къ слѣдующимъ заключеніямъ.

Коэффиціентъ полезнаго дѣйствія не только не пропорціоналенъ тепловой напряженности радіаціи, но даже измѣняется не въ одинаковую сторону. Именно, изъ произведенныхъ актинометрическихъ наблюденій оказывается, что максимумы радіаціи имѣютъ мѣсто въ Монпелье весною, когда воздухъ достигаетъ наибольшей теплопрозрачности вслѣдствіе низкой температуры почвы и сухости воздуха, между тѣмъ какъ на-

---

[1]) Эти числа не безинтересно сравнить съ результатами, найденными Мушо въ Алжиріи; послѣдній, какъ мы видѣли выше, получилъ для средняго количества теплоты, утилизированной на квадр. метръ въ минуту, 8,5 ед. тепл. или 510 ед. тепл. на квадр. метръ въ часъ.

[2]) Въ концѣ статьи читатель найдетъ таблицу, содержащую общій сводъ всѣхъ наблюденій коммиссіи. Помѣщенныя въ этой таблицѣ максимальныя значенія важны въ томъ отношеніи, что они выражаютъ предѣлы, которыхъ можно достигнуть при самыхъ благопріятныхъ обстоятельствахъ. Само собой разумѣется, что всѣ эти численные результаты имѣютъ прямое значеніе только для Монпелье и для того года, въ который работала коммиссія. Однако сравненіе выводовъ изъ метеорологическихъ наблюденій, произведенныхъ въ томъ-же году въ Монпелье, съ выводами изъ одновременныхъ наблюденій на другихъ метеорологическихъ станціяхъ могло бы показать, какъ должны измѣниться для этихъ новыхъ мѣстъ результаты, найденные коммиссіей; но, къ сожалѣнію, на метеорологическихъ станціяхъ пока еще не наблюдается тепловая напряженность солнечной радіаціи,—обстоятельство, которое вообще составляетъ важное препятствіе для строгихъ научныхъ изслѣдованій надъ инсоляторами.

ибольшія значенія коеффиціента полезнаго дѣйствія наблюдаются въ теченіе лѣта, когда радіація сравнительно слабѣе, а температура выше. Это объясняется тѣмъ, что здѣсь беретъ перевѣсъ вліяніе температуры воздуха: чѣмъ эта температура ниже, тѣмъ больше охлаждается котелъ, не смотря на стеклянную оболочку. Другая причина охлажденія кроется въ присутствіи надъ котломъ парового купола; этотъ куполъ, непосредственно соприкасаясь съ воздухомъ, сильно охлаждается и образуетъ какъ-бы холодильникъ, который, какъ показали опыты, сдѣланные при температурахъ ниже нуля, способенъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ обращать въ жидкое состояніе весь паръ, освобождаемый кипящей водой; очевидно, что подобнаго же рода явленіе должно происходить въ меньшихъ размѣрахъ постоянно и сказываться тѣмъ явственнѣе, чѣмъ окружающая температура ниже, что и объясняетъ вполнѣ упомянутое преобладающее вліяніе температуры воздуха.

Это во первыхъ показываетъ, что при конструкціи инсоляторовъ слѣдуетъ уменьшать размѣры купола и,—за невозможностью заключать его въ стеклянный цилиндръ, окружающій котелъ, такъ какъ это увеличило-бы размѣры, цѣну и хрупкость этого сосуда,—покрывать куполъ толстымъ слоемъ войлока или другимъ дурнымъ проводникомъ теплоты; подобными средствами можно было-бы нѣсколько увеличить коеффиціентъ полезнаго дѣйствія.

Кромѣ того, сказанное о вліяніи температуры наружнаго воздуха указываетъ на возможность достигнуть болѣе полной утилизаціи теплоты или большаго *полезнаго дѣйствія*[1]) въ знойныхъ климатахъ, среди высокихъ наружныхъ температуръ. Мы утилизировали-бы всю солнечную теплоту, которую поглощаетъ почерненная поверхность котла, если бы въ окружающемъ воздухѣ и въ стеклянномъ сосудѣ какими-нибудь

[1]) Это есть числитель дроби, которою выражается *коеффиціентъ полезнаго дѣйствія*

средствами поддерживалась температура кипѣнія; въ дѣйствительности, мы будемъ имѣть тѣмъ большее полезное дѣйствіе, чѣмъ наружная температура выше.

Сравнивая между собой наблюденныя въ теченіе одного мѣсяца значенія коеффиціента полезнаго дѣйствія и показанія актинометра при одинаковыхъ температурахъ, оказывается, что этотъ коеффиціентъ измѣняется вообще обратно актинометрическому показанію. Эту особенность проф. Крова объясняетъ слѣдующимъ образомъ.

Солнечныя радіаціи состоятъ, какъ извѣстно, изъ свѣтлыхъ радіацій, которыя передаются черезъ воздухъ и стекло, поглощаются котломъ и идутъ на образованіе въ немъ паровъ, и радіацій темныхъ, которыя составляютъ около двухъ третей полнаго теплового дѣйствія солнечныхъ лучей, достигающихъ земной поверхности. Воздухъ поглощаетъ эти темныя радіаціи съ тѣмъ большей силой, чѣмъ онъ влажнѣе; стекло-же тоже непрозрачно для одной части этихъ радіацій. Чѣмъ теплопрозрачность воздуха больше, тѣмъ солнечныя радіаціи богаче лучами, поглощаемыми стекломъ; слѣдовательно, эти лучи не доходятъ до котла; значитъ коеффиціентъ полезнаго дѣйствія тѣмъ меньше, чѣмъ показаніе актинометра больше. Когда тепловая и свѣтовая прозрачность воздуха слаба,—солнечные лучи достигаютъ прибора уже лишенными части этихъ темныхъ радіацій, для которыхъ стекло непрозрачно; потеря, которую они испытываютъ при прохожденіи черезъ стеклянный цилиндръ, относительно невелика, и коеффиціентъ полезнаго дѣйствія увеличивается. И такъ, можно дѣйствительно сказать, что этотъ коеффиціентъ не возрастаетъ вмѣстѣ съ показаніемъ актинометра и что онъ не измѣняется въ томъ-же направленіи; очень часто онъ мѣняется даже въ обратную сторону.

Это обстоятельство должно вліять на уменьшеніе тѣхъ значеній коеффиціента полезнаго дѣйствія, на которыя можно

было-бы, повидимому, расчитывать при употребленіи инсоляторовъ въ жаркихъ странахъ, гдѣ теплопрозрачность воздуха, а слѣдовательно и напряженность тепловой радіаціи солнца очень значительны; при чемъ, съ другой стороны, не слѣдуетъ забывать, что, при одинаковой напряженности радіаціи, высокія температуры этихъ странъ должны, уменьшая охлажденіе, способствовать увеличенію этого коеффиціента. Важный матеріалъ для рѣшенія этихъ вопросовъ могъ-бы дать отчетъ второй подкоммиссіи, работавшей въ Константинѣ.

Сводя итоги всему сказанному, мы видимъ, что замѣчательный трудъ проф. Крова и его сочленовъ по коммиссіи значительно расширилъ наши познанія о свойствахъ инсоляторовъ, обогативъ ихъ слѣдующими важными положеніями. 1) Полезное дѣйствіе этихъ приборовъ, т. е., количество утилизируемой теплоты, должно возрастать съ температурой воздуха, а слѣдовательно и съ переходомъ въ болѣе знойные климаты. 2). Коеффиціентъ полезнаго дѣйствія обыкновенно измѣняется обратно тепловой напряженности солнечныхъ лучей, такъ что наибольшія значенія этого коеффиціента соотвѣтствуютъ наименьшимъ напряженіямъ тепловой радіаціи; при одинаковомъ напряженіи тепловой радіаціи, коеффиціентъ этотъ возрастаетъ вмѣстѣ съ температурой воздуха. 3) Въ Монпелье, инсоляторы Пифра утилизируютъ въ среднемъ около половины принятой теплоты, а при исключительно благопріятныхъ условіяхъ коеффиціентъ полезнаго дѣйствія можетъ достигать 80 съ лишнимъ процентовъ. 4) Для увеличенія какъ коеффиціента полезнаго дѣйствія, такъ и самаго полезнаго дѣйствія, слѣдуетъ уменьшить куполъ котла и покрывать его дурнымъ проводникомъ теплоты. 5) Со стороны прочности, простоты и практичности наружнаго устройства, приборъ вполнѣ удовлетворителенъ.

Большая часть этихъ заключеній повидимому благопріятна для практической судьбы изслѣдуемыхъ снарядовъ.

Но какъ-бы выгодны ни были условія, среди которыхъ будутъ дѣйствовать инсоляторы, не слѣдуетъ думать, чтобы они, даже въ самыхъ знойныхъ и сухихъ климатахъ, могли замѣнить большія двигательныя машины. Слѣдующій простой разсчетъ показываетъ ясно, что если — на что есть много основаній надѣяться — эти приборы станутъ достояніемъ практики, то только для цѣлей, не требующихъ очень значительныхъ силъ. Это обстоятельство, конечно, нисколько не умаляетъ ихъ практическаго значенія, ибо извѣстно, какую важную роль играютъ въ промышленности и въ жгучемъ рабочемъ вопросѣ такъ называемые малые моторы, пригодные для мелкихъ промысловъ.

Изъ актинометрическихъ наблюденій, произведенныхъ въ 1877 году Віоллемъ (Violle) въ Алжиріи[1]), при весьма благопріятныхъ для тепловой радіаціи условіяхъ (на высотѣ 750 и 993 метр. надъ уровнемъ моря, среди лѣта), получается въ среднемъ для тепловой напряженности солнечныхъ лучей въ мѣстностяхъ, близкихъ къ Сахарѣ, 1008 или круглымъ числомъ 1000 тепловыхъ единицъ въ часъ и на квадратный метръ площади нормальной инсоляціи. Допуская даже, что коеффиціентъ полезнаго дѣйствія инсолатора въ этомъ краѣ достигаетъ 0,8, приборъ утилизировалъ-бы тамъ 800 единицъ теплоты въ часъ и на квадратный метръ полезной площади рефлектора. Предполагая, далѣе, что одинъ килограммъ угля освобождаетъ при горѣніи 8000 тепловыхъ единицъ и что половина этой теплоты утилизируется въ котлахъ паровыхъ машинъ для превращенія воды въ паръ, упомянутые 800 калорій представили-бы теплоту, утилизированную на каждые $\frac{800}{4000}$ килограмма, т. е. на каждые 200 граммовъ угля, что составляетъ для цѣлаго рабочаго дня, допуская, что работа продолжается непрерывно 10 часовъ въ день, — 2 килогр. угля на

[1]) Comptes rendus, t. 86, an. 1878, p. 818—821.

квадратный метръ полезной площади рефлектора. И такъ, инсолаторъ, дѣйствующій при благопріятныхъ условіяхъ въ южныхъ частяхъ Алжиріи, производилъ-бы въ день на каждый квадратный метръ площади нормальной инсоляціи зеркала работу, для которой паровая машина потребовала-бы расхода угля въ 2 килограмма.

Паровая машина безъ охлажденія, съ отсѣчкою на $^1/_4$, при давленіи пара въ 4 атмосф., расходуетъ около 3,5 килогр. угля на паровую лошадь въ часъ, или 35 килогр. угля на паровую лошадь въ 10-часовой рабочій день. Сопоставляя приведенныя числа, мы находимъ, что для питанія паровой машины въ 1 лошадиную силу, въ указанныхъ условіяхъ, потребуется рефлекторъ, котораго площадь нормальной инсоляціи равна $^{35}/_2$ или 17,5 квадр. метр.

Эти цифры показываютъ, что для утилизаціи большихъ количествъ солнечной теплоты пришлось-бы употреблять рефлекторы очень значительныхъ размѣровъ. Но тогда, независимо отъ увеличенія стоимости и вѣса инсолатора, возникло-бы другое важное неудобство: при большой поверхности зеркала сильный вѣтеръ можетъ легко сломать весь приборъ; при опытахъ въ Монпелье, произведенныхъ съ зеркаломъ, коего полезная площадь была всего около 5 квадр. метр., замѣчалось уже это вредное дѣйствіе сильныхъ вѣтровъ. Съ этой точки зрѣнія было-бы выгодно вмѣсто одного большого прибора употреблять одновременно нѣсколько малыхъ.

Изъ приведенныхъ сейчасъ соображеній видно, что мы въ правѣ ожидать дѣйствительной пользы отъ употребленія инсоляторовъ только въ извѣстной, ограниченной области техники,—именно въ области тѣхъ примѣненій, которыя не требуютъ значительныхъ движущихъ силъ, значительнаго расхода энергіи. При обсужденіи вопроса о практической пригодности солнечныхъ пріемниковъ, мы, чтобы не впасть въ заблужденіе, прежде всего не должны терять изъ виду этого ограни-

ченія. Преобладающая роль, которую солнечная радіація играетъ *косвенно* во всей нашей промышленности, способна возбуждать самыя преувеличенныя надежды на изобрѣтеніе, клонящееся къ *непосредственному* пользованію этимъ громаднымъ источникомъ энергіи. Одно изъ самыхъ увлекательныхъ и возвышенныхъ воззрѣній, слагавшихся въ этомъ направленіи, прекрасно очерчено профессоромъ Крова въ вступленіи къ его разсмотрѣнному раньше отчету.

«Каменный уголь», говоритъ проф. Крова, «представляетъ извѣстное количество энергіи, скопленное въ геологическія эпохи въ нѣдрахъ земной коры; мы расходуемъ въ настоящее время этотъ запасъ энергіи, собранный въ теченіе мильоновъ вѣковъ, и, надо также сказать,—мы расточаемъ его. Лучшія паровыя машины требуютъ около одного килограмма угля въ часъ и на паровую лошадь, между тѣмъ какъ по началамъ механической теоріи теплоты можно было-бы съ такимъ-же вѣсомъ топлива получить силу въ десять паровыхъ лошадей, если-бы вся теплота, освобождаемая углемъ при горѣніи, обращалась въ механическую работу.

Промышленность пожираетъ теперь это сбереженіе вѣковъ и возникаетъ вопросъ, на долго-ли ей хватитъ этого запаса. Количество солнечной энергіи, которая скопляется въ наше время въ видѣ растительныхъ продуктовъ, образующихся подъ вліяніемъ солнечной радіаціи, такъ мало въ сравненіи съ постоянно возрастающими нуждами нашей промышленности, что невозможно возлагать никакихъ надеждъ и на этотъ источникъ. Нельзя-ли утилизировать энергію солнечной радіаціи болѣе дѣйствительнымъ путемъ, чѣмъ это дѣлаетъ растительность, заимствуя прямо у солнечныхъ лучей эту движущую силу, которая, своими превращеніями, способна принимать всѣ формы, какія мы отъ нея требуемъ (теплота, работа, электричество, свѣтъ, химическая работа)?»

Прилагая такую широкую мѣрку къ назначенію инсола-

торовъ, естественно приходили къ самымъ невыгоднымъ выводамъ относительно новаго изобрѣтенія. Изъ того, что эти пріемники не способны замѣнить наши большія паровыя машины и вытѣснить употребленіе топлива, заключали, что они вообще лишены практическаго значенія, совершенно забывая при этомъ о болѣе скромныхъ, но настоятельныхъ нуждахъ, которыя ежедневно и повсюду предъявляютъ мелкая промышленность, сельское хозяйство и другія отрасли практической жизни, въ формѣ запроса на малосильные двигатели съ дешевымъ источникомъ энергіи. Призваны-ли инсоляторы *въ этой сферѣ* примѣненій оказать дѣйствительныя услуги — таковъ единственный вопросъ, который подлежитъ обсужденію и рѣшеніе котораго въ утвердительномъ смыслѣ представляется весьма вѣроятнымъ.

Въ умѣренныхъ климатахъ едва-ли можно ожидать существенной пользы отъ употребленія солнечныхъ пріемниковъ [1]), и не столько по сравнительно слабой напряженности тепловой радіаціи и сравнительно низкой температурѣ воздуха въ этихъ мѣстностяхъ, сколько вслѣдствіе слишкомъ непродолжительнаго и неправильнаго солнечнаго освѣщенія [2]).

---

[1]) Съ этимъ соглашается и главный ихъ поборникъ Пиѳръ въ публичной лекціи, читанной имъ недавно на выставкѣ въ Бордо. См. Revue Scientifique, 6 janvier 1883, p. 18.

[2]) Опыты, произведенные мною въ окрестностяхъ Одессы съ караваннымъ инсоляторомъ Пиѳра, котораго рефлекторъ имѣетъ 1 метръ въ діаметрѣ большого основанія и площадь нормальной инсоляціи въ 1,1 квадр. метр., давали со стороны *напряженности дѣйствія* очень удовлетворительные результаты. Такъ напримѣръ, для кипѣнія $2^1/_2$ литр. воды въ 18° Ц. въ лѣтніе мѣсяцы обыкновенно было достаточно 15 минутъ; 1 августа 1882 года, 1 литръ спирта закипѣлъ въ 6 минутъ; и т. д. Но, съ другой стороны, на *правильность дѣйствія* инсоляторовъ въ здѣшнемъ климатѣ трудно расчитывать: изъ только-что изданной А. В. Клоссовскимъ статьи «Климатическія особенности Одессы» (Записки Новороссійскаго Университета, т. 35) видно, что, по 12-лѣтнимъ наблюденіямъ, годовая средняя облачности въ Одессѣ, по 10-бальной шкалѣ, равна 5,7, а число вполнѣ ясныхъ дней въ году, по 10-лѣтнимъ наблюденіямъ, въ среднемъ равно 65,6, изъ коихъ на январь падаетъ 2,2, на февраль 2,9, на мартъ 2,8, на апрѣль 5,6, на май 5,9, на іюнь 6,9, на іюль

Въ Россіи можно было-бы расчитывать на успѣшное дѣйствіе этихъ приборовъ на Кавказѣ, быть можетъ даже въ Крыму, но въ особенности въ безлѣсныхъ степяхъ Туркестана[1]). Непосредственные опыты, сдѣланные въ этихъ мѣстахъ надъ солнечными пріемниками параллельно съ актинометрическими наблюденіями, имѣли-бы большой интересъ. Они, во-первыхъ, показали-бы, что русская промышленность и наши войска (во время переходовъ по знойнымъ степямъ) могутъ ожидать отъ новаго изобрѣтенія; съ другой стороны, связанныя съ ними измѣренія тепловой радіаціи солнца на нашихъ южныхъ окраинахъ доставили-бы цѣнный матеріалъ для изученія картины климатическихъ условій нашего обширнаго отечества.

Такъ часто повторяемый упрекъ, что солнечные пріемники могутъ дѣйствовать только при ясномъ, безоблачномъ небѣ и, слѣдовательно, болѣе или менѣе неправильно, при всей вѣскости его, не можетъ однако имѣть рѣшающаго значенія въ вопросѣ о практической пригодности этихъ приборовъ. Съ одной стороны, этотъ недостатокъ становится тѣмъ менѣе чувствительнымъ, чѣмъ южнѣе мѣстность, гдѣ дѣйствуетъ инсолаторъ. Съ другой, вѣтряные пріемники находятся въ аналогичныхъ условіяхъ, а между тѣмъ извѣстно, какое широкое распространеніе они получили въ послѣднее время въ Америкѣ, гдѣ ихъ употребляютъ или для работъ, въ которыхъ непрерывность дѣйствія составляетъ лишь второстепенное условіе, или-же имѣя въ запасѣ еще другой пріемникъ, водяной, паровой и т. п., вступающій въ дѣйствіе въ то время, когда перестаетъ служить даровая сила вѣтра. Гидравлическія машины имѣютъ также свои періодическіе перерывы въ

6,9, на августъ 12,4, на сентябрь 8,9, на октябрь 6,4, на ноябрь 2,2 и на декабрь 2,5.

[1]) Изъ имѣющихся данныхъ объ облачности въ различныхъ частяхъ Россіи видно, что наименьшей облачностью отличается область Аральскаго моря; она выражается числомъ 3,1 по 10-бальной шкалѣ. См. упомянутую статью А. В. Клоссовскаго, стр. 43.

работѣ, зависящіе отъ времени года. Въ очень южныхъ краяхъ, гдѣ солнце свѣтитъ съ большимъ постоянствомъ, инсоляторы, по характеру и степени правильности дѣйствія, должны даже стать ближе къ водянымъ, чѣмъ къ вѣтрянымъ пріемникамъ.

Но вполнѣ устранить этотъ недостатокъ, общій всѣмъ пріемнымъ машинамъ, черпающимъ энергію непосредственно изъ какого-нибудь природнаго источника, можно будетъ только съ изобрѣтеніемъ выгоднаго и удобнаго средства скоплять собираемую энергію въ особыхъ аккумуляторахъ, съ тѣмъ чтобы пользоваться этимъ запасомъ, когда представится надобность, и даже переносить его на разстоянія.

«Крупный шагъ въ этомъ направленіи былъ сдѣланъ въ самое недавнее время. Промышленное примѣненіе магнито-электрическихъ и динамо-электрическихъ машинъ для полученія свѣта, теплоты, механической работы и химическихъ дѣйствій позволяетъ пользоваться естественными источниками силы, теченіями или паденіями воды и вѣтромъ, для преобразованія ихъ въ какую-либо изъ перечисленныхъ формъ энергіи. Возможность скоплять, аккумулировать, полученную такимъ образомъ энергію достигнута недавно Планте (Planté) посредствомъ его вторичныхъ батарей, усовершенствованныхъ Форомъ (Faure)[1]; такъ что отнынѣ можно будетъ, чтобы утилизировать эти прерывающіяся и неправильныя силы природы, скоплять ихъ въ аккумуляторахъ и расходовать по мѣрѣ надобности запасенную въ нихъ энергію или перенося аккумуляторы въ мѣсто, гдѣ ею хотятъ воспользоваться, или-же канализируя электрической передачей этотъ запасъ энергіи посредствомъ проволочныхъ проводовъ до машины, которую онъ долженъ приводить въ движеніе. Спрашивается, можно-ли

---

[1]) Объ этомъ см. сообщеніе, сдѣланное Reynier въ Société d'Encouragement de l'Industrie Nationale (Bulletin de la Soc. d'Encour., t. VIII, an. 1881, p. 288) и изложенное въ L'année scientifique par Figuier за 1881 г., p. 84—93.

этотъ пріемъ, примѣнимый отнынѣ практически къ работѣ теченій или паденій воды и къ работѣ вѣтра, распространить также на источникъ, питающій всѣ силы природы, т. е., на солнечную радіацію?»[1])

Сохраненія теплоты, собираемой инсоляторами, спачала думали достигнуть, концентрируя ее въ массахъ воды или въ другихъ тѣлахъ, защищенныхъ отъ охлажденія дурно проводящими теплоту оболочками; но пріемъ этотъ едва-ли можетъ быть примѣненъ въ дѣйствительности. Гораздо большаго вниманія заслуживало предложеніе Мушо употреблять теплоту, собираемую въ фокусѣ зеркала инсолятора на нагрѣваніе термо-электрическаго столба, производя такимъ образомъ токъ, котораго энергію можно затѣмъ утилизировать для извѣстной цѣли. Эта мысль выиграла еще значительно съ недавнимъ открытіемъ Планте и Фора, ибо полученную посредствомъ термо-электрическаго столба энергію можно теперь скоплять въ электрическихъ аккумуляторахъ, чѣмъ въ принципѣ и рѣшается утвердительно поставленный выше вопросъ.

Но въ практическомъ отношеніи и отъ этой на первый взглядъ столь увлекательной мысли повидимому нельзя ожидать удовлетворительныхъ результатовъ. Самые лучшіе термоэлектрическіе столбы утилизируютъ въ формѣ электрической энергіи лишь чрезвычайно малую долю сообщенной имъ теплоты, а на скопленіе этой энергіи въ аккумуляторы пришлось бы потратить еще нѣкоторую ея часть. Превращая такимъ образомъ солнечную энергію въ теплоту, а послѣднюю въ электричество, мы теряли-бы при первомъ переходѣ отъ 20 до 50 процентовъ начальнаго количества, а при второмъ еще несравненно больше[2]). Только въ исключительныхъ случаяхъ такая значительная потеря могла-бы съ выгодой вознаграждаться тѣмъ обстоятельствомъ, что первоначальный источникъ энергіи — даровой.

---

[1]) Crova, Rapport etc., p. 6.
[2]) Ibid., p. 40.

Но если въ настоящее время и не найдено еще средства съ выгодой скоплять собираемую инсоляторами даровую энергію, то все-же нельзя не видѣть въ этихъ приборахъ замѣчательнаго изобрѣтенія, призваннаго, по всей вѣроятности, оказать важныя услуги обитателямъ южныхъ странъ.

4 января 1883 года,
Одесса.

ОБЪЯСНЕНІЕ ЧЕРТЕЖЕЙ.

Черт. 8: инсолаторъ Мушо 1864—1869 г.

A — металлическій сосудъ съ нагрѣваемой жидкостью.

B — стеклянный сосудъ.

C — стеклянная крышка.

D — цилиндрическое металлическое зеркало съ круговымъ или параболическимъ основаніемъ.

Черт. 10: инсолаторъ Мушо, дѣйствовавшій въ Турѣ въ 1874 — 1875 г.

A — стеклянный колоколъ.

B — кольцеобразный котелъ.

D — отводящая трубка.

E — трубка для питанія котла водой.

F — прямоугольно-коническое посеребренное зеркало.

GG — валъ, вокругъ котораго происходитъ движеніе съ востока на западъ.

H — зацѣпленіе, регулирующее наклоненіе прибора къ валу *GG* сообразно времени года.

I — предохранительный клапанъ.

K — манометръ.

L — водомѣрная трубка.

Черт. 11: инсолаторъ Мушо, дѣйствовавшій на всемірной выставкѣ 1878 г.

M — зубчатый секторъ, позволяющій посредствомъ винта *m* наклонять приборъ сообразно широтѣ мѣста.

N — кардановское движеніе, дающее возможность, при посредствѣ коническихъ зубчатыхъ колесъ, колеса *r* и зубчатаго сектора, перемѣщать приборъ отъ востока къ западу.

S — зубчатый секторъ, позволяющій посредствомъ винта *o* наклонять приборъ сообразно времени года.

F — трубчатый котелъ, окруженный стеклянным цилиндромъ.

H — паровой куполъ.

I — предохранительный клапанъ.

K — чугунное основаніе котла.

L — прямоугольно-коническій посеребренный рефлекторъ.

U — винтъ съ маховикомъ, служащій для укрѣпленія прибора разъ установленнаго по широтѣ мѣста.

Фиг. 14: инсолаторъ Пифра, дѣйствовавшій въ Монпелье въ 1881 г.

R — сложно-коническій посеребренный рефлекторъ.

C — котелъ.

C' — паровой куполъ.

A — ось вращенія рефлектора въ вертикальной плоскости.

E — вѣнецъ, по которому вращается горизонтально-оріентирующая платформа.

M — рукоятка, управляющая зубчатыми колесами и зубчатой дугой *K*, которая поднимаетъ рефлекторъ, вращая его около оси *A*.

P — насосъ для питанія котла водой, всасывающій воду посредствомъ каучуковой трубки *T* изъ резервуара *S* и нагнетающій эту воду въ котелъ чрезъ каучуковую трубку *T'*.

T'' — мѣдная трубка, проводящая паръ изъ котла, при посредствѣ другой каучуковой трубки *O* и неподвижной трубки *U*, въ змѣевикъ *H*, изъ котораго дистилированная вода стекаетъ въ цинковый резервуаръ *Q*, снабженный дѣленіями.

V — водомѣрная трубка.

ПРИБАВЛЕНІЯ.

I.

Списокъ сочиненій и статей объ инсолаторахъ Мушо и Пифра.

1864. *Mouchot, A.* Sur les effets mécaniques de l'air confiné, échauffé par les rayons du soleil. Comptes rendus de l'Académie des sciences. T. 59, p. 527.

1868. *Mouchot.* Emploi de la chaleur solaire pour remplacer le combustible dans certaines contrées. Ibid. T. 67, p. 1182—1183.

1869. *Mouchot.* La chaleur solaire et ses applications industrielles. Paris. Gauthier-Villars.

1871. *Bertrand, J.* La chaleur solaire et ses applications industrielles, par A. Mouchot. Journal des savants. An. 1871, p. 393—405.

1875. *Mouchot.* Résultats obtenus dans les essais d'applications industrielles de la chaleur solaire. Comptes rendus T. 81, p. 571—574.

1876. *Simonin, L.* L'emploi industrielle de la chaleur solaire. Revue des deux mondes. T. 15, p. 200—213.

— *Mouchot.* Application industrielle de la chaleur solaire. Comptes rendus. T. 83, p. 655—656.

1878. *Mouchot.* Résultats d'expériences faites en divers points de l'Algérie pour l'emploi industriel de la chaleur solaire. Ibid. T. 86, p. 1019—1021.

1878. *Pifre, A.* Utilisation de la chaleur solaire (Conférence faite au palais du Trocadéro). Annales du Génie Civil. Numéro de décembre 1878.

1879. *Mouchot.* La chaleur solaire et ses applications industrielles. 2-me édition, revue et considérablement augmentée. Paris. Gauthier-Villars.

— *Pifre.* Communication à la Société des Études Coloniales et Maritimes. Bulletin de la Société. Numéro de mai 1879.

1880. *Mouchot.* Utilisation industrielle de la chaleur solaire. Comptes rendus. T. 90, p. 1212—1213.

— *Pifre.* Appareils solaires et les services qu'ils peuvent rendre. Mémoires et Compte rendu de la Société des Ingénieurs Civils. 4-me série. 33-me cahier, p. 270—282.

— *Pifre.* Mémoire sur les appareils solaires et les services qu'ils peuvent rendre dans les travaux et l'exploitation du chemin de fer du Transsaharien. Paris. Marchadier.

— *Pifre.* Nouveaux résultats d'utilisation de la chaleur solaire obtenus à Paris. Comptes rendus. T. 91, p. 388—389.

1881. *Mouchot.* Sur le miroir conique. Réponse à une Communication de M. Pifre. Comptes rendus. T. 92, p. 1285—1286.

1882. *Crova, A.* Étude des appareils solaires. Ibid. T. 94, p. 943—945

— *Crova.* Rapport sur les expériences faites à Montpellier pendant l'année 1881 par la Commission des appareils solaires Mémoires de l'Académie des Sciences et Lettres de Montpellier. Section des Sciences. T. 10.

1882. *Royaumont, L.* La conquête du soleil. Applications scientifiques et industrielles de la chaleur solaire (Héliodynamique). Paris. Marpon et Flammarion.

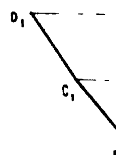
1883. *Pifre.* L'Héliodynamique et les applications de la chaleur solaire (Conférence faite à l'Exposition de Bordeaux). Revue Scientifique. 3-me série. T. 31, p. 15—19.

II.

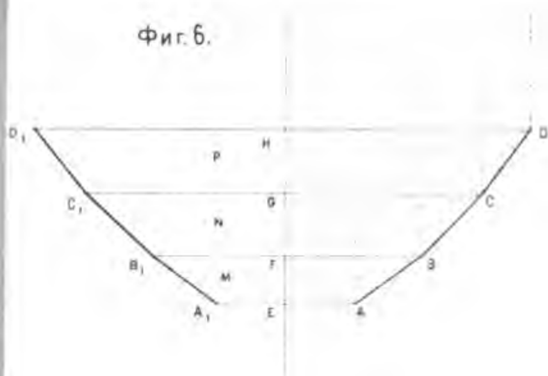
Сводъ наблюденій въ Монпелье за 1881 годъ.

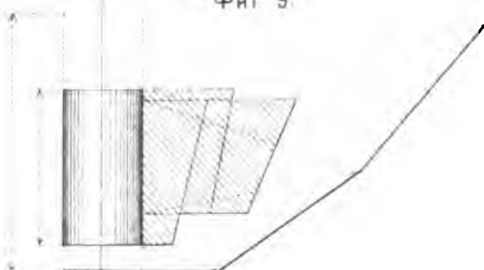
	Полный объемъ воды, перегнанной въ часъ.	Количество теплоты, утилизированной на квадр. метръ въ часъ.	Актинометрическое показаніе на квадратный метръ въ часъ.	Коеффиціентъ полезнаго дѣйствія.
		Зима		
Средняя дней . .	2л., 330	199ед. т., 1	377ед. т., 0	0,439
Абсолютный максимумъ.	3,500 (11 фев. въ 1 часъ)	401,2 (11 фев. въ 1 ч.)	750 (29 дек. въ 11 ч. 15 м.)	0,525 (27 дек. въ 2 ч.)
Абсолютный минимумъ.	0,200 (14 дек въ 3 ч.)	40,0 (14 дек. въ 3 ч.)	480,0 (27 дек. въ 2 ч.)	0,374 (24 дек. въ 3 ч.)
		Весна		
Средняя дней . .	2,326	291,23	616,4	0,479
Абсолютный максимумъ. . . .	4,300 (23 мая въ 12 ч. 30 м.)	432,2 (23 мая въ 2 ч. 30 м.)	945,0 (25 апр. въ 10 ч. 30 м.)	0,747 (25 апр въ 1 ч.)
Абсолютный минимумъ. . . .	0.400 (28 мая въ 1 ч. 10 м.)	75,1 (21 мая въ 11 ч.)	396,0 (3 мая въ 11 ч.)	0,308 (17 мая въ 9 ч. 20 м.)
		Лѣто		
Средняя дней . .	2,739	307,7	635,9	0,569
Абсолютный максимумъ. . . .	4,750 (19 іюл. въ 1 ч.)	545,7 (15 іюн. въ 12 ч 15 м.)	840,0 (30 іюн. въ 10 ч. 15 м.)	0,854 (14 іюн. въ 1 ч.)
Абсолютный минимумъ. . . .	0,900 (9 іюня въ 3 ч.)	51,0 (9 іюн. въ 3 ч.)	264.0 (5 іюля въ 9. ч. 25 м.)	0,204 (25 іюн. въ 2 ч. 15 м.)
		Осень		
Средняя дней . .	2,079	237,5	635,1	0,477
Абсолютный максимумъ.	3,500 (17 окт. въ 10 ч. 25 м.)	409,4 (17 окт. въ 9 ч. 25 м.)	846,0 (26 окт. въ 8 ч. 40 м).	0,618 (12 сен. въ 1 ч.)
Абсолютный минимумъ.	0,600 (29 нояб въ 2 ч. 30 м.)	89.4 (29 нояб. въ 2 ч. 30 м.)	258,0 (7 сен. въ 12 ч. 50 м.)	0,318 (26 сен въ 9 ч. 25 м.)
		Годъ		
Средняя врем. года	2,368	258,8	616,1	0,491
Абсолютный максимумъ. . . .	4,750 (19 іюл. въ 1 ч.)	545,7 (15 іюн. въ 12 ч. 15 м.)	945,0 (25 апр. въ 10 ч. 30 м.)	0,854 (14 іюн. въ 1 ч.)
Абсолютный минимумъ. . . .	0,200 (19 іюн. въ 3 ч. 14 дек. въ 3 ч.)	40,0 (14 дек. въ 3 ч.)	89,4 (29 нояб. въ 2 ч. 30 м.)	0,204 (25 іюн. въ 1 ч. 15 м.)

ф



Фиг. 13.


Фиг. 6.
D₁
H
D
P
C₁
G
C
N
B₁
F
B
M
A₁
E
A


Фиг. 9.

Фиг. 13.

Литература вопроса о сложныхъ циркуляхъ.

Проѳ. *В. Н. Лигина.*

Въ предлагаемый списокъ трудовъ о сложныхъ циркуляхъ (системахъ шестовъ, соединенныхъ шарнирами), публикуемый какъ матеріалъ для изученія одного изъ самыхъ интересныхъ въ теоретическомъ отношеніи вопросовъ прикладной Кинематики, включены, кромѣ многочисленныхъ изслѣдованій, которыхъ положило начало замѣчательное открытіе Поселье, также работы о трехшестной системѣ, служащей основаніемъ параллелограмма Уатта, и о другихъ аналогичныхъ системахъ для приближеннаго рѣшенія задачи о прямолинейномъ движеніи. Статьи приведены по годамъ, въ хронологическомъ порядкѣ.

1. **1796**. *Prony, G.* — Nouvelle Architecture Hydraulique, tom. II, pag. 123 et suiv.
2. **1823**. *Prony, G.* — Sur le parallélogramme du balancier de la machine à feu. Annales de Chimie et de Physique, t. XIX. Annales des Mines, 1-re série, t. XII.
3. **1838**. *Vincent, A.*—Essai d'une théorie du parallélogramme de Watt. Lille.
4. **1853**. *Carbonnelle.* — Sur la théorie géométrique du parallélogramme de Watt. Bulletin de l'Acad. de Belgique.

5. *Tchébychew, P.* — Théorie des mécanismes connus sous le nom de parellélogrammes. Mémoires des savants étrangers présentés à l'Acad. de St. Petersbourg, t. VII.

6. **1861**. *Tchébychew, P.* — Sur une modification du parallélogramme articulé de Watt. Bullet. de l'Acad. de St. Petersbourg, t. IV, p. 433—438.

7. **1864**. *Peaucellier, A.* — Lettre au redacteur des Nouvelles Annales de Mathématiques. Nouv. Annal. de Math., 2-me série, t. III, p. 414—415.

8. **1867**. *Mannheim, A.* — Communications sur le compas composé de M. Peaucellier. Bullet. de la Société Philomatique de Paris, procès-verbaux des séances du 20 et 27 Juillet 1867, p. 124, 126.

9. *Чебышевъ, П.*—Сообщенiе объ измѣненiяхъ въ параллелограммѣ Уатта. Матем. Сборникъ, издаваемый Московск. Матем. Обществомъ, т. III, стр. I. (Помѣщено одно заглавiе.)

10. **1868**. *Peaucellier, A.* et *Wagner.* — Mémoire sur un appareil diastimométrique nouveau, dit appareil autoréducteur, note XIV. Mémorial de l'Officier du Génie, № XVIII, p. 351.

11. *Чебышевъ, П.* — Объ одномъ механизмѣ. Записки Акад. наукъ, т. XIV, стр. 38—46.

12. **1869**. *Roberts, S.* — On the mechanical description of some species of circular curves of the third and fourth degrees. Proceedings of the London Mathematical Society, t. II, p. 125—136.

13. *Чебышевъ, П.*—О параллелограммахъ. Труды 2-го Съѣзда Русск. Естествоиспытателей, ч. I.

14. **1870**. *Cayley, A.* — On the mechanical description of a nodal bicircular quartic. Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. III, p. 100—106.

15. **1871**. *Lipkin, L.* — Ueber eine genaue Gelenk-Gerad-führung. Bullet. de l'Acad. de St. Petersbourg, t. XVI, p. 57—60.

16. *Lipkin, L.* — .... Revue Universelle des Mines et de la Metallurgie de Liège, t. XXX, 4-me livraison, p. 149—150.

17. **1872**. *Cayley, A.* — On the mechanical description of certain sextic curves. Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. IV, p. 105—111.

18. *Cayley, A.* — On the mechanical description of a cubic curve. *Ibid.*, p. 175—178.

19. *Kempe, A. B.* — On the solution of equations by mechanical means. The Messenger of Mathematics, t. I, p. 51—52.

20. **1873**. *Peaucellier, A.* — Note sur une question de Géométrie de compas. Nouv. Annal. de Math., 2-me série, t. XII, p. 71—79.

21. *Peaucellier, A.* — Note sur un balancier articulé à mouvement rectiligne. Journal de Physique, publié par M. J. d'Almeida, t. II, p. 388—390.

22. *Lemoine, É.* — Note sur le losange articulé du commandant du Génie Peaucellier, destiné à remplacer le parallélogramme de Watt. *Ibid.*, p. 130—134.

23. *Sylvester, J. J.* — Description of a new instrument for converting circular into general rectilinear motion. and into motion in conics and higher plane curves. Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. V, p. 4,141.

24. **1874**. *Sylvester, J. J.* — On recent discoveries in me-

chanical conversion of motion. Friday evening's discourse at the Royal Institution (January 23-rd).

25. *Sylvester*, *J. J.*—Transformation du mouvement circulaire en mouvement rectiligne. Lecture à l'Institution Royale de la Grande-Bretagne. Revue Scientifique, 2-me sér., t. IV, p. 490 — 498. Les Mondes, 2-me sér., t. XXXVII, p. 623—635, 667—675.

26. *Sylvester*, *J. J.*—Des systèmes articulés; instrument réciprocateur du colonel Peaucellier; description des courbes et surfaces algébriques par le moyen de tiges articulées. Compte rendu de la 3-me session de l'Association Française pour l'avancement des sciences (Congrès de Lille), p. 1156 — 1157. (Содержаніе этого сообщенія изложено подробнѣе въ Revue Scientifique, 2-me sér., t. VIII, p. 640—641.)

27. *Sylvester*, *J. J.* — Question 4231 (solution by *G. S. Carr*, *N'Importe*). Mathematical Questions from the «Educational Times», edited by W. J. C. Miller, t. XXI, p. 57—60.

28. *Sylvester*, *J. J.* Question 4320 (solution by *G. S. Carr*, *J. Wolstenholme*). *Ibid.*, p. 57, 111.

29. *Hart*, *H.* — On certain conversions of motion. Messeng. of Math., t. IV, p. 82—88, 116—120. Report of the 44 Meeting of the British Association for the advancement of science (Meeting of Belast), p. 17—18.

30. *Kempe*, *A. B.* — On some new linkages. Messeng. of Math., t. IV, p. 121—124.

31. *Penrose*, *J. C.* — On a method of drawing, by

continued motion, a very close approximation to the parabola, proposed with a view to its possible application to figuring reflectors. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, t. XXXIV, p. 265—267.

32. *Ellis, J. C. W.* — On some models of Peaucellier's and other parallel motion. Proceed. of the Cambridge Philosophical Society, t. II, p. 334—338.

33. *Hayden, W.* — On approximate parallel motion. Report of the 44 Meeting of the Brit. Assoc. for the advanc. of science (Meeting of Belfast), p. 18. (Одно заглавіе.)

34. *Perigal, H.* — Link Trammels. Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. V, p. 25, 144.

35. *Mannheim, A.* — Une construction, due à M. Hart, d'un appareil plus simple que celui de M. Peaucellier, pour obtenir le mouvement rectiligne d'un point, au moyen de tiges articulées. Bullet. de la Société Mathématique de France, t. III, p. 17. (Одно заглавіе.)

36. *Mannheim, A.* — Construction de deux systèmes articulés décrivant une conique au moyen de sept tiges. *Ibid.* (Одно заглавіе.)

37. *Mannheim, A.* — Procédé pour décrire une anallagmatique du 4-me ordre à l'aide d'un appareil à tiges articulées semblable à celui de M. Peaucellier, en remplacant le losange par un quadrilatère à côtés inégaux, mais à diagonales rectangulaires. *Ibid.* (Одно заглавіе; содержаніе этого сообщенія см. Nouv. Ann. de Math., 2-me sér., t. XIV, p. 542—543.)

38. *Mannheim, A.* — Deux lettres à M. Sylvester. Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. VI, p. 35 — 36.

39. *Saint-Loup.* — Résolution de l'équation du troisième dégrè à l'aide d'un système articulé. Comptes rendus de l'Acad. des sciences de Paris, t. LXXIX, p. 1323—1324.

40. *Lemoine, É.* — Le losange articulé du colonel Peaucellier. Compte rendu de la 3-me session de l'Assoc. Franç. pour l'avanc. des sciences (Congrès de Lille), p. 122—125. См. также Revue Industrielle, № du 11 Nov. 1874 и Annales Industrielles, № du 21 Juin 1874.

41. **1875.** *Sylvester, J. J.*—On the expression of the curves generated by any given system whatever of linkwork under the form of an irreductible determinant. Proc. of the Lond. Math. Soc., t. VI, p. 78, 196—197.

42. *Sylvester, J. J.* — An orthogonal web. *Ibid.*, p. 101, 197.

43. *Sylvester, J. J.* — The mode of construction of a new sort ot lady's fan. *Ibid.*, p. 78, 196. См. также Math. Quest. from the Educ. Times, t. XXXIII, question 5357, p. 97.

44. *Sylvester, J. J.*—On the representation of any unicursal curve and its nodes in terms of the parametric coefficients and on Robert's cases of unicursal tree-bar motion. Proc. of the Lond. Math. Soc, t. VI. p. 37. (Одно заглавіе.)

45. *Sylvester, J. J.* — On James Watt's parallel motion. *Ibid.*, p. 139. (Одно заглавіе).

46. *Sylvester, J. J.* — Question 4591 (solution by

E. B. Elliot). Math. Quest. from the Educ. Times, t. XXIII, p. 43.

47. *Sylvester*, *J. J.* — Question 4637 (solution by *E. B. Elliot* and others). *Ibid.*, p. 59—60.

48. *Sylvester*, *J. J.* — Question 4660 (solution by *S. A. Renshaw* and others). *Ibid.*, p. 71—73.

49. *Cayley*, *A.*—On the question of the mechanical description of a Cartesian. Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. VI, p. 83.

50. *Cayley*, *A.* — On some figures of curves in three-bar motion. *Ibid.*, p. 139. (Одно заглавіе.)

51. *Hart*, *H.* — On the mechanical description of a sphero-conic. *Ibid.*, p. 136—137.

52. *Hart*, *H.*—A parallel motion. *Ibid.*, p. 137—139.

53. *Darwin*, *G. H.* — A mechanical method of making a force which varies inversely as the square of the distance from a fixed point. *Ibid.*, p. 113 — 114. См. также Messeng. of Math., t. V, p. 13.

54. *Darwin*, *G. H* — The mechanical description of equipotential lines. Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. VI, p. 115—117.

55. *Laverty*, *W. H.* — Extension of Peaucellier's theorem. *Ibid.*, p. 84—85.

56. *Roberts*, *S.* — On three-bar motion in plane space. *Ibid.*, t. VII, p. 14—23.

57. *Kempe*, *A. B.* — On a general method of producing exact rectilinear motion by linkworks. Proceed. of the Royal Society of London, t. XXIII, p. 565—577.

58. *Johnson*, *W. W.*—The Peaucellier machine and other linkages. The Analyst, t. II, p. 41—45.

59. *Peaucellier, A.* — Transformation du mouvement circulaire en mouvement rectiligne à l'aide d'un système de cinq tiges. Revue Scientifique, 2-me sér., t. VIII, p. 951 — 952.

60. *Peaucellier, A.* — Note sur l'emploi des systèmes articulés à liason complète en Géométrie, en Mécanique et dans les sciences appliquées. Mémorial de l'Off. du Génie, № XXV, p. 369—389.

61. Rapport à la suite duquel le prix de Mécanique de la ondation Montyon pour l'année 1874 a été décerné par l'Académie des sciences à M. Peaucellier (Commissaires: M. M. Morin, Rolland, Phillips, Tresca, de Saint-Venant, Resal rapporteur). Comptes rendus de l'Acad., t. LXXX, p. 1469 — 1470. Mémorial de l'Off. du Génie, № XXV, p. 366—368.

62. *Lemoine, É.* — Sur le système articulé à cinq tiges de M. Hart. Revue Industrielle, № du 12 Avril 1875.

63. *Laisant, C. A.*—Note sur un compas trisecteur. Compte rendu de la 4-me sess. de l'Assoc. Franç. pour l'avanc. des sciences (Congrès de Nantes), p. 161—163.

64. *Brocard, H.* — Note sur un compas trisecteur, proposé par M. Laisant. Bullet. de la Soc. Math. de France, t. III, p. 47—48.

65. *Perrin.* — Note sur la division mécanique de l'angle. *Ibid.*, t. IV, p. 85—87.

66. *Saint-Loup.* — Des systèmes articulés simples et multiples et de leurs applications. Besançon. (Extrait des Mémoires de la Société d'Émulation du Doubs).

67. *Liguine*, *V.* — Sur les systèmes articulés à six tiges. Compte rendu de la 4-me sess. de l'Assoc. Franç. pour l'avanc. des sciencés (Congrès de Nantes), p. 208—224.

68. *Liguine*, *V.* — Sur les systèmes de tiges articulées. Nouv. Ann. de Math., 2-me sér., t. XIV, p. 529 — 561. Repertorium der rein. und angew. Mathematik, herausg. von L. Königsberger und G. Zeuner, t. I, p. 95—101.

69. *Hoppe*, *R.* — Ueber das Problem der Geradführung eines Punktes. Grunert's Archiv für Mathem., t. LVIII, p. 215.

70. *August*, *F.* — Beweis des Peaucellier'schen Satzes. *Ibid.*, p. 216.

71. **1876.** *Cayley*, *A.* — Three-bar motion. Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. VII, p. 136—166.

72. *Kempe*, *A. B.* — On a general method of describing plane curves of the n-th degree by linkwork. *Ibid.*, p. 213—216. См. также Messeng. of Math., t. VI, p. 143—144.

73. *Hart*, *H.* — On the mechanical description of the limacon and the parallel motion deduced there from. Messeng. of Math., t. V, p. 35—39.

74. *Greenhill*, *A. G.* — Mechanical solution of a cubic by a quadrilateral linkage. *Ibid.*, p. 162—163.

75. *Johnson*, *W. W.* — On three-bar motion. *Ibid.*, p. 50—52.

76. *Johnson*, *W. W.* — Note on the kite-shaped quadrilateral. *Ibid.*, p. 159—160.

77. *Johnson*, *W. W.* — Note on four-bar linkages. *Ibid.*, p. 190—192.

78. *Johnson, W. W.* — Recent results in the study of linkages. The Analyst, t. III, p. 42—46, 70—74.

79. *Wilson, J.* — On parallel motions. Proceed. of the Royal Society of Edinburgh, t. IX, p. 161—170.

80. *Hayden, W.* — On parallel motion. Report of the 46 Meeting of the Brit. Assoc. for the advanc. of science.

81. *Tchébychew, P.* — Nouveau mécanisme à mouvement parallèle. Compte rendu de la 5-me sess. de l'Assoc. Franç. pour l'avanc. des sciences (Congrès de Clermont-Ferrand), p. 140. (Одно заглавіе.)

82. *Mansion, P.* — Les compas composés de Peaucellier, Hart et Kempe. Nouvelle Correspondance Mathématique, t. II, p. 129—130.

83. *Brocard, H.* — Sur la division mécanique de l'angle. Bullet. de la Soc. Math. de France, t. V, p. 43—47.

84. *Kirsch.* — Zur Theorie der Geradführungen. Der Civilingenieur, neue Folge, t. XXII, p. 321—336.

85. **1877.** *Hart, H.* — The kinematic paradox. Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. VIII, p. 261. (Одно заглавіе; содержаніе см. Messeng. of Math., t. VII, p. 55, 189—190, и The Nature, t. XVI, p. 95.)

86. *Hart, H.* — A Method of solving by linkwork $f(x) = 0$, an algebraical equation of the n-th degree. Proceed. of the Lond. Math. Soc, t. VIII, p. 261. (Одно заглавіе; содержаніе см. Messeng. of Math., t. VII, p. 56.)

87. *Hart*, *H*, — Generalization of cases of five-bar motion considered at the April Meeting. Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. VIII, p. 261. (Одно заглавіе; содержаніе см. Messeng. of Math., t. VII, p. 56.)

88. *Hart*, *H.*—On the Cassinian. Messeng. of Math., t. VI, p. 172.

89. *Hart*, *H.* — On the production of circular and rectilinear motion. *Ibid.*, t. VII, p. 56.

90. *Hart*, *H.* — On some cases of parallel motion. Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. VIII, p. 286—289. Messeng. of Math., t. VII, p. 13.

91. *Kempe*, *A. B.* How to draw a straight line. The Nature, t. XVI, p. 65—67, 86 — 89. Также отдѣльн. книжкой, изданной у Macmillan and Comp., London (Nature Series).

92. *Kempe*, *A. B.* — Sur la production du mouvement rectiligne exact au moyen de tiges articulées. Trad. de l'anglais par V. Liguine. Nouv. Corresp. Math, t. III, p. 129—139, 177—186.

93. *Sylvester*, *J. J.* — Question 5327 (solution by *G. S. Carr*, *J. J. Sylvester*). Math. Quest. from the Educ. Times, t. XXVIII, p. 24.

94. *Zeuthen*. *H. G.* — Nogle Exempler paa leddede Stangsystemer. Tidsskrift for Mathematik, udgiwet of Zeuthen (Kopenhagen), ser. 4, t. I, p. 161—174.

95. *Burmester*, *L.* — Ueber die Geradführung durch das Kurbelgetriebe. Civilingenieur, t. XXII, p. 597—606.

96. *Hülsenberg*, *A.* — Beitrag zur Theorie des Universalcirkels von Peaucellier, mit besonderer

Berücksichtigung seiner Anwendung als vollkommene Geradführung. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, t. XXI, p. 7—16, 49—56.

97. *Rittershaus, T.*—Zur Frage der Gelenk-Geradführung. *Ibid.*, p. 218—226.

98. *Лигинъ, В.* — О сложныхъ циркуляхъ и ихъ примѣненіи къ механическому рѣшенію уравненій. Записки Математ. Отдѣленія Новор. Общества Естествоиспытателей, т. III, протоколъ засѣданія 9 Апрѣля 1877 года.

99. *Лигинъ, В.*—Замѣтка о способѣ Кемпе для механическаго рѣшенія уравненій. Записки Новорос. Университета, т. XXII, стр. 149 — 156.

100. **1878.** *Kempe, A. B.* — On a property of the four-piece linkage and on a curious locus in linkages. Proceed. of the Lond. Math. Soc. t. IX, p. 75. (Одно заглавіе.)

101. *Kempe, A. B.* — On conjugate four-piece linkages. *Ibid.*, p. 133—147.

102. *Clifford, W. K.*—On the triple generation of three-bar curves. *Ibid.*, p. 27—28.

103. *Perigal, H.* — On a kinematic paradox (the Rotameter). *Ibid.*, t. X, p. 28. (Одно заглавіе.)

104. *Kennedy, A.* — Notes on the geometric solution of some statical problems connected with mechanisms (linkworks). *Ibid.*, t. IX, p. 221—225. См. также Messeng. of Math., t. VIII, p. 27.

105. *Tchébychew, P.* — Sur les parallélogrammes les plus simples symétriques autour d'un axe. Compte rendu de la 7-me sess. de l'As-

soc. Franç. pour l'avanc. des sciences (Congrès de Paris), p. 159—163.

106. *Чебышевъ*, *П.* — О параллелограммахъ, состоящихъ изъ трехъ элементовъ и симметрическихъ около одной оси. Записки Акад. наукъ, т. XXXIV, приложеніе 3.

107. *Чебышевъ*, *П.* — О простѣйшихъ сочлененіяхъ. Матем. Сборникъ, издав. Московск. Матем. Обществ., т. IX, стр. 340—351.

108. *Léauté*, *H.* — Sur les systèmes articulés. Comptes rendus de l'Acad. des sciences, t. LXXXVII, p. 151—154.

109. *Thiebaut*, *G.* — Note sur le système articulé de M. Peaucellier. Nouv. Ann. de Math., 2-me sér., t. XVII, p. 258—261.

110. *Lawrence*, *E. J.* — Conic constructions. Math. Quest. from the Educ. Times, t. XXIX, p. 74.

111. *Moncourt*. — Question 5696. Solution by *J. J. Walker*. *Ibid.*, t. XXX, p. 28—29.

112. *Maiss*, *F.* — Aehnlichkeiten einiger gebräuchlicher Geradführungen auf kinematischer Grundlage. Zeitschr. des Ver. deutsch. Ingen., t. XXII, p. 334—336.

113. *De Roos*, *J. D. C.*—Jets over de gekoppelde krukbeweging. Nieuw Archief voor wiskunde (Amsterdam), t. IV, p. 125—150.

114. *Жуковскій*, *Н.* — Описаніе прибора Кемпе для рѣшенія уравненій высшихъ степеней. Труды Политехническаго Общества при Московскомъ Техническомъ Училищѣ, выпускъ 1.

115. **1879**. *Darboux*, *G.* — De l'emploi des fonctions él-

liptiques dans la théorie du quadrilatère plan. Bulletin des sciences Mathématiques et Astronomiques, 2-me sér., t. III, p. 109—208. Comptes rendus de l'Acad. des sciences, t. LXXXVIII, p. 1183—1185, 1252 — 1255.

116. *Darboux, G.*—Sur un nouvel appareil à ligne droite de M. Hart. Bull. des sciences Math. et Astr., 2-me sér., t. III, p. 144—151.

117. *Darboux, G.* — Recherches sur un système articulé. *Ibid.*, p. 151—192.

118. *Darboux, G.* — Présentation d'appareils pour le tracé des lignes droites et des ovales de Cassini. Compte rendu de la 8 me sess. de l'Assoc. Franç. pour l'avanc. des sciences (Congrès de Montpellier), p. 128.

119. *Darboux, G.* — Appareils divers de Peaucellier, Hart et Kempe. *Ibid.*, p. 376—377.

120. *Чебышевъ, П.* — О параллелограммахъ, состоящихъ изъ трехъ какихъ-либо элементовъ. Записки Акад. наукъ, т. XXXVI, прилож. 3.

121. *Kempe, A. B.* — A property of a linkage. Proceed. of the Lond. Math. Soc., t. XI, p. 45. (Одно заглавіе.)

122. *De Roos, J. D. C.* — Linkages: the different forms and uses of articulated links. New-York, Van-Nostrand. (Переводъ французской статьи, помѣщенной въ Revue Universelle des Mines.)

123. *Ramisch, A.* — Die allgemeine Construction von Geradführungen. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses, Jahrgang LVIII, p. 511—513.

124. **1880.** *Sylvester, J. J.*—Question 5357 (solution by *Curran Sharp*). Math. Quest. from the Educ. Times, t. XXXIII, p. 97.

125. *Sylvester, J. J.*—Question 6339 (solution by *S. Roberts*). *Ibid.*, t. XXXIV, p. 46—47.

126. *Genese, R. W.* — Question 6377 (solution by *G. Heppel* and others). *Ibid.*, p. 102.

127. *Saint-Germain, A. de.*—Sur le parallélogramme de Watt. Journal des Mathématiques pures et appliquées, 3-me sér., t. VI, p. 19—26.

128. **1881.** *Gagarine, A.* (pr.) — Systèmes articulés assurant le mouvement rectiligne ou la courbure circulaire. Comptes rendus de l'Acad. des sciences, t. XCIII, p. 711.

129. *Гагаринъ, А.* (кн.) — О нѣкоторыхъ сочлененіяхъ. С.-Петербургъ.

130. *D'Ocagne, M.* — Note sur le système articulé du colonel Peaucellier. Nouv. Ann. de Math., 2-me sér., t. XX, p. 456—459.

131. **1882.** *Гагаринъ, А.* (кн.) — Круговая линейка и прямолинейное движеніе прямой. Журналъ русск. Физико-химическ. Общества, т. XIV, стр. 52—57.

132. *Liguine, V.*—Sur les systèmes articulés de M. M. Peaucellier, Hart et Kempe. Nouv. Ann. de Math., 3-me sér., t. I, p. 153—163.

ПРОТОКОЛЫ

засѣданій математическаго отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей съ 21-го марта 1881 г. по 6 апрѣля 1882 г.

Засѣданіе 21-го марта 1881 г.

Предсѣдательствовалъ: вице-президентъ Лигинъ. Присутствовали гг. члены: Габбе, Преображенскій, Умовъ и Ярошенко.

Г. Шапира сдѣлалъ два сообщенія:

1) *Основаніе теоріи общихъ кофункцій* (продолженіе).

2) *Обобщеніе алгебраическаго закона, что уравненіе n-ой степени имѣетъ n корней, для дробнаго n.*

Засѣданіе 20-го ноября 1881 г.

Предсѣдательствовалъ: вице-президентъ Лигинъ. Присутствовали гг. члены: Габбе, Кононовичъ, Преображенскій, Умовъ, Шведовъ и секретарь Репяховъ.

Были сдѣланы сообщенія:

1) Проф. Лигинымъ—*объ отношеніи скоростей въ механизмахъ Поселье, Гарта и Кемпе.*

2) Членомъ Габбе—*теорія эквиполленцій* (общая часть).

Въ соединенномъ засѣданіи обоихъ отдѣленій Общества, происходившемъ 6-го марта 1882 г. подъ предсѣдательствомъ президента Мечникова, были сдѣланы сообщенія:

1) Проф. Преображенскимъ—*о дифференціальномъ электрическомъ термометрѣ*. По поводу этого сообщенія были высказаны нѣкоторыя соображенія проф. Шведовымъ.

2) А. В. Клоссовскимъ—*о метеорологическихъ особенностяхъ осени прошлаго года*. Сообщеніе это вызвало пренія, въ которыхъ принимали участіе гг. Преображенскій, Старковъ и Шведовъ.

Въ соединенномъ засѣданіи обоихъ отдѣленій Общества, происходившемъ 6-го апрѣля 1882 г. подъ предсѣдательствомъ президента Мечникова, А. В. Клоссовскій сдѣлалъ сообщеніе —*о распредѣленіи грозъ въ Россіи*.

ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ V.

СОДЕРЖАНІЕ:

ОДЕССА.
ТИПОГРАФІЯ П. А. ЗЕЛЕНАГО, КРАСНЫЙ ПЕРЕУЛ., Д. № 3.
1884.

ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ V.

ОДЕССА.
ТИПОГРАФІЯ П. А. ЗЕЛЕНАГО, КРАСНЫЙ ПЕРЕУЛ., Д. № 3.
1884.

Печатано по опредѣленію Совѣта Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

Секретарь *В. Репяховъ*.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Устройство метеорологической службы на югѣ Россіи.

Вопросъ о расширеніи и развитіи сѣти метеорологическихъ станцій принадлежитъ въ настоящее время къ насущнымъ и неотложнымъ вопросамъ. Добытымъ фактическимъ матеріаломъ одинаково можетъ воспользоваться какъ теоретикъ, такъ и практикъ. На основаніи многолѣтнихъ наблюденій возможно, во-первыхъ, опредѣлить климатическія особенности отдѣльныхъ мѣстностей и цѣлыхъ раіоновъ; метеорологическія таблицы дадутъ намъ количество осадковъ и ихъ распредѣленіе въ пространствѣ и времени, укажутъ преобладающія воздушныя теченія и ихъ вліяніе на перемѣны погоды, опредѣлятъ испарительную силу почвы, ночныя охлажденія, зимнее промерзаніе и т. п. Нужно замѣтить, что новѣйшія наблюденія и изслѣдованія констатировали тотъ фактъ, что великія движенія въ нашей атмосферѣ совершаются въ формѣ вращающихся вихрей, имѣющихъ извѣстное поступательное движеніе. Вихри эти обладаютъ опредѣленными метеорологическими особенностями и обусловливаютъ собою всѣ разнообразныя измѣненія въ нашемъ воздушномъ океанѣ. Продолжительныя наблюденія, произведенныя одновременно на обширномъ пространствѣ, могутъ дать матеріалъ для изученія метеорологическихъ особенностей этихъ вихрей, а слѣдовательно, подвинуть значительно рѣшеніе вопроса о предсказаніи погоды. При помощи телеграфной си-

стемы сообщеній метеорологія и теперь уже имѣетъ возможность предостерегать моряка о приближающемся штормѣ и давать полезныя указанія земледѣльцу относительно предстоящаго дождя, возможнаго ночнаго охлажденія почвы, приближенія грозы и т. д. Многолѣтнія наблюденія, наконецъ, послужатъ для вывода нѣкоторыхъ *эмпирическихъ* правилъ, на основаніи которыхъ возможно по извѣстнымъ симптомамъ, замѣченнымъ въ атмосферѣ, дѣлать вѣроятныя соображенія, относительно измѣненій, предстоящихъ въ ближайшемъ будущемъ. Изъ книги моей «Климатическія особенности Одессы» можно видѣть, что данныя даже одной станціи могутъ послужить матеріаломъ для вывода нѣкоторыхъ практическихъ правилъ и указаній. Подобная разработка, предпринятая для цѣлой густой сѣти станцій, приведетъ, безъ сомнѣнія, къ болѣе надежнымъ и прочнымъ результатамъ. Необходимость и важность метеорологическихъ наблюденій давно уже сознана въ западной Европѣ и Соединенныхъ Штатахъ, гдѣ существуютъ густыя сѣти станцій и наблюдателей и гдѣ правительства и общества оказываютъ щедрое содѣйствіе развитію метеорологическаго дѣла. Во Франціи, напр., въ 1875 году было 1,111 дождевыхъ станцій; еще болѣе густая сѣть существуетъ въ Англіи, гдѣ въ 1876 году функціонировало 2,100 станцій, снабженныхъ дождемѣрами. Поступательное движеніе вихрей, сопровождающихся грозой и градомъ, удается прослѣдить шагъ за шагомъ и изучить всѣ мѣстныя вліянія на общій ходъ явленія. Во Франціи, самымъ тщательнымъ образомъ изучаютъ распредѣленіе дождя по количеству и способу распредѣленія отъ кантона къ кантону, способъ наступленія дождя послѣ предшествующей засухи, вліяніе лѣсовъ, горъ и рѣкъ на образованіе и поступательное движеніе грозъ. О наступленіи грозы тотчасъ сообщается въ главный центръ, который препровождаетъ сообщенія въ Парижъ; парижская обсерваторія посылаетъ предостереженія въ департаменты, которымъ можетъ угрожать гроза. Производятся въ большомъ масштабѣ изслѣ-

дованія относительно позднихъ весеннихъ морозовъ, столь гибельныхъ для земледѣлія, испытывается экспериментально вліяніе дыма на уменьшеніе охлажденія почвы и т. п. Въ Соединенныхъ Штатахъ Америки образовалась, въ самое послѣднее время, весьма густая сѣть наблюдателей надъ ночными охлажденіями; каждый наблюдатель снабжается психрометромъ и извѣстными, заранѣе вычисленными, таблицами; задача наблюдателя заключается въ томъ, чтобы опредѣлить точку росы, т. е. температуру, при которой воздухъ будетъ насыщенъ парами. Если наблюденіе, произведенное при наступленіи ясной и безоблачной ночи, показало, что точка росы лежитъ ниже нуля, то можно ожидать ночнаго мороза, а слѣдов., необходимо припять мѣры для предохраненія болѣе нѣжныхъ растеній.

Въ Россіи метеорологическое дѣло сравнительно ново и недостаточно упрочено. Въ 1880 г. всѣхъ станцій въ Россіи, правильно функціонировавшихъ, было 114, число незначительное, принимая во вниманіе огромное пространство Европейской и Азіатской Россіи. Прибавимъ къ этому, что станціи и наблюдатели распредѣлены крайне неравномѣрно. Обширная южная полоса Россіи остается въ климатическомъ отношеніи почти неизслѣдованной. Кое-гдѣ разбросанныя станція далеко недостаточны для изученія характеристическихъ особенностей нашихъ вихрей и составленія какихъ-либо практическихъ правилъ; имѣющіяся данныя не могутъ даже служить достаточнымъ матеріаломъ для составленія общей картины метеорологическихъ особенностей края. На огромномъ сравнительно пространствѣ юга Россіи устроено всего 5—6 станцій (Одесса, Кишиневъ, Николаевъ, Елисаветградъ, Екатеринославъ, Луганъ). Желательно возможно скорѣе пополнить этотъ пробѣлъ устройствомъ цѣлой сѣти наблюденій. Въ нѣсколькихъ пунктахъ юга необходимо устроить станціи, на которыхъ-бы производились болѣе полныя наблюденія; для обстоятельнаго изученія атмосферическихъ явленій достаточно имѣть, по мнѣ-

нію извѣстнаго метеоролога Гана, одну станцію на каждыя 100 верстъ. На подобныхъ перворазрядныхъ станціяхъ необходимы слѣдующія наблюденія: 1) температура, 2) давленіе, 3) направленіе и сила вѣтра, 4) количество осадковъ, 5) влажность, 6) испареніе, 7) облачность. Внутри этой главной сѣти должна быть расположена возможно болѣе густая сѣть наблюденій надъ осадками, грозами, градомъ и, если возможно, испареніемъ. Наблюдатели послѣдней группы снабжаются дождемѣрами, эвапорометрами и термометрами. На обязанности наблюдателя лежитъ весьма несложный процессъ измѣренія и записыванія количества дождя и количества испарившейся воды. Въ бланки, разосланные заранѣе, вносятся отвѣты на слѣдующіе вопросы:

Дождевой бюллетень.

Мѣсто наблюденія.
Годъ, мѣсяцъ, число.
Количество дождя.
Въ которомъ часу начался дождь.
Направленіе вѣтра во время дождя.
Направленіе облаковъ.

Грозовой бюллетень.

Мѣсто наблюденія.
Годъ, мѣсяцъ, число.
Начало грозы.
Конецъ.
Откуда пришла гроза.
Куда направилась.
Сила грозы.
Сила града.
Направленіе вѣтра.
Направленіе облаковъ.

Въ бланки вносятся также особыя замѣчанія относитель-

но величины и формы градинъ, поврежденій, произведенныхъ грозою и градомъ и другія, болѣе интересныя, особенности, о которыхъ будетъ подробнѣе указано въ особой инструкціи. Бланки, наполненные отвѣтами, могли-бы пересылаться въ одесскую метеорологическую обсерваторію; завѣдывающій обсерваторіей даетъ инструкціи наблюдателямъ и вообще руководитъ веденіемъ и разработкой метеорологическаго матеріала, собраннаго на югѣ Россіи. Очевидно, что устройство полной сѣти наблюденій требуетъ значительныхъ расходовъ и не можетъ быть осуществлено сразу. По моему мнѣнію, слѣдуетъ начать дѣло съ устройства дождевыхъ и грозовыхъ станцій, такъ какъ имѣющіяся, хотя немногочисленныя, перворазрядныя станціи могутъ дать приблизительныя указанія относительно общихъ измѣненій въ атмосферѣ; а для этого необходимо пригласить гг. землевладѣльцевъ и другихъ лицъ принять участіе въ производствѣ дождевыхъ и грозовыхъ наблюденій, необходимо создать контингентъ добровольныхъ наблюдателей. Каждая такая станція должна быть снабжена дождемѣромъ, а нѣкоторыя изъ нихъ эвапорометромъ. Безъ сомнѣнія, многіе изъ просвѣщенныхъ господъ землевладѣльцевъ, въ виду теоретической и практической важности дѣла, пріобрѣтутъ на свои средства дождемѣры и эвапорометры; люди менѣе состоятельные могли-бы получить приборы отъ земства. Кромѣ пріобрѣтенія дождемѣровъ предвидятся еще небольшіе расходы на печатаніе и разсылку печатныхъ бланковъ[1]). Вслѣдъ за организаціей дождевой сѣти необходимо устроить нѣсколько болѣе

[1]) Настоящій докладъ прочтенъ былъ въ засѣданіи Херсонской земской статистической коммисіи 6-го февраля 1883 года; послѣ преній, коммисія опредѣлила: такъ какъ земскія учрежденія могутъ отнестись лишь съ полнымъ сочувствіемъ къ предложенію г. Клоссовскаго, то, отпечатавъ его докладъ, разослать отъ имени статистической коммисіи въ уѣздныя земскія управы, и къ частнымъ владѣльцамъ и жителямъ Херсонской губерніи съ приложеніемъ мотивированной записки, объясняющей, какимъ земскимъ цѣлямъ можетъ удовлетворить введеніе метеорологическихъ наблюденій и записей въ разныхъ пунктахъ губерніи.

полныхъ метеорологическихъ станцій. Въ настоящее время въ нѣкоторыхъ пунктахъ Херсонской губ. производятся наблюденія надъ температурой, давленіемъ, направленіемъ вѣтра; пункты эти могли-бы послужить ядромъ для устройства болѣе полныхъ метеорологическихъ станцій.

Въ послѣднее время система метеорологическихъ наблюденій получила новое, въ высшей степени важное, примѣненіе. Мы уже сказали, что въ атмосферѣ нашей постоянно движутся огромные вихри, циклоны или минимумы, вращающіеся въ сѣверномъ полушаріи по направленію противоположному движенію часовой стрѣлки. Въ центральной части вихря давленіе воздуха, измѣренное барометромъ, наиболѣе слабо и увеличивается по мѣрѣ приближенія къ периферическимъ частямъ циклона. Въ восточной части вихря дуютъ вѣтры отъ Ю, ЮЗ и ЮВ; въ западнии — отъ С, СЗ и СВ. Вихри эти перемѣщаются отъ запада къ востоку съ средней скоростью 20—40 верстъ въ часъ; они сопровождаются вообще обильными осадками и вѣтрами, достигающими иногда силы шторма. Между двумя серіями циклоновъ устанавливаются обыкновенно обширныя области затишья, максимумы или антициклоны, которыя характеризуются слабыми вѣтрами, безоблачнымъ небомъ и высокимъ давленіемъ. Антициклоны лѣтомъ сопровождаются продолжительными жарами, а зимою—сильными морозами. Образованіе и движеніе подобныхъ вихрей можетъ быть констатировано помощью, такъ называемой, системы одновременныхъ наблюденій. Въ извѣстный условный моментъ (7 часовъ утра) на главныхъ станціяхъ Европы производятся одновременныя наблюденія надъ важнѣйшими метеорологическими элементами (температура, давленіе, направленіе и сила вѣтра, влажность и т. д.); наблюденія эти передаются по телеграфу въ центральныя обсерваторіи и тамъ, помощью особыхъ условныхъ знаковъ, наносятся на карты; полученныя такимъ образомъ *синоптическія карты* даютъ полную картину состоянія атмосферы на значительной части земной поверхности. На основаніи этихъ картъ

возможно составить нѣкоторыя вѣроятныя соображенія о предстоящихъ измѣненіяхъ погоды въ ближайшемъ будущемъ. Приближеніе сильнаго циклона предвѣщаетъ штормъ; въ мѣстахъ, лежащихъ на пути зимняго минимума, можно ожидать повышенія температуры, увеличенія осадковъ и облачности, и затѣмъ, обратнаго поворота метеорологическихъ приборовъ; лѣтній минимумъ влечетъ за собою дождливую погоду и пониженіе температуры; образованіе области высокаго давленія обусловливаетъ безоблачную погоду и малое количество осадковъ; характеръ колебанія температуры зависитъ отъ времени года и географическаго положенія антициклона. Обыкновенно въ центральныхъ обсерваторіяхъ общее состояніе атмосферы формулируется въ видѣ бюллетеня, который передается тотчасъ-же по телеграфу въ различные пункты страны. Подобными соображеніями и предсказаніями, составленными на основаніи системы одновременныхъ наблюденій, можно воспользоваться или для цѣлей мореплаванія, или для пользы земледѣльцевъ. Если синоптическія карты обнаружили приближеніе сильнаго вихря, то центральныя учрежденія немедленно посылаютъ предостереженія въ порты, гдѣ подымаются тотчасъ-же особые штормовые сигналы. Петербургская центральная обсерваторія начала посылать предостереженія съ конца 1874 года. Средній процентъ оправдывающихся предсказаній колеблется между 65 и 70%. Но, къ сожалѣнію, петербургская обсерваторія ограничивается почти исключительно портами Балтійскаго моря Необходимо систему эту распространить на порты Чернаго моря. Изъ статьи моей «Климатическія особенности Одессы» видно, что бури Чернаго моря обусловливаются, главнымъ образомъ, вихрями, приходящими съ юга Европы и съ Средиземнаго моря: если, поэтому, въ Одессѣ будутъ получаться изъ центральной петербургской обсерваторіи телеграфные бюллетени объ общемъ состояніи погоды въ Европѣ и спеціальныя телеграммы изъ главнѣйшихъ пунктовъ юга нашего мате-

рика, то возможно систему штормовыхъ предостереженій распространить на порты Чернаго моря.

Телеграммы объ общемъ состояніи атмосферы, получаемыя изъ центральной обсерваторіи, могли-бы имѣть также весьма важное значеніе для цѣлей земледѣлія. Подобная система предсказаній, предназначенныхъ для цѣлей земледѣлія, существуетъ въ нѣкоторыхъ государствахъ западной Европы и въ Соединенныхъ Штатахъ Америки. Нужно замѣтить, что явленія погоды, важныя для земледѣльца, совершенно отличны отъ тѣхъ, которыя интересуютъ моряка. Морякъ интересуется почти исключительно направленіемъ и силою вѣтра; земледѣлецъ желаетъ знать наступленіе дождя, грозы, града, ночныхъ морозовъ; вѣтеръ его занимаетъ меньше. Возможность предсказать дождь, коего условія мѣняются съ мѣстностью, составляетъ одну изъ труднѣйшихъ задачъ современной науки. Указанія для земледѣльцевъ не могутъ имѣть такого общаго и абсолютнаго значенія, какъ соображенія, составляемыя для моряковъ. Общія указанія центральной обсерваторіи должны быть видоизмѣнены и принаровлены къ мѣстнымъ условіямъ, для чего необходимо точное и основательное знаніе климатологіи. Модификація общихъ соображеній, примѣнительно къ мѣстнымъ условіямъ, лежитъ во Франціи на обязанности департаментскихъ метеорологическихъ коммисій. Каждая община, желающая принять участіе въ земледѣльческой сѣти, должна имѣть барометръ, укрѣпленный на видномъ мѣстѣ. Возлѣ барометра вывѣшиваются ежедневно сообщенія, примѣненныя къ мѣстности департаментскими коммисіями. Къ 1-му сентября 1877 г. всѣхъ станцій, принадлежавшихъ къ этой сѣти, было 1230. Въ Россіи также сдѣлана попытка примѣненія метеорологіи къ земледѣльческимъ цѣлямъ. Корреспондентъ главной физической обсерваторіи, г. Пржишиховскій, наблюдатель метеорологической станціи, устроенной Елисаветградскимъ реальнымъ училищемъ, при содѣйствіи херсонскаго губернскаго земства сдѣлалъ попытку распространить предсказанія погоды на пользу сель-

скихъ хозяевъ Елисаветградскаго уѣзда. Съ апрѣля 1877 г. обсерваторія, по просьбѣ метеорологической станціи и на ея средства, высылаетъ время отъ времени предсказанія болѣе рѣзкихъ перемѣнъ погоды. Первая такая телеграмма, посланная 16-го мая 1877 г., извѣщала о вѣроятности перемѣны установившейся было сухой погоды. По сообщенію г. Пржишиховскаго, оказалось, что 18 мая въ окрестностяхъ Елисаветграда шелъ дождь. 23-го мая того-же года, обсерваторія извѣщала объ ожидаемомъ пониженіи температуры; это предсказаніе вполнѣ оправдалось, такъ какъ температура, бывшая съ 10 по 23-е мая включительно выше 15°C, оказалась 24-го мая 10,5°, а ночью съ 24-го на 25-е термометръ упалъ почти до нуля. Столь-же удачно было предсказаніе 14-го (2) іюня. Въ этотъ день надъ центральной Россіей передвигалась, съ запада на востокъ, область слабаго давленія. На западѣ Россіи уже установились сѣверные вѣтры, и температура въ предшествующія сутки во многихъ мѣстахъ понизилась на 10°; между тѣмъ, въ 7 часовъ утра въ Елисаветградѣ термометръ показывалъ 21,1°, и вѣтеръ дулъ отъ ЮЗ; въ часу пополудни температура повысилась до 29,9°. Телеграмма обсерваторіи, посланная на основаніи наблюденій, произведенныхъ въ 7 час. утра, извѣщала о рѣзкой перемѣнѣ погоды, о пониженіи температуры и о поворотѣ вѣтра къ сѣверу. Въ 9 часовъ вечера вѣтеръ перешелъ къ ЗСЗ, и температура понизилась до 15,6°, т. е. почти на 8° въ сутки; на слѣдующій день въ 7 часовъ утра она понизилась до 12,3° т. е. почти на 10° въ 24 часа. Термометръ, неопускавшійся въ предшествующія ночи ниже 16,7°, упалъ съ 14-го на 15-е іюня до 7,5°, а съ 15-го на 16-е до 7,2°. Вѣтеръ 15-го продолжалъ дуть отъ ЗСЗ. Эта рѣзкая перемѣна погоды сопровождалась вечеромъ 14-го іюня грозою, сильнымъ вѣтромъ и дождемъ. Такія предсказанія однако печатались только на другой день и не могли быть немедленно разосланы. Въ 1878 г., благодаря содѣйствію мѣстнаго уѣзднаго земства, телеграммы, получаемыя

изъ Петербурга, могли быть доставляемы около 40 лицамъ въ уѣздѣ къ 10 час. утра слѣдующаго дня. Но и этого еще недостаточно. Польза предсказаній будетъ только тогда ощутительна, когда они будутъ доставляемы сельскимъ хозяевамъ въ тотъ-же день.

Въ виду очевидной практической пользы системы телеграфныхъ метеорологическихъ сообщеній необходимо прежде всего исходатайствовать передъ правительствомъ право на безплатное полученіе изъ Петербурга телеграфныхъ бюллетеней объ общемъ состояніи погоды въ Европѣ. Одесская обсерваторія, сопоставляя полученные бюллетени съ наблюденіями нѣсколькихъ городовъ юга, могла-бы, въ случаѣ вѣроятныхъ болѣе рѣзкихъ перемѣнъ погоды, посылать сообщенія въ различные пункты края и въ порты Чернаго моря; кромѣ того, полученные бюллетени могли-бы ежедневно вывѣшиваться для всеобщаго свѣдѣнія на станціяхъ желѣзныхъ дорогъ, въ зданіи биржи и въ земскихъ управахъ. Расходы по передачѣ и распространенію бюллетеней могли-бы быть покрыты или земствомъ, или-же подпиской частныхъ абонентовъ. Можно надѣяться, что ходатайство о безплатной передачѣ бюллетеней не встрѣтитъ особенныхъ препятствій, такъ какъ университетская обсерваторія въ прежніе годы получала ежедневно подобные бюллетени; передача ихъ прекратилась во время послѣдней восточной войны [1]).

---

[1]) Содѣйствіе общества юго-западныхъ желѣзныхъ дорогъ вполнѣ обезпечено. Управляющій дорогами г. Андреевскій обратился на-дняхъ въ метеорологическую обсерваторію университета съ слѣдующимъ отношеніемъ. «Завѣдывающій Елисаветградскою метеорологическою станціею г. Близнинъ предложилъ управленію юго западныхъ желѣзныхъ дорогъ получать отъ этой станціи сообщаемыя ей Петербургскою главною физическою обсерваторіею извѣщенія о предстоящихъ, особенно рѣзкихъ, перемѣнахъ погоды на слѣдующихъ условіяхъ: 1) чтобы доставленныя метеорологическою станціею извѣщенія были немедленно передаваемы по телеграфу начальникамъ желѣзно-дорожныхъ станцій въ раіонѣ Елисаветградскаго уѣзда; 2) чтобы на станціяхъ желѣзной дороги, получившихъ такія извѣщенія, были тотчасъ-же вы-

Всѣ вообще работы по устройству метеорологической сѣти, а также разработкѣ и группировкѣ наблюденій желательно сосредоточить въ одномъ изъ городовъ юга; наиболѣе удобнымъ для этого пунктомъ представляется Одесса, въ которой необходимо устроить центральное метеорологическое учрежденіе юга Россіи. Могутъ возразить, что у насъ уже имѣется центральная физическая обсерваторія въ Петербургѣ. Но въ дѣлѣ климатическаго и метеорологическаго изученія края особенно важно, чтобы наблюденія разрабатывались и обнародовывались возможно скорѣе, а главное, чтобы изученіе находилось подъ руководствомъ людей, близко знающихъ мѣстныя географическія условія и вліянія; на необходимости подобной, если можно такъ выразиться, метеорологической децентрализаціи особенно настаивалъ знаменитый астрономъ Леверье, создавшій систему одновременныхъ наблюденій и примѣнившій ее какъ къ морскимъ, такъ и къ земледѣльческимъ цѣлямъ. По мысли Леверье созданы метеорологическія департаментскія коммисіи, благодаря которымъ столь широко развилось метеорологическое дѣло во Франціи. При климатическомъ изученіи края весьма важны личные переговоры руководителей центральнаго учрежденія съ наблюдателями, что совершенно

вѣшиваемы надлежащія объявленія объ этомъ для свѣдѣнія публики и 3) чтобы метеорологической станціи сообщаемо было желѣзно-дорожными станціями, въ теченіи недѣли, въ какой мѣрѣ сбылось предсказаніе, сообщенное метеорологической станціей. Относясь съ полнымъ сочувствіемъ къ предложенію г. Клиэлина и соглашаясь подчиниться вышеуказаннымъ условіямъ, управленіе юго-западныхъ желѣзныхъ дорогъ сдѣлало уже соотвѣтственныя распоряженія подлежащимъ начальникамъ станцій.

Въ виду того, что распространеніе подобныхъ предупредительныхъ извѣщеній по всей линіи юго-западныхъ желѣзныхъ дорогъ могло-бы принести окрестному населенію весьма существенную пользу, имѣю честь покорнѣйше просить васъ, милостивый государь, не признаете-ли вы возможнымъ войти съ управленіемъ юго-западныхъ желѣзныхъ дорогъ въ соглашеніе, подобное вышесказанному, относительно сообщенія предупредительныхъ извѣщеній желѣзно-дорожнымъ станціямъ, находящимся въ районѣ ввѣренной вамъ метеорологической станціи».

невозможно при разстояніяхъ, отдѣляющихъ наши окраины отъ Петербурга. При подобныхъ, возможно частыхъ, сношеніяхъ съ наблюдателями и осмотрѣ мѣстностей возможенъ болѣе строгій контроль и повѣрка наблюденій и инструментовъ, возможно болѣе полное изученіе различныхъ мѣстныхъ вліяній, вносящихъ тѣ и другія видоизмѣненія въ общій ходъ атмосферическихъ явленій. Въ противномъ случаѣ, метеорологическіе отчеты обратятся въ сухіе перечни цифръ, составленіемъ которыхъ занимались метеорологи прежняго времени. Наконецъ, скопленіе огромнаго количества метеорологическаго матеріала въ одномъ центральномъ учрежденіи можетъ замедлить разработку и обнародованіе результатовъ, и несомнѣнно приведетъ къ постепенному уменьшенію числа станцій и наблюдателей. Примѣромъ можетъ служить сѣть наблюденій надъ грозами въ Россіи. Сѣть эта учреждена по иниціативѣ русскаго географическаго общества въ началѣ 70-хъ годовъ. Нѣсколько лѣтъ матеріалы собирались въ географическомъ обществѣ и не подвергались обработкѣ. Изъ имѣющихся у меня грозовыхъ бюллетеней видно, что число станцій и наблюдателей постепенно уменьшалось, наблюдатели видимо охладѣвали къ дѣлу, какъ это показываетъ слѣдующая табличка:

въ	1873	году	было	прислано	бюллетеней	. 939
»	1874	»	»	»	»	. 720
»	1875	»	»	»	»	. 633
»	1876	»	»	»	»	. 553
»	1877	»	»	»	»	. 654
»	1878	»	»	»	»	. 512
»	1879	»	»	»	»	. 480
»	1880	»	»	»	»	. 639

Проектируемой центральной обсерваторіи юга предстояли-бы и другія, не менѣе важныя, задачи. Наблюденія, которыя производятся въ настоящее время въ Одессѣ, касаются только простѣйшихъ метеорологическихъ элементовъ. Необходимо, по-

этому, расширить дѣятельность нашей обсерваторіи, необходимо правильное и постоянное изученіе физической стороны отдѣльныхъ явленій. Термическія наблюденія должны быть пополнены, прежде всего, измѣреніями температуры почвы на различныхъ глубинахъ и опредѣленіями охлажденія ея вслѣдствіе ночнаго лучеиспусканія. Желательно, возможно полнѣе, изслѣдовать расходъ воды въ формѣ испаренія и зависимость его отъ различныхъ условій. Растительная жизнь обусловливается энергіей, получаемой отъ солнца, между тѣмъ мы не имѣемъ данныхъ объ абсолютномъ количествѣ солнечной радіаціи, падающей на единицу поверхности. Наконецъ, на нашей станціи вовсе не производятся магнитныя опредѣленія и наблюденія надъ напряженіемъ атмосфернаго электричества, въ то время какъ изученіе электрическихъ и магнитныхъ свойствъ земли получаетъ въ наукѣ преобладающее значеніе. Нѣкоторые отрывочные факты указываютъ на связь, существующую между магнито-электрическими явленіями и общей метеорологической жизнью нашей атмосферы, связь, которая можетъ быть выяснена только путемъ правильныхъ наблюденій; наблюденія надъ электрометромъ могутъ также подвинуть вопросъ о происхожденіи атмосфернаго электричества и источникахъ электрической энергіи грозъ. Отсутствіе магнитной обсерваторіи заставило нашъ университетъ отказаться отъ участія въ весьма важномъ научномъ изслѣдованіи. Извѣстно, что въ настоящее время полярный поясъ окруженъ цѣлымъ кольцомъ станцій (составляющихъ международное предпріятіе), функціонирующихъ по общему, строго выработанному, плану. Такихъ станцій устроено 14 [1]). Онѣ начали функціонировать 1 сентября 1882 г. и будутъ продолжать наблюденія до 1-го сен-

[1]) 12 станцій въ сѣверномъ полушаріи и 2 южномъ. Наиболѣе сѣверная станція устроена въ заливѣ леди Франклинъ подъ 81°20′ с. ш. Русскія станціи находятся одна въ устьяхъ Лены, другая на Новой землѣ. Въ предпріятіи участвуютъ Россія съ Финляндіей, Англія, Франція, Соедин. Штаты, Данія, Голландія, Германія, Австрія, Швеція, Норвегія.

тября 1883 г. Одна изъ главныхъ задачъ этого международнаго предпріятія заключается въ томъ, чтобы ближе изучить электрическія и магнитныя свойства земли; для этой цѣли въ извѣстные условные моменты производятъ одновременныя магнитныя наблюденія какъ на полярныхъ станціяхъ, такъ и на всѣхъ главныхъ обсерваторіяхъ земнаго шара; наблюденія этой сѣти получаютъ еще большій интересъ въ виду того, что настоящій годъ принадлежитъ къ годамъ, когда особенно сильна дѣятельность магнитныхъ и электрическихъ силъ земли, что выражается большимъ числомъ полярныхъ сіяній и магнитныхъ бурь. Министерство народнаго просвѣщенія предложило нашему университету тоже производить магнитныя и электрическія наблюденія въ извѣстные терминные дни. Коммисія, составленная изъ членовъ физико-математическаго факультета, признала участіе въ этихъ наблюденіяхъ въ высшей степени желательнымъ; но, къ сожалѣнію, пришлось отказаться отъ наблюденій вслѣдствіе отсутствія средствъ на постройку магнитнаго павильона и покупку приборовъ.

Такимъ образомъ, учрежденіе въ Одессѣ центральной метеорологической обсерваторіи юга имѣетъ троякое значеніе: 1) чисто теоретическое для изученія физической стороны отдѣльныхъ явленій, какъ метеорологическихъ, такъ, *въ особенности*, магнито-электрическихъ; 2) обсерваторія послужила-бы ядромъ и центромъ цѣлой сѣти наблюденій надъ осадками и грозами,—наблюденій, разработка которыхъ могла-бы дать полезныя указанія для земледѣльца; 3) обсерваторія посылала-бы предостереженія о приближающихся буряхъ въ порты Чернаго моря.

Нѣсколько учрежденій, слѣдовательно, являются одинаково заинтересованными — университетъ, общества естествоиспытателей и сельскихъ хозяевъ, земство, общество пароходства и торговли. Совокупными усиліями возможно было-бы осуществленіе этого неотложнаго дѣла.

Наблюденія надъ температурой почвы въ Елисаветградѣ.

А. Клоссовскаго.

Наблюденія надъ температурой почвы въ Россіи весьма немногочисленны. Въ сочиненіи Веселовскаго «О климатѣ Россіи» находимъ старыя опредѣленія, произведенныя въ Бессарабскомъ училищѣ Садоводства подлѣ Кишинева (1847—1856), а также наблюденія въ Горигорѣцкомъ земледѣльческомъ институтѣ проф. Целлинскаго (1853—55 г.) [1]. Въ обоихъ пунктахъ температура опредѣлялась на глубинѣ 1 аршина ($^3/_4$ метра). Методы измѣренія температуры въ Кишиневѣ весьма несовершенны, а поэтому результаты не отличаются особенной точностью. Способъ, которымъ сдѣланы наблюденія Целлинскаго, совершенно неизвѣстенъ. Многолѣтнія, необнародованныя, наблюденія надъ температурой почвы произведены также академикомъ Железновымъ въ имѣніи Нароново (Новгородской губ.) до глубины $^1/_2$—5 футовъ [2]. Но такъ какъ поправки приборовъ, употреблявшихся при измѣреніяхъ, неизвѣстны, то и самыя наблюденія не представляютъ особаго интереса.

Строго научныя измѣренія температуры почвы на незначительныхъ глубинахъ предприняты въ послѣднее 10-лѣтіе. Съ 1-го января 1873 г. начались въ Петербургѣ постоянныя на-

[1]) Веселовскій. О климатѣ Россіи стр. 156—157.

[2]) Wild. Ueber die Bodentemperaturen in St-Petersburg und Nukuss. Repertorium f. Meteor. Bd. VI, № 4, стр. 2—3.

блюденія на глубинахъ 0.0, 0.43, 0.81, 1,52 и 3.02 метра; верхніе три термометра наблюдались три раза въ день, а нижніе два—одинъ разъ въ сутки; впослѣдствіи прибавлены еще глубины 0.05, 0.10, 0,20, 0.40, 0,80, 1.60, 3.20 метра. Результаты наблюденій печатаются въ Лѣтописяхъ Главной Физической Обсерваторіи. Другой рядъ наблюденій начатъ въ Нукусѣ (Дорандтомъ) съ сентября 1874 г., во время ученой экспедиціи въ Туркестанъ. Г. Дорандтъ въ теченіи $11^1/_2$ мѣсяцевъ производилъ двухчасовыя наблюденія на глубинахъ 0.0, 0,05, 0.10, 0,20 метровъ; остальные-же термометры, находившіеся на глубинахъ 0.4, 0.8, 1.6, 2.8 и 4.0 метра, отсчитывались 3 раза въ день (7 ч. у., 1 ч. дня и 9 ч. веч.) [1]. Третій рядъ наблюденій принадлежитъ елисаветградской метеорологической станціи, устроенной при земскомъ реальномъ училищѣ и состоящей въ завѣдываніи г. Близнина. Начало наблюденій относится къ сентябрю 1876 г.; въ настоящее время термометры находятся на глубинахъ 0.5, 1.5 и 3.0 метра; отсчеты термометровъ производятся одинъ разъ въ сутки (въ 1 часъ дня). Въ самое послѣднее время весьма тщательныя наблюденія произведены въ Тифлисѣ [2]). Термометры установлены на глубинахъ 0.00, 0.01, 0.02, 0.05, 0.12, 0.20, 0.41, 0.79, 1.60, 3.21, 4.14. Первые шесть термометровъ наблюдались ежечасно; слѣдующіе два черезъ каждые три часа; послѣдніе три одинъ разъ—въ 1 часъ дня. Слѣдуетъ, наконецъ, упомянуть, что подобныя-же наблюденія начаты въ текущемъ году на станціи, устроенной въ Одессѣ Обществомъ Сельскаго Хозяйства Южной Россіи, но, къ сожалѣнію, прерваны въ началѣ ноября. Всѣ почти указанныя нами наблюденія производились по методу Лямона, приборами, полученными изъ Главной Физической Обсерваторіи. Сущность этого метода, какъ извѣстно,

---

[1]) Id. стр. 5 и 45.

[2]) Beobachtungen der Temperatur des Erdbodens im Tiflis Phys. Obs. 1880.

заключается въ томъ, что въ землю врывается длинная цилиндрическая трубка; въ эту трубку плотно вдвигается деревянный стержень, къ нижней части котораго прикрѣпляется термометръ въ мѣдномъ футлярѣ; дно цилиндра снабжено мѣднымъ кружкомъ; въ моментъ наблюденія стержень съ термометромъ вытаскивается и дѣлается непосредственный отсчетъ температуры; такъ какъ резервуаръ термометра окруженъ непроводниками, то высота термометра не измѣняется въ теченіи нѣсколькихъ мгновеній, необходимыхъ для отсчета прибора. Снаружи приборъ предохраненъ особой крышкой отъ проникавія влаги во внутрь цилиндра. Въ Петербургѣ примѣняется еще и другой методъ; устроена шахта, обитая досками, сквозь стѣну которой на разныхъ глубинахъ вдвигаются въ землю горизонтально 4 термометра, длиною въ 1 метръ и оправленные въ мѣдныя трубки [1]). Подобныя-же приспособленія устроены также въ Павловской магнито-метеорологической обсерваторіи.

Наблюденія, произведенныя въ Петербургѣ и Нукусѣ, разработаны Вильдомъ въ статьѣ его «Ueber die Bodentemperaturen in St. Petersburg und Nukuss» [2]). Тифлисскія измѣренія цѣликомъ напечатаны на средства Кавказскаго Общества Сельскаго Хозяйства и представляютъ собою чрезвычайно цѣнный матеріалъ, одинаково важный какъ для теоретика, такъ и для практика. Въ настоящей статьѣ изложены главнѣйшіе результаты наблюденій елисаветградской станціи. Почвенные термометры въ Елисаветградѣ установлены, какъ мы уже сказали, на глубинахъ 0.5, 1.5 и 3.0 метра. Для изслѣдованія качества грунта въ разстояніи 4 или 5 метровъ отъ почвенныхъ термометровъ была вырыта яма и найдено, что поверхностный черноземъ имѣетъ глубину около 1 аршина; подъ черноземомъ идетъ смѣсь мелкозернистаго песку съ желтоватой глиной (песокъ преобладаетъ); камней вовсе нѣтъ. Средняя поправка

---

[1]) Лѣтописи 1879 г., стр. LIII.
[2]) Repertorium für Meteor. Bd. VI, № 4.

нижнихъ двухъ термометровъ равна — 0.1°, а верхняго около — 0.4°. Извѣстно, что поверхностный слой почвы нагрѣвается весьма сильно; въ жаркіе лѣтніе дни температура его значительно выше температуры воздуха въ тѣни; напр. въ Тифлисѣ температура на глубинѣ 0.0 м., въ 1 часъ дня, въ іюлѣ достигаетъ 64,7°; даже средняя температура 2 часовъ дня въ іюлѣ равна 52,14°[1]). Въ Петербургѣ 19 іюня (нов. ст.) 1882 г. когда температура воздуха въ тѣни была 30.8° С, термометръ на поверхности почвы показывалъ 44.5° С; въ лѣтніе дни термометръ на берегу моря, вблизи Одессы, достигаетъ 52° С. Съ другой стороны, температура поверхностнаго слоя въ зимніе мѣсяцы сильно понижается; напр., въ Тифлисѣ въ декабрѣ она падаетъ до—12,3° С. Если сравнить ходъ температуры поверхностнаго слоя съ ходомъ температуры воздуха въ тѣни, то, по изслѣдованіямъ г. Вильда, величина дневнаго минимума какъ въ почвѣ, такъ и въ воздухѣ, одинакова почти во всѣ мѣсяцы; между тѣмъ максимумъ температуры почвы въ два раза больше, чѣмъ максимумъ температуры воздуха въ тѣни [2]). Вмѣстѣ съ тѣмъ, амплитуда дневныхъ колебаній въ почвѣ въ $2^1/_2$ раза больше, чѣмъ амплитуда колебаній температуры воздуха въ тѣни; максимумъ имѣетъ мѣсто около времени солнечнаго восхода, т. е. совпадаетъ съ максимумомъ температуры воздуха, минимумъ-же падаетъ, среднимъ числомъ, на 1 часъ дня. Выводы эти не вполнѣ согласны съ результатами, полученными въ Тифлисѣ; въ Тифлисѣ, въ среднемъ годовомъ выводѣ, минимумъ температуры на поверхности почвы равенъ 6,28°; минимумъ-же температуры воздуха 7,69°, т. е. почва охлаждается на 1,41°, ниже температуры воздуха; максимумъ температуры почвы равенъ 28,53°; максимумъ-же температуры воздуха 16,38°; первое число превышаетъ второе въ 1,7 раза;

[1]) Набл. въ Тифлисѣ стр. 101.
[2]) Repert. f. M. стр. 9.

амплитуда колебаній температуры почвы равна 22,25° а воздуха 8.69°; отношеніе составляетъ 2,6°.

Начиная отъ поверхности почвы, теплота передается мало по малу вглубь; при этомъ мы замѣчаемъ, что моменты наступленія максимума и минимума запаздываютъ и амплитуды колебаній постепенно убываютъ; напр., въ Тифлисѣ, въ среднемъ годовомъ выводѣ:

		Макс.	Мин.	Амплит.	Время: Мин.	Время: Макс.
на глубинѣ	0,00	28,53°	6,28°	22,25°	5 ч. утра	1 ч. дня
»	0,05	21,58	10,57	11,01	6 ч. »	3 ч. »
»	0,12	18,88	12,32	6,56	7 ч. »	4 ч. »
»	0,20	16,22	13,99	2,23	11 ч. »	8 ч. »
»	0,41	14,46	14,23	0,23	4 ч. веч.	4—7 ч. ут.

На глубинѣ 0,79 м. максимумъ равенъ 14,70°, минимумъ 14,68°; температура колеблется въ предѣлахъ 0,02° С., т. е. почти вовсе не принимаетъ участія въ суточныхъ колебаніяхъ.

Къ сожалѣнію, въ Елисаветградѣ наблюденія производятся одинъ разъ въ сутки, а слѣдовательно, они не могутъ дать матеріала для изслѣдованія дневнаго хода; съ другой стороны, въ Елисаветградѣ не установленъ термометръ на глубинѣ 0,0 м., слѣдовательно, мы не можемъ судить о степени нагрѣванія поверхности почвы. Но эти наблюденія даютъ возможность изслѣдовать годовой ходъ температуры на трехъ различныхъ глубинахъ, а также опредѣлить приблизительно толщину того слоя, который успѣваетъ промерзать въ зимніе мѣсяцы.

Средняя температура различныхъ слоевъ, ближайшихъ къ земной поверхности, значительно разнится отъ средней температуры воздуха; такъ среднія температуры:

		Нукусъ	Петербургъ
воздуха		11,01°	3,15°
глубина	0,00	15,73	3,57
»	0,05	13,43	—

		Нукусъ	Петербургъ
глубина	0,10	13,76	—
»	0,20	13,48	—
»	0,43	—	4,62
»	0,80	15,18	—
»	0,81	—	5,65
»	1,52	—	6,75
»	1,60	15,05	—
»	2,80	14,49	—
»	3,02	—	7,22
»	4,0	14,03	—

Въ Нукусѣ средняя годовая температура отъ глубины 0,05 м. начинаетъ возрастать до глубины 1 метра и затѣмъ опять убываетъ; въ Петербургѣ, между тѣмъ, температура возрастаетъ до наибольшей измѣренной глубины, т. е. до 3,02 метра; въ Елисаветградѣ:

температура воздуха		. . . .	7,6°
»	»	на глуб. 0,5 м. . .	9,4
»	»	» 1,5 » . .	10,3
»	»	» 3,0 » . .	10,4

т. е. замѣтно слабое повышеніе температуры: на глубинѣ 0,5 м. она выше температуры воздуха на 2,2°, а на глубинѣ трехъ метровъ на 2,8°С.

Далѣе извѣстно, что годовыя колебанія, подобно суточнымъ, передаются вглубь отъ слоя къ слою; но при этомъ колебанія дѣлаются менѣе и менѣе рѣзкими; почва на глубинѣ не нагрѣвается такъ сильно, какъ на поверхности; съ другой стороны, она не такъ сильно охлаждается, вслѣдствіе чего амплитуды съ глубиною постепенно убываютъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ, время наступленія максимума и минимума запаздываетъ, и абсолютныя крайнія повышенія температуры уменьшаются. Въ слѣдующей таблицѣ приведены среднія температуры почвы на различныхъ глубинахъ, вычисленныя по пятидневіямъ (за 5 лѣтъ).

		Температ. Воздуха	Температура 0,5 м.	1,5 м.	на глубинахъ 3 м.
1 5	января	— 7,3	0,9	6,0	9,7
6 10	»		1,0	5,7	9,4
11 15	»		0.0	5,4	9,1
16 20	»		— 0,9	5,1	8,8
21 25	»		— 0,6	4,8	8,5
26 30	»		— 1,1	4,5	8,2
31 4	февраля	— 5,1	— 0,9	4,3	8,0
5 9	»		— 0,7	4,1	7,8
10 14	»		— 1,1	3,9	7,6
15 19	»		— 1,3	3,7	7,4
20 24	»		— 1,1	3,5	7,2
25 1	марта	— 0,8	— 0,1	3,5	7,0
2 6	»		0,5	3,6	6,9
7 11	»		0,9	3,7	6,7
12 16	»		1,4	3,9	6,7
17 21	»		1,3	3,9	6,6
22 26	»		1,4	3,9	6,5
27 31	»		1,5	3,9	6,5
1 5	апрѣля	7,9	2,5	4,0	6,4
5 10	»		2,9	4,2	6,4
11 15	»		4,0	4,4	6,4
15 20	»		6,6	4,9	6,4
21 25	»		9,3	6,0	6,5
25 30	»		10,3	7,2	6,7
1 5	мая	15,8	11,6	8,2	7,0
6 10	»		12.9	9,1	7,3
11 15	»		13,7	9,9	7,7
16 20	»		14,1	10,6	8,2
21 25	»		14,4	11,1	8,5
26 30	»		15,6	11,6	8,9
31 4	іюня	19,1	15,9	12,5	9,1
4 9	»		16,6	13,1	9,7
10 14	»		17,3	13,5	10,0
15 19	»		17,3	14,1	10,4

	Температ. воздуха	Температура	на	глубинахъ
20 24 іюня	19,1	17,6	14,5	10,7
25 29 »		18,1	14,8	11,1
30 4 іюля	22,5	19,0	15,0	11,4
5 9 »		19,4	15,4	11,7
10 14 »		20,3	15,9	12,0
15 19 »		20,8	16,5	12,3
20 24 »		21,3	17,1	12,6
25 29 »		21,8	17,5	13,0
30 3 августа	19,5	21,5	17,9	13,3
4 8 »		20,4	18,0	13,6
9 13 »		19,6	17,9	13,9
14 18 »		19,1	17,6	14,1
19 23 »		19,3	17,3	14,2
24 28 »		19,4	17,4	14,3
29 2 сентяб.	14,8	19,7	17,5	14,4
3 7 »		18,7	17,2	14,5
8 12 »		18,6	17,1	14,6
13 17 »		17,6	17,1	14,6
18 22 »		16,8	16,8	14,6
23 27 »		14,9	16,5	14,6
28 2 октября	7,5	13,2	15,6	14,5
3 7 »		12,7	15,1	14,3
8 12 »		11,8	14,7	14,2
13 17 »		10,4	14,1	14,0
18 22 »		9,5	13,3	13,8
23 27 »		9,6	12,7	13,5
28 1 ноября	2,1	9,0	12,3	13,2
2 6 »		6,9	12,0	13,0
7 11 »		6,0	11,3	12,7
12 16 »		5,4	10,6	12,4
17 21 »		5,5	10,0	12,1
22 26 »		4,7	9,6	11,8

	Температ. воздуха	Температура		на глубинахъ
27 1 декабря	— 5,1	4,6	9,2	11,5
2 6 »		3,4	8,8	11,2
7 11 »		2,2	8,0	10,9
12 16 »		1,9	7,4	10,6
17 21 »		1,3	7,0	10,3
22 26 »		0,9	6,5	10,0
27 31 »		0,9	6,1	9,6
Годъ	7,6	9,4	10,3	10,4
Мѣсячн. амплитуда	29,8	21,7	13,8	8,2

Изъ этой таблицы можно видѣть, что на глубинѣ 0,5 м. минимумъ температуры равенъ—1,3° и имѣетъ мѣсто между 15 и 19 февраля; послѣ этого пятидневія температура начинаетъ повышаться, сначала медленно (на нѣсколько десятыхъ въ пятидневіе), послѣ быстрѣе и быстрѣе; особенно быстрое повышеніе замѣтно въ апрѣлѣ; напр., въ пятидненіе съ 15 по 20 апрѣля, температура возрастаетъ на 3,6°; повышеніе продолжается до конца іюля, когда температура достигаетъ наибольшей высоты 21,8°; далѣе опять начинается пониженіе, которое, съ нѣкоторыми небольшими перерывами, продолжается до конца февраля. Почва остается промерзшей среднимъ числомъ отъ 16 января до 1 марта; въ отдѣльные, особенно суровые годы, продолжительность промерзанія увеличивается; такъ напр., въ 1883 году температура почвы на глубинѣ 0,5 м. была ниже 0° отъ 11 января до конца марта, т. е. болѣе двухъ мѣсяцевъ; температура, при этомъ понизилась до — 7,9 (20 января); даже средняя температура пятидневія была — 6,7. Столь сильное пониженіе температуры почвы слѣдовало за морозами, которые начались 6 января и достигли 11 января —21,2°; другой разъ температура почвы понизилась до—6,1° между 15 и 20 февраля, что было вызвано новымъ усиленіемъ морозовъ 9 февраля. Такимъ образомъ, крайнія повышенія и пониженія температуры, среднимъ числомъ, равны—1,3°

и 21,8°; амплитуда годовыхъ колебаній равна 23,1°. Иной ходъ на глубинѣ 1,5 м. Минимумъ бываетъ между 20 февраля и 1 марта и. равенъ 3,5°; послѣ этого температура весьма правильно начинаетъ повышаться, сперва медленно, а затѣмъ быстрѣе; особенно быстрое повышеніе замѣтно въ апрѣлѣ; такъ, въ срединѣ апрѣля температура повышается на 1,2° въ пятидневіе; повышеніе продолжается до начала августа; между 4 и 8 августа наступаетъ максимумъ равный 18,0°; затѣмъ опять начинается пониженіе. Амплитуда годовыхъ колебаній равна 14,5°. Въ годы, особенно холодные, минимумъ падаетъ ниже указаннаго средняго; напр:, въ 1883 году температура, постепенно понижаясь, упала до 1,9° (17—21 марта), т. е. на 1,6 ниже средняго. Замѣчательно, что на этой глубинѣ ходъ температуры чрезвычайно правиленъ; переходъ отъ максимума къ минимуму и обратно идетъ весьма постепенно, безъ скачковъ и возвратовъ.

Мы сказали, что на глубинѣ 1,5 м. температура падаетъ до 3,5° и въ самыя суровыя зимы до 1,9°. Слѣдовательно, слой, промерзающій зимою, лежитъ выше 1,5 метра; за неимѣніемъ непосредственныхъ наблюденій мы не можемъ точно опредѣлить глубину слоя, температура котораго понижается до нуля; но принимая, что между 0,5 и 1,5 пониженіе пропорціонально глубинѣ, получимъ, что слой, температура котораго можетъ понижаться до нуля, лежитъ на глубинѣ 0,7—0,8 метра. Въ суровыя зимы слой этотъ понижается до глубины 1 метра. Съ другой стороны, въ теплыя зимы, какъ это было въ 1879, 1881 и 1882 г., слой этотъ вовсе не охлаждался до нуля.

Слѣдующій термометръ находится на глубинѣ 3 метровъ. Ходъ его отличается отъ хода двухъ первыхъ. Минимумъ въ 6,4° наступаетъ между 15—20 апрѣля; далѣе температура начинаетъ медленно повышаться; въ іюнѣ она достигаетъ 11°, въ іюлѣ 12°, въ августѣ 13°; повышеніе продолжается до

конца сентября; въ послѣднее пятидневіе сентября она, достигнувъ 14,6°, поворачиваетъ и начинаетъ падать; на этой глубинѣ, слѣдовательно, температура колеблется въ предѣлахъ 8,2°. Годовой ходъ температуры на этой глубинѣ замѣчательно правильный; въ каждое пятидненіе температура падаетъ или повышается на 0,2—0,3°. Соединяя въ одной таблицѣ главнѣйшіе результаты, получаемъ:

Амплитуда	Макс.	Миним.	Наступ. мак.	Наступ. мин.	Опазд. мин.	Опаз. мак.
0,5 м. 23,1	21,8	— 1,3	25—29 іюля	15—19 фев.	—	—
1.5 м. 14,5	18,0	3,5	4—8 авг.	20—24 »	5 дней	10 дней
3,0 м. 8,2	14,6	6,4	8—12 сент.	1—5 апрѣля	40 дней	40 дней

Какъ видно изъ этой таблицы, на глубинѣ 1,5 м. максимумъ опаздываетъ на 10 дней; а минимумъ на 5; на глубинѣ-же 3 м. максимумъ и минимумъ одинаково опаздываютъ на 40 дней. Амплитуда годовыхъ колебаній уменьшается на первый метръ на 8,6°, а на слѣдующіе $1^1/_2$ метра на 6,3. Для того, чтобы выразить это уменьшеніе амплитуды въ функціи глубины, можно воспользоваться извѣстной формулой:

$$\log \Delta p = A + Bp$$

въ которой p—глубина,

Δp—амплитуда на глубинѣ p,

A и B—постоянныя.

Для вычисленія постоянныхъ A и B мы имѣемъ наблюденія на трехъ глубинахъ. Способъ наименьшихъ квадратовъ даетъ слѣдующія значенія для этихъ постоянныхъ:

$$\log \Delta p = 1,4442 - 0,1787p.$$

Формула эта даетъ слѣдующіе результаты:

	вычисл.	наблюд.	разност.	уменьшеніе ампл. на 1 метръ
p=0,5	22,6	23,1	+05	—
=1,0	18,4	—	—	9,4
=1,5	15,0	14,5	—0,5	—
=2,0	12,2	—	—	6,2
=3,0	8,1°	8,2	+0,1	4,1

Путемъ экстраполяціи можемъ вычислить на какой глубинѣ лежитъ слой, въ которомъ амплитуда годовыхъ колебаній равна 0,01°; внося въ формулу $\Delta p = 0{,}01$, получаемъ $p = 19{,}2$; слѣдовательно, если формула наша выражаетъ дѣйствительный законъ уменьшенія амплитуды, то слой постоянной температуры лежитъ на глубинѣ 19,2 метра. Число это довольно близко къ тѣмъ результатамъ, которые получены для другихъ станцій: такъ, въ Нукусѣ амплитуда 0,01° находится на глубинѣ 15 метровъ, въ Петербургѣ—22,2 м., въ Эдинбургѣ—на глубинѣ 18,51 — 21,62 м., въ Кенигсбергѣ на глубинѣ 22,9 метра. Вообще нужно замѣтить, что глубина, до которой достигаютъ еще годовыя колебанія, зависитъ не только отъ физическихъ свойствъ почвы и ея теплопроводности, но также отъ амплитуды колебаній температуры на поверхности. По изслѣдованіямъ Вильда, глубина слоя, непринимающаго участія въ годовыхъ колебаніяхъ, лежитъ между 6 и 34 метрами. Значительный интересъ представляетъ относительное распредѣленіе тепла на различныхъ глубинахъ. Отъ половины октября до половины апрѣля температура съ глубиною повышается; такъ напр., въ 1-ое пятидневіе декабря:

на	глуб.	0,5	м.	3,4°
»	»	1,5	»	8,8
»	»	3,0	»	11,2

въ первое пятидневіе февраля:

на	глуб.	0,5	м.	—0,9°
»	»	1,5	»	4,3
»	»	3,0	»	8,0

Отъ 15 до 25 апрѣля средній, болѣе холодный слой, лежитъ между двумя слоями, имѣющими болѣе высокую температуру. Съ 25 апрѣля условія измѣняются, а, именно, температура съ глубиною понижается; напр. въ концѣ іюня: па глуб. 0,5 м. 17,6°

»	1,5	»	14,5
»	3,0	»	10,7

Подобное отношеніе продолжается до половины сентября; съ половины сентября до половины октября средній, болѣе теплый слой, лежитъ между двумя слоями, имѣющими болѣе низкую температуру.

Въ заключеніе приведемъ еще средній годовой ходъ температуры почвы и воздуха по мѣсяцамъ за одни и тѣ-же годы:

	Воздухъ	0,5 м.	1,5 м.	3 м.
Январь	— 7,3	— 0,2	5,1	8,9
Февраль	— 5,1	— 1,1	3,7	7,5
Мартъ	— 0.8	1,1	3,7	6,7
Апрѣль	7,9	5,9	5,1	6,4
Май	15,8	13,8	10,2	7,9
Іюнь	19,1	18,2	13,9	10,3
Іюль	22,5	20,6	16,2	12,2
Августъ	19,5	19,7	17,5	14,0
Сентябрь	14,8	16,8	16,8	14,6
Октябрь	7,5	13,7	13,5	13,9
Ноябрь	2,1	5,6	10,2	12,3
Декабрь	— 5,1	1,8	7,1	10,4
Годъ	7,6	9,4	10,3	10,4
Амплитуды	29,8	21,7	13,8	8,2

Для сравненія приведемъ главнѣйшіе результаты, полученные въ Тифлисѣ на глубинахъ, близкихъ къ тѣмъ, на которыхъ установлены термометры въ Елисаветградѣ:

	Воздухъ	0.41 м.	1,60 м.	3,21 м.	4,14
Январь	— 2,19	1,48	10,25	14,32	15,35
Февраль	— 0,19	1,23	8,11	12,76	14,31
Мартъ	2,57	5,34	8,13	11,70	13,36
Апрѣль	10,92	11,66	9,52	11,37	12,67
Май	16,75	17,68	12,76	11,90	12,53
Іюнь	20,58	22,18	16,05	13,14	12,95
Іюль	25,29	28,39	19,54	14,65	13,74

Августъ	23,97	27,38	21,96	16,35	14,82
Сентябрь	17,59	21,67	21,00	17,21	15,81
Октябрь	14,09	18,22	19,30	17,07	16,14
Ноябрь	8,86	12,06	16,61	16,50	16,10
Декабрь	0,93	4,96	13,21	15,36	15,69
Годъ	11,60	14,35	14,70	14,36	14,46

Что касается промерзанія почвы, то естественно, въ Тифлисѣ слой этотъ значительно тоньше, чѣмъ въ Елисаветградѣ; въ 1880 году на глубинѣ 0,20 м. температура понизилась до —1,3 (январь), а на глубинѣ 0,41 м. минимумъ температуры былъ 0,4; слѣдовательно, слой, температура котораго упала до нуля, находится между 0,20 и 0,41, т. е. приблизительно на глубинѣ 0,35 метра [1])

Особое прибавленіе.

Въ видѣ особаго прибавленія къ настоящей статьѣ приведены ниже весьма интересныя наблюденія (кажется, нигдѣ неопубликованныя), произведенныя въ Крыму въ Айбарской буровой скважинѣ г. инженеромъ Вильбергомъ. Буровая скважина доведена до глубины 373 саж.; вся скважина отъ глубины $13^1/_2$ саж. наполнена водою; наблюденія производились при помощи термометра Сикса.

	1877 годъ						1878 г.	
Глубина	30 апр.	11 мая	2 іюня	11 іюля	13 авг.	22 окт.	25 апр.	Средн.
0 саж.	17,5°R	17,8°R	17,5°R	19,2°R	22,4°R	22,8°R	6,8°	—
100	15,25	16,0	15,0	15,2	15,2	16,0	16,0	15,5

[1]) На сельско-хозяйственной станціи въ Одессѣ полныя наблюденія на глубинахъ 0.4, 0.8, 1.6, 3,2 метр. имѣются только за октябрь 1883 года; полученные результаты весьма близки къ тѣмъ, которые найдены въ Елисаветградѣ:

	0,4 м.	0,5	0,8	1,5	1,6	3,0	3,2
Одесса	20,7	—	19,6	—	17,6	—	11,1
Елисаветградъ:	—	19,0	—	17,7	—	14,8	—

200	21,5	21,8	22,4	22,8	22,4	22,8	23,0	22,8
300	27,0	27,2	28,0	27,2	27,2	27,2	28,25	27,4
350	33,23	—	—	—	—	—	—	—
353	—	33,9	—	—	—	—	—	—
356½	—	—	33,7	—	—	—	—	—
358½	—	—	—	33,9	—	—	—	—
362	—	—	—	—	38,9	—	—	—
369½	—	—	—	—	—	34,4	—	—
373	—	—	—	—	—	—	34,4	—

Замѣчательно, что температуры, измѣренныя на глубинахъ 100—300 саж., довольно близки къ тѣмъ, которыя найдены въ Шперембергѣ;

			Шперемб.	Айб. скв.
Глубина	220	метр.	17,3°R	—
»	213	»	—	15,5
»	440	»	—	22,8
»	470	»	23,3	—
»	597	»	26,5	—
»	660	»	—	27,4.

Но температура на днѣ въ айбарской скважинѣ (794,5 метра) значительно выше, чѣмъ на соотвѣтственной глубинѣ въ Шперембергѣ.

О трехшестной сочлененной системѣ.

И. М. Занчевскаго.

Пусть $ABCD$ (фиг. 1) сочлененный четырехугольникъ. Если AB неподвижна, то мѣсто точки P, лежащей на CD, есть нѣкоторая кривая 6-го порядка, распадающаяся на окружность и кривую, обратную коническимъ сѣченіямъ, при слѣдующихъ двухъ условіяхъ: 1) если одна изъ окружностей, по которымъ скользятъ концы шеста CD, проходитъ черезъ центръ другой и при томъ двѣ другія стороны четырехугольника равны, или 2) если радіусы этихъ окружностей одинаковы и $CD = AB$. Roberts, давшій первое изъ этихъ условій [1]), и Hart, давшій второе изъ нихъ [2]), получали мѣсто точки P не изъ общаго уравненія 6-го порядка, а предполагая эти условія данными напередъ. Изслѣдованіемъ самой Уаттовской кривой [3]) занялся впервые Cayley [4]), который и получилъ, какъ частные случаи, кривыя Roberts'а и Hart'а. При этомъ Cayley употребляетъ такой методъ:

---

[1]) S. Roberts. On the Mechanical Description of some species of Circular Curves of the third and fourth degrees. Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. II, p. 133.

[2]) H. Hart. On certain conversions of motion. Messenger of Mathematics, t *IV*, p. 82.

[3]) Кривая, описываемая точкою P, называется *Уаттовской*.

[4]) On the Mechanical Description of Certain Sextic Curves. Proceed. of the Lond. Math. Soc., Vol IV, p. 105.

Вмѣсто x и y онъ вводитъ новыя перемѣнныя u и v:

$$u = \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha, \quad v = \operatorname{tg} {}^1/_2 \beta.,$$

гдѣ α и β углы, образованные сторонами CD и DA съ неподвижною линіею AB, и находитъ затѣмъ уравненіе между u и v

$$f(u,v) = 0,$$

которое оказывается уравненіемъ кривой 4-го порядка, которой D (Defect) $=1$. Искомая кривая получается преобразованіемъ кривой 4-го порядка посредствомъ формулъ:

$$x : y : z (=1) = P : Q : R,$$

гдѣ P, Q и R суть функціи 4-ой степени отъ u и v. Изслѣдованіе этихъ функцій, а также уравненія

$$f(u, v) = 0$$

и даетъ возможность опредѣлить условіе распаденія кривой Уатта.

Въ настоящей замѣткѣ рѣшается та же задача, но только инымъ, болѣе простымъ, путемъ. Методъ, который здѣсь выбранъ, какъ кажется, можетъ быть примѣненъ и къ изслѣдованію другихъ сочлененій.

§ 1.

Назовемъ

$$AD = b\ , \ BC = d\ , \ AB = a\ ,$$
$$DP = p\ , \ CP = q\ , \ DC, = p + q = c\ ,$$
$$\angle PDA = \alpha\ , \ \angle PCB = \beta,$$

причемъ подъ α и β мы подразумѣваемъ или внутренніе углы

четырехугольника $ABCD$ или дополненія ихъ до 2π. Принимая A за начало прямоугольныхъ координатъ, а AB за ось абсциссъ, легко найти связь между $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и координатами точки P:

$$PP_1^2+AP_1^2=y^2+x^2=AP^2=b^2+p^2-2bp\cos\alpha\ ,$$

$$PP_1^2+BP_1^2=y^2+(x-a)^2=BP^2=d^2+q^2-2dq\cos\beta\ ,$$

откуда:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha=u=\frac{b^2+p^2-\rho^2}{2pb}\ ,\\ \cos\beta=v=\frac{d^2+q^2-a^2+2ax-\rho^2}{2dq}\ ;\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

здѣсь $\rho^2=x^2+y^2$.

За перемѣнныя возьмемъ u и v; тогда связь между u, v, x и y выразится уравненіями (1).

По извѣстной теоремѣ элементарной геометріи имѣемъ

$$a^2=b^2+c^2+d^2-2bc\cos\alpha-2cd\cos\beta+2bd\cos(\alpha\pm\beta),$$

причемъ два знака соотвѣтствуютъ двумъ различнымъ положеніямъ прибора, представленнымъ на фиг. (1) и (2). Это различіе исчезнетъ, если, разложивши $\cos(\alpha\pm\beta)$, перенесемъ въ лѣвую часть членъ $-2bd\cos\alpha\cos\beta$ и затѣмъ возвысимъ обѣ части въ квадратъ.

Пусть $$b^2+c^2+d^2-a^2=2M,\qquad(2)$$

тогда будемъ имѣть:

$$(M-bcu-cdv+bduv)^2=b^2d^2(1-u^2)(1-v^2)\qquad(3)$$

Называя

$$M-bcu-dcv=dbL\ ,\qquad(4)$$

легко найдемъ:

$$(L+2uv)L=1-u^2-v^2; \tag{5}$$

это уравненіе представляетъ кривую 3-го порядка.

Продифференцируемъ его сначала по u, а потомъ по v:

$$\left.\begin{aligned} &L\frac{dL}{du}+uv\frac{dL}{du}+Lv=-u,\\ &L\frac{dL}{dv}+uv\frac{dL}{dv}+Lu=-v; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

но изъ (4) имѣемъ:

$$\frac{dL}{du}=-\frac{c}{d},\ \frac{dL}{dv}=-\frac{c}{b},$$

такъ что ур. (6) преобразуются въ слѣдующія:

$$Lc+cuv-Ldv-du=0, \tag{7}$$

$$Lc+cuv-Lbu-bv=0. \tag{8}$$

Если положить:

$$L=\pm v,\ u=\mp 1,$$

то ур. (5) и (8) удовлетворяются сами собою, а изъ (7) получимъ: $v^2=1$, или $v=\pm 1$; т. е. ур. (5), (7) и (8) удовлетворяются такими положеніями:

$$\left.\begin{aligned} &u=-1,\ v=+1,\ L=+1;\\ &u=-1,\ v=-1,\ L=-1;\\ &u=+1,\ v=+1,\ L=-1;\\ &u=+1,\ v=-1,\ L=+1. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Подобнымъ-же образомъ, полагая

$$L=\pm u\,,\ v=\mp 1\,,$$

мы убѣдимся, что ур. (5) и (7) удовлетворяются, а изъ (8) имѣемъ: $u^2=1$ или $u=\pm 1$; т. е. мы получаемъ опять значенія L, u и v, при которыхъ ур. (5), (7) и (8) удовлетворяются, но всѣ эти значенія заключаются уже въ группѣ (9).

Группа (9) даетъ координаты двойныхъ точекъ кривой (5), если при этомъ L имѣетъ соотвѣтственныя значенія. Подставляя въ (4) значенія L, соотвѣтствующія извѣстнымъ значеніямъ координатъ двойныхъ точекъ, получаемъ:

если $u=-1$, $v=+1$ есть двойная точка, то

$$\frac{b^2+c^2+d^2-a^2}{2}+bc-dc=db,$$

откуда $a-b=c-d,$

а также $a+b=d-c;$ (10)

если $u=-1$, $v=-1$ есть двойная точка, то

$$\frac{b^2+c^2+d^2-a^2}{2}+bc+dc=-db,$$

откуда $a=\pm(b+c+d);$ (11)

если $u=+1$, $v=+1$ есть двойная точка, то

$$\frac{b^2+c^2+d^2-a^2}{2}-bc-dc=-db,$$

откуда $a-b=d-c;$

или $a+b=c-d;$ (12)

если $u=+1$, $v=-1$ есть двойная точка, то

$$\frac{b^2+c^2+d^2-a^2}{2}-bc+dc=bd,$$

откуда $\qquad a+b=c+d,$

а также $\qquad a-b=c-d. \qquad (13)$

Замѣтимъ, что условіе (11) не дѣйствительно, такъ какъ линіи a, b, c, d, составляютъ четырехугольникъ, слѣдовательно a болѣе, чѣмъ $b+c+d$. Комбинируя остальныя 6 условій и отыскивая значенія постоянныхъ, при которыхъ имѣютъ мѣсто одновременно двѣ двойныхъ точки, получаемъ $C_6{}^2=15$ новыхъ условій, которыя сводятся къ одному изъ слѣдующихъ:

$$abcd=0, \tag{14}$$

$$a=\pm d,\ b=c;\ a=\pm b,\ c=d;\ a=\pm c,\ b=d. \tag{15}$$

Изъ нихъ (14) недѣйствительно, а при каждомъ изъ остальныхъ кривая (5) имѣетъ двѣ двойныя точки.

А такъ какъ кривая третьяго порядка не можетъ, не распадаясь, имѣть болѣе одной двойной точки, то условія (15) соотвѣтствуютъ распаденію кривой (5) на прямую и коническія сѣченія.

Переходя затѣмъ отъ ур. (5) къ кривой, описываемой точкою P, и имѣя въ виду ур. (1), мы заключаемъ, что мѣсто точки P есть вообще кривая 6-го порядка, которой $D=1$; при выполненіи одного изъ условій (10) (12) (13) кривая пріобрѣтаетъ еще одну двойную точку, такъ что становится уникурсальной ($D=o$), а при выполненіи условій (15), она распадается на окружность и нѣкоторую кривую 4-го порядка. Займемся изслѣдованіемъ ея для каждаго случая.

§ 2.

Пусть $a=d$, $b=c$. Вводя эти условія въ ур. (3), получимъ:

$$b^2(b-dv)\,(1-u)^2=d^2(1-u^2)\,(1-v^2)$$

и по сокращеніи на $(1-u)$

$$2d^2v^2+2bduv-(b^2+d^2)u-2bdu+b^2-d^2=0.$$

Замѣняя u и v равными имъ величинами изъ (1), получимъ уравненіе вида:

$$A\rho^4-2B\rho^2x-C\rho^2+4d^2bpx^2+Mx+N=0, \qquad (16)$$

гдѣ

$$A=bq+bp=b(p+q)=b^2,$$

$$B=2bpd+dqb=db(p+b),$$

$$C=2q^2b+(b^2+p^2+q^2)qb-q^2(b^2+d^2)-2b^2pq=$$
$$=2q^2bp+bq(b^2+p^2-2bp)+bq^3-q^2(b^2+d^2)$$
$$=2q^2b^2-q^2(b^2+d^2)=q^2(b^2-d^2),$$

$$M=qb(b^2+p^2)2d+4q^2bpd-4b^2pqd=2dq^2b(b+p),$$

$$N=q^4bp+q^3b(p^2+b^2)-(b^2+d^2)q^2(b^2+p^2)-2b^2pq^3+$$
$$+2q^2bp(b^2-d^2)=q^4bp+q^5b-b^2q^4-d^2q^2(b+p)^2=$$
$$=-d^2q^2(b+p)^2,$$

такъ что ур. (16) напишется:

$$b^2\rho^4-2db(b+p)\rho^2x-q^2(b^2-d^2)\rho^2+4d^2bpx^2+2dq^2b(b+$$
$$+p)x-d^2q^2(b+p)^2=0,$$

а это можно написать:

$$\left\{\rho^2-\frac{d}{b}(b+p)x\right\}^2-\left\{qx-\frac{dq(b+p)}{b}\right\}^2-\frac{q^2}{b^2}(b^2-d^2)y^2=0.$$

Замѣняя здѣсь x выраженіемъ $x'+\frac{d}{b}(b+p)$

и ставя опять x вмѣсто x', получаемъ:

$$\left\{\rho^2+\frac{d}{b}(b+p)x\right\}^2-q^2x^2-\frac{b^2-d^2}{b^2}q^2y^2=0 \text{ [1]};$$

это есть уравненіе кривой 4-го порядка, обратной коническимъ сѣченіямъ по отношенію къ началу.

Выраженіе:

$$\left[\frac{d^2}{b^2}(b+p)^2-q^2\right]\frac{b^2-d^2}{b^2}q^2$$

можетъ быть больше, меньше или равно нулю; соотвѣтственно этому мы получаемъ обратную гиперболы, эллипса или параболы.

Если $b=-p$, получаемъ обратную центральнымъ коническимъ сѣченіямъ.

Къ такимъ же результатамъ мы пришли-бы, если-бы стали разсматривать случай, когда $a=b$, $c=d$.

§ 3.

$a=c$, $b=d$. Четырехугольникъ $ABCD$ параллелограммъ.

Если параллелограммъ находится въ положеніи, изображенномъ на фиг. (3), то точка P очевидно описываетъ ок-

[1] Cp. Roberts. On the pedals of Conic Sections. Proc. of the Lond. Math. Soc., t. III, p. 89.

ружность, если-же онъ расположенъ какъ на фиг. (4)[1]), то при неподвижности AB, точка P описываетъ нѣкоторую кривую 4-го порядка. Докажемъ, что она будетъ обратной коническимъ сѣченіямъ, по отношеніе къ точкѣ o, причемъ $AO=q$.

Уравненіе (5) по сокращеніи на b^2 и раскрытіи скобокъ приведется къ виду:

$$(a^2+b^2)(u+v)^2-2ab(u+v)-2abuv(u+v)=0.$$

Сокративъ на $(u+v)$, получимъ:

$$2abuv-(a^2+b^2)(u+v)+2ab=0. \qquad (17)$$

Перенесемъ начало координатъ изъ A въ O. Ур. (17) представляетъ соотношеніе между косинусами угловъ, независящихъ отъ положенія начала, а потому намъ остается въ выраженіи (1) подставить $x+q$ вмѣсто x; тогда получимъ

$$u=\frac{b^2+p^2-q^2-\rho^2-2qx}{2bp},$$

$$v=\frac{b^2+q^2-p^2+2px-\rho^2}{2bq}.$$

Подставляя эти значенія u и v въ (17) и приведя къ одному знаменателю, получаемъ:

$$a\rho^4+2a(q-p)\rho^2x-A\rho^2-4qpax^2+2Bx+C=0,$$

гдѣ

$$A=ab^2+aq^2-ap^2+ab^2+ap^2-aq^2-a^2(p+q)-b^2(p+q)=$$
$$=a(b^2-a^2),$$

---

[1]) Въ этомъ положеніи параллелограммъ называютъ *контрапараллелограммомъ*, или *трапеціей Гарта*.

$$B=pb^2(a-p)-qb^2(a-q)+q^2a(a-q)-p^2a(a-p)-pq^2a+$$
$$+q^2pa=0,$$

$$C=ab^4+ab^2p^2-ab^2q^2+aq^2b^2-aq^4-ap^2b^2-ap^4+ap^2q^2+$$
$$+4ab^2pq-a^3b^2-a^3pq+a^2q^3+a^2p^3-b^4a-pqab^2+b^2q^3+$$
$$+b^2p^3.$$

Сдѣлавъ въ послѣднемъ выраженіи ближайшія сокращенія и замѣчая, что

$$b^2(p^3+q^3)=b^2(a^3-3p^2q-3pq^2)=b^2(a^3-3apq),$$

получимъ:

$$C=2aq^2p^2-aq^4-ap^4-a^3pq+a^2q^3+a^2p^3=$$
$$=2ap^2q^2-a^3pq+aq^3(a-q)+ap^3(a-p)=$$
$$=2aq^2p^2-a^3pq+apq(a^2-2pq)=0\ ,$$

такъ что уравненіе кривой приведется къ виду:

$$\rho^4-2(q-p)\rho^2x-4pqx^2-\rho^2(b^2-a^2)=0\ ;$$

или еще проще

$$\{\rho^2-(q-p)x\}^2-b^2x^2-(b^2-a^2)y^2=0\ ,$$

т. е. мѣсто точки P есть кривая, обратная коническимъ сѣченіямъ по отношенію къ началу. При $q=p$, т. е. для средины шеста CD получаемъ кривую, обратную центральнымъ коническимъ сѣченіямъ.

§ 4.

Преобразованіе, которымъ мы пользовались при изслѣдованіи мѣста точки P, лежащей на шестѣ CD, можетъ быть примѣнено также и тогда, когда опа лежитъ внѣ его, какъ

это имѣетъ мѣсто на фиг. 5, а также вообще во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда ищется мѣсто вершины діады[1]), двигающейся концами своими по двумъ окружностямъ съ различными центрами (фиг. 6), независимо отъ того, какимъ способомъ движеніе радіуса AD связывается съ движеніемъ радіуса BC. Если центры окружностей совпадаютъ (фиг. 7), то измѣненіе косинусовъ ($\cos\alpha$ и $\cos\beta$) не опредѣляетъ измѣненія координатъ точки P, такъ какъ мы всегда будемъ имѣть:

$$\overline{AD}^2+\overline{DP}^2-2AD.DP.\cos\alpha=\overline{BC}^2+\overline{CP}^2-2CB\cos\beta.$$

Во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда для изслѣдованія данной кривой преобразуютъ ее въ другую, должны быть выполнены два условія: 1) чтобы новая кривая была-бы доступна изслѣдованію, и 2) чтобы легко было перейти отъ новой кривой къ данной, т. е. преобразованіе должно быть раціональнымъ. Преобразованіе, употребленное въ § 1, удовлетворяетъ второму изъ этихъ условій; въ примѣненіи къ трехшестной системѣ оно удовлетворяетъ и первому. Что-же касается до того, удовлетворяетъ-ли оно и первому во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда можетъ быть употреблено, то вообще и заранѣе объ этомъ ничего сказать нельзя.

§ 5.

Въ заключеніе укажемъ, какимъ образомъ выражается геометрически отношеніе скорости одной изъ точекъ C или D къ угловой скорости вращенія шестовъ DA или CB въ трехшестной системѣ (фиг. 1). Для этого сдѣлаемъ замѣчаніе общаго характера.

Пусть DC (фиг. 8)—шестъ, концами своими скользящій по двумъ кривымъ, нормали къ которымъ въ точкахъ D и C

[1]) *Діадой* называютъ систему, состоящую изъ двухъ сочленныхъ шестовъ.

суть соотвѣтственно линіи DN и CN'; O—центръ кривизны кривой, описываемой точкою D, въ этой точкѣ. Точка C' есть точка пересѣченія нормалей, слѣд.—мгновенный центръ вращенія шеста DC. Назовемъ скорости точекъ C и D соотвѣтственно черезъ v и v_1, тогда

$$\frac{v}{v_1}=\frac{CC'}{DC'}.$$

Черезъ O проведемъ OK параллельно CN до встрѣчи съ продолженіемъ шеста DC; тогда

$$\frac{CC'}{DC'}=\frac{OK}{DO}$$

и предполагая, что

$$v=\Omega . DO,$$

получимъ

$$\frac{v_1}{\Omega}=OK.$$

Если мѣсто точки D есть окружность, Ω есть угловая скорость вращенія радіуса этой окружности.

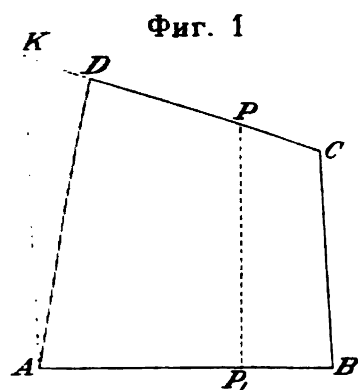
Примѣняя только что сказанное къ фиг. (1), мы должны сдѣлать слѣдующее построеніе: изъ A проводимъ AK параллельно CB до встрѣчи съ продолженіемъ шеста CD; тогда

$$\frac{v_1}{\Omega}=AK,$$

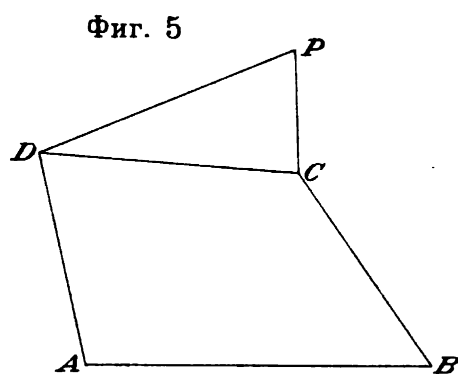
гдѣ v_1—скорость точки C, а Ω—угловая скорость вращенія шеста DA.

(*Изъ статьи И. М. Занчевскаго: о трехшестной сочлененной системѣ*).

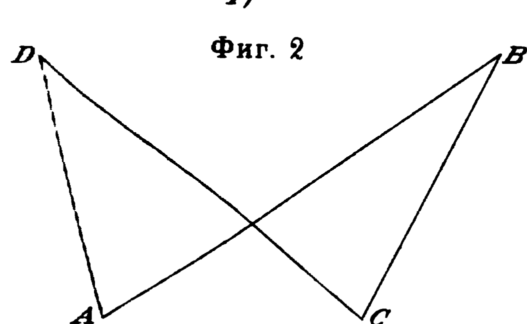
Фиг. 1



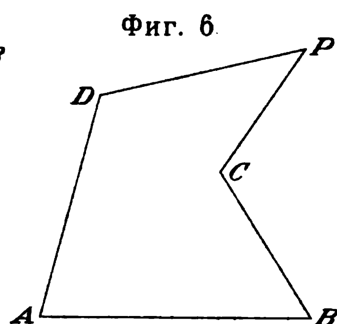
Фиг. 5



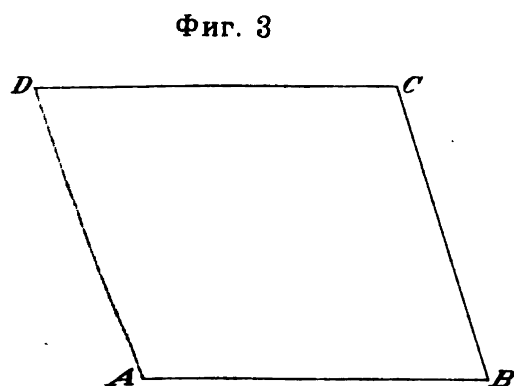
Фиг. 2



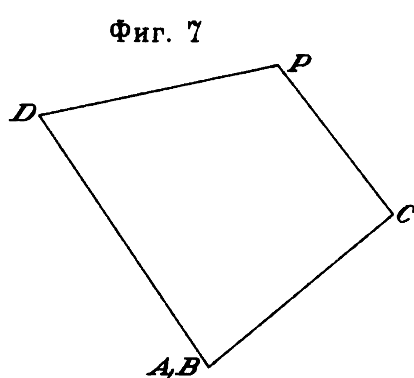
Фиг. 6



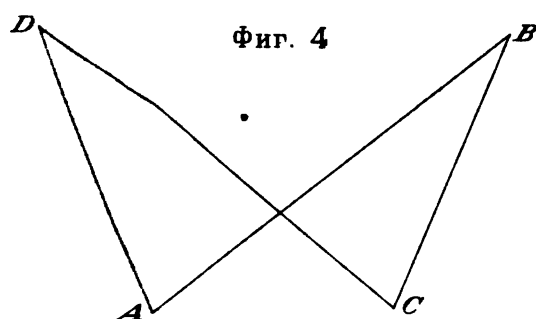
Фиг. 3



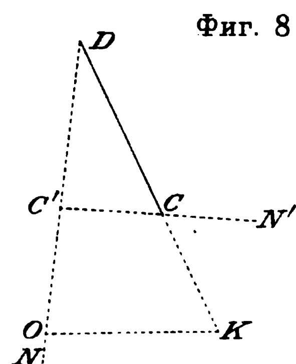
Фиг. 7



Фиг. 4



Фиг. 8



Объ ударѣ двухъ шаровъ, изъ которыхъ одинъ плаваетъ въ жидкости.

Н. Е. Жуковскаго.

Пусть шаръ массы m, падая въ вертикальномъ направленіи со скоростью v, наноситъ прямой ударъ шару массы m', плавающему въ жидкости. Плотность шара m' возьмемъ равной половинѣ плотности жидкости ρ; радіусъ его назовемъ чрезъ r', и предположимъ, что центръ его совпадаетъ съ центромъ полусферическаго сосуда, въ который до верху налита жидкость.

Чтобы опредѣлить скорости u и u' шаровъ послѣ удара, выразимъ, что потеренное количество движенія уравновѣшивается силами удара:

$$Q=\int_0^\tau Pdt\ ,\ q=\int_0^\tau pdt;$$

гдѣ P и p суть функціи времени, выражающія взаимное давленіе шаровъ и давленіе внутри жидкости въ продолженіи весьма малаго времени удара τ.

Получимъ:

$$Q=m(v-u)=m'u'+\int qsn\theta ds, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dq}{dx}=-\frac{d\varphi}{dx},$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{dq}{dy}=-\frac{d\varphi}{dy}, \qquad (2)$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{dq}{dz}=-\frac{d\varphi}{dz}.$$

Интегралъ въ фор. (1) распространяется на погруженную поверхность шара m'; при чемъ ds есть элементъ площади этой поверхности, а θ уголъ, который радіусъ, проведенный къ этому элементу, образуетъ съ горизонтальною плоскостью. Въ фор. (2) φ есть потенціальная функція скоростей точекъ жидкости послѣ удара. Эта функція должна для всей жидкой массы удовлетворять условію

$$\Delta_2\varphi=0\,,$$

которое, вслѣдствіе полной симметріи относительно вертикальной оси, можетъ быть съ помощію сферическихъ координатъ написана такимъ образомъ:

$$\frac{d}{dr}\left[r^2 cs\theta \frac{d\varphi}{dr}\right] + \frac{d}{d\theta}\left[cs\theta \frac{d\varphi}{d\theta}\right] = 0. \qquad (3)$$

Кромѣ того мы должны имѣть: на погруженной поверхности шара

$$\frac{d\varphi}{dr} = u' sn\theta\,, \qquad (4)$$

на стѣнкахъ сосуда

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \qquad (5)$$

и на свободной поверхности жидкости

$$\varphi=0. \qquad (6)$$

Послѣднее ур. пишемъ потому, что на основаніи фор. (1) можно принять

$$q=-\rho\varphi,$$

а на свободной поверхности $q=0$.

Для того, чтобы удовлетворить всѣмъ этимъ условіямъ, возьмемъ

$$\varphi = sn\theta \; R;$$

гдѣ R есть функція одного радіуса вектора.

Поставляя эту величину въ ур. (3), найдемъ для опредѣленія R, уравненіе:

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - 2R = 0,$$

интегралъ котораго будетъ

$$R = cr + \frac{c_1}{r^2}.$$

Вслѣдствіе этого

$$\varphi = sn\theta \left(cr + \frac{c_1}{r^2}\right).$$

Эта функція обращается въ 0 при $\theta = 0$, поэтому ур. (6) удовлетворено. Чтобы удовлетворить ур. (4) и (5), выбираемъ произвольныя постоянныя c и c_1 такъ, чтобы

$$c - \frac{2c_1}{r_1^3} = u,$$

$$c - \frac{2c_1}{r_2^3} = 0.$$

Получаемъ, что

$$c_1 = -u'\frac{r_1^3 r_2^3}{2(r_2^3 - r_1^3)},$$

$$c = -u'\frac{r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}.$$

Такимъ образомъ находимъ

$$\varphi = -u' sn\theta \frac{r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}\left(r + \frac{r_2^3}{2r^2}\right). \tag{8}$$

Пользуясь фор. (7) и (8), опредѣляемъ интегралъ, входящій въ фор. (1):

$$\int q sn\theta ds = \pi\rho r_1^3 \frac{2r_1 + r_2^3}{r_2^3 - r_1^3} u' \int_0^{\frac{\pi}{2}} sn^2\theta cs\theta d\theta =$$

$$= \frac{\pi\rho r_1^3}{3} \frac{r_2^3 + 2r_1^3}{r_2^3 - r_1^3} u'.$$

Полагая для сокращенія

$$\mu = \frac{\pi\rho r_1^3}{3} \frac{r_2^3 + 2r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}, \tag{9}$$

напишемъ ур. (11) въ видѣ:

$$m(v-u) = (m' + \mu)u'. \tag{10}$$

Если шары неупруги, то къ ур. (10) надо прибавить условіе $u = u'$, что даетъ:

$$u = u' = \frac{mv}{m + m' + \mu}. \tag{11}$$

Если же шары вполнѣ упруги, то надо написать, что первоначальная живая сила шара m равна суммѣ живыхъ силъ обоихъ шаровъ и жидкости послѣ удара:

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mu^2}{2}+\frac{m'u'^2}{2}+\frac{\rho}{2}\int\left(\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right)d\sigma;\quad(12)$$

гдѣ $d\sigma$ элементъ объема жидкой массы. Чтобы опредѣлить входящій сюда интегралъ, напишемъ по теоремѣ Грина, что

$$\int\left(\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right)d\sigma=-\int\varphi\,\frac{d\varphi}{dn}\,ds.$$

Интегралъ во второй части распространяется на всѣ поверхности, ограничивающія жидкую массу; но такъ какъ на свободной поверхности $\varphi=0$, а на стѣнкахъ сосуда $\frac{d\varphi}{dn}=0$, то его надо распространить только на погруженную поверхность шара m'. Отсюда по фор. (4) и (7)

$$\rho\int\left(\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right)d\sigma=u'\int q s n\theta d\sigma=u'^2\mu.$$

На основаніи этого уравненія фор. (12) можно дать слѣдующій видъ:

$$m(v^2-u^2)=(m+\mu)u'^2.$$

Дѣлимъ это ур. на ур. (10):

$$v+u=u'.\quad(13)$$

Рѣшая ур. (10) и (13), получимъ для упругихъ шаровъ:

$$u=\frac{v(m-m'-\mu)}{m+m'+\mu},\qquad u'=\frac{2mv}{m+m'+\mu}.\quad(14)$$

Формула (11) и (14) отличаются отъ обыкновенныхъ формулъ удара шаровъ только тѣмъ, что въ нихъ m' замѣненъ на $m'+\mu$.

Такимъ образомъ, погружая одинъ изъ шаровъ въ жидкость, мы какъ бы увеличиваемъ его массу. Фор. (8) показываетъ, что при $r_2=\infty$ масса μ равна половинѣ массы вытѣсненной жидкости.

КЪ ВОПРОСУ

о поверхности наименьшаго сопротивленія при движеніи въ несжимаемой жидкости.

А. Старкова.

Вопросъ о поверхности наименьшаго сопротивленія при движеніи въ несжимаемой жидкости имѣетъ громадное практическое значеніе, будучи основнымъ вопросомъ кораблестроенія. Поэтому понятно то значительное количество изысканій частью теоретическихъ, но главнымъ образомъ опытныхъ, которыя были направлены къ его рѣшенію, особенно въ теченіи двухъ послѣднихъ столѣтій. До этого времени, именно до созданія Ньютономъ во второй половинѣ XVII столѣтія первой научной теоріи сопротивленія, указанный выше вопросъ исключительно находился на практической почвѣ и даже едва-ли былъ ясно формулированъ. Только практикою вырабатывался типъ корабля, требуемый данными условіями, при чемъ вопросъ о сопротивленіи въ томъ смыслѣ этого слова, какой придалъ ему Ньютонъ и какъ мы его понимаемъ теперь, едва-ли игралъ важную роль. Крайне несовершенные въ то время средства передвиженія, недающія кораблямъ значительныхъ скоростей, а также весьма несовершенныя средства самой постройки судовъ, не давали возможности сосредоточить вниманіе на вопросѣ о сопротивленіи, хотя впрочемъ въ то время уже знали, что прямолинейныя, угловатыя формы кораблей не-

удобны именно вслѣдствіе своего значительнаго сопротивленія, выражающагося требованіемъ значительной силы для движенія. Кромѣ того, по указанію мѣстныхъ условій плаванія, практика въ грубомъ приближеніи вырабатывала тотъ или другой типъ судна. Средиземное море, по берегамъ котораго первоначально возникла и развилась цивилизація, было первою ареною мореплаванія, и, будучи вообще спокойнымъ, можно сказать, указало самую форму кораблей—галерную, узкую, продолговатую, весьма удобную для плаванія по спокойнымъ морямъ и совсѣмъ непригодную для бурныхъ морей. Какъ только галеры выходили за Геркулесовы столбы, такъ сейчасъ-же опасность плаванія въ громадной степени возрастала и породила для своего объясненія множество миѳовъ и легендъ. Понятно, съ другой стороны, что суда норманов были совсѣмъ не похожи по формѣ на галеры; предназначенныя для плаванія по бурнымъ морямъ, они были коротки и широки, почти шарообразной формы. Свирѣпыя волны сѣверныхъ морей бросали эти суда изъ стороны въ сторону и всетаки ихъ не покрывали водой, не топили, такъ сказать, и давали возможность рано или поздно достигнуть цѣли. Здѣсь нельзя избѣжать указанія на то обстоятельство, что въ сферѣ кораблестроенія блестящая цивилизація древнихъ скорѣе помѣшала развитію, такъ какъ указанныя самою природою формы кораблей для сѣверныхъ бурныхъ морей были вмѣстѣ съ принятіемъ цивилизаціи древнихъ оставлены и замѣнены неподходящимъ галернымъ типомъ, который господствовалъ въ теченіи болѣе пяти столѣтій и значительно затормазилъ мореплаваніе, а съ нимъ въ извѣстной степени и развитіе общества.

Вопросъ о сопротивленіи началъ формулироваться нѣсколько ранѣе Ньютона, именно съ того времени, когда воздухъ былъ признанъ вѣсомой матеріей, оказывающей сопротивленіе при движеніи, а также когда судостроеніе, отрѣшаясь понемногу отъ галернаго типа, начало переходить на научную почву. Первые опыты по сопротивленію относятся къ концу

первой половины XVII столѣтія (1640—1650) и произведены были итальянцемъ Ричіолли, который наблюдалъ съ этой цѣлію паденіе тѣлъ въ воздухѣ и въ водѣ. Къ тому же времени относится и постройка перваго фрегата Финеасомъ Петъ въ Англіи въ 1646 году. Съ этого момента вообще наука приходитъ на помощь производящемуся до сихъ поръ на угадъ кораблестроенію [1]), такъ что въ 1666 году англійскій инженеръ Динъ уже имѣлъ возможность удивить короля Карла I и его придворныхъ изложеніемъ найденнаго имъ способа (секрета — какъ тогда выражались) вычисленія элементовъ судна до его постройки.

Ньютонъ первый, какъ выше указано, создалъ научную теорію сопротивленія—теорію, которая въ нѣсколько усовершенствованной формѣ до сихъ поръ существуетъ подъ именемъ *обыкновенной*. Онъ же первый призналъ и недостатки своей теоріи, частью устраненныя въ настоящее время, частью существующія до сихъ поръ. Ньютонъ первый также формулировалъ и вопросъ о поверхности наименьшаго сопротивленія [2]) и рѣшилъ этотъ вопросъ [3]), указавъ кривую, которая даетъ при вращеніи около оси X-овъ поверхность наименьшаго со-

---

[1]) Такъ, напримѣръ, переворачиваніе кораблей даже тотчасъ послѣ постройки было случаемъ нерѣдкимъ. Въ 1602 году только-что построенный корабль «Marie Rose», выйдя въ Плимутѣ на рейдъ, перевернулся и утонулъ со всѣмъ экипажемъ. Въ 1628 году весьма тщательно построенный Шведскій корабль «Waaa» вышелъ въ пробное плаваніе около Стокгольма и перевернулся на десятисаженной глубинѣ.

Для характеристики того, какъ въ описываемое время смотрѣли на кораблестроеніе, можно указать на хартію короля Іакова I, выданную въ 1612 году Вардену, въ которой кораблестроеніе названо *тайной*, the mystery of Shipwrights.

[2]) *Newton*. Principia Philosophiae naturalis. Lib. II. Prop. 34 scholium.

[3]) Въ нѣмецкомъ переводѣ Principia Ньютона, изданномъ профессоромъ Wolfers'омъ (Sir Isaac Newton's mathematische Principien der Naturlehre, mit Bemerkungen und Erläuterungen herausgegeben von Prof. Dr. *I. Ph. Wolfers*. Berlin 1872), въ примѣчаніяхъ (S. 610. No. 171) указанъ путь, которымъ при помощи элементарныхъ геометрическихъ соображеній можно получить пропорцію, данную Ньютономъ для опредѣленія кривой, образующей при вращеніи поверхность наименьшаго сопротивленія.

противленія при движеніи въ жидкости, при чемъ поверхность эта заключаетъ въ себѣ безконечно большой объемъ или, лучше сказать, неопредѣленный объемъ, такъ какъ самая поверхность разомкнута съ обѣихъ сторонъ. Къ этому необходимо прибавить также то, что кривая, отъ вращенія которой получается разсматриваемая поверхность, не имѣетъ ни максимальныхъ значеній для y, ни точекъ перегиба, вслѣдствіе чего поверхность даетъ форму только передней (носовой) части тѣла, между тѣмъ какъ самъ Ньютонъ[4]) уже зналъ, какое громадное значеніе по отношенію къ сопротивленію имѣетъ форма задней (кормовой) части. Если же принять во вниманіе еще и то, что такая поверхность пригодна была бы для устройства судна, вполнѣ погруженнаго въ жидкость, то будетъ понятно, почему рѣшеніе Ньютона не имѣло практическаго значенія. Въ этомъ же заключается причина, по которой рѣшеніе Ньютона можно найти только въ старинныхъ трактатахъ по дифференціальному и интегральному исчисленіямъ и то лишь въ формѣ задачи на примѣненіе варіаціоннаго исчисленія[5]).

Выше было упомянуто, что данная Ньютономъ теорія сопротивленія имѣла недостатки, вызвавшія противъ нея столь сильную реакцію, что еще въ срединѣ прошедшаго столѣтія, именно въ 1763 году Борда[6]), капитанъ французскаго флота, совершенно ее отвергнулъ, не давъ, правда, въ замѣнъ ея никакой другой. Произошло это частью также и отъ того, что теорія Ньютона создана была для тѣлъ совершенно погруженныхъ въ жидкость (я имѣю въ виду лишь теорію сопротивленія сплошныхъ, не упругихъ жидкостей), между тѣмъ ея выводы примѣнялись къ тѣламъ плавающимъ на поверхности,

---

[4]) *Newton*. Principia Philosophiae naturalis. Lib II. Prop. 37 scholium.

[5]) *Lacroix*. Traité du calcul differentiel et du calcul integral. Tom. II. 1814. Pag. 791 & 792.

[6]) *Chevalier Borda*. Expériences sur la résistance de fluides. Histoire de l'Académie royal des sciences, année 1763 p. 358 et année 1767 p. 495.

полупогруженнымъ[7]). Теперь же вполнѣ выяснено, что законы сопротивленія тѣлъ плавающихъ совершенно различны отъ законовъ сопротивленія тѣлъ вполнѣ погруженныхъ, а для этихъ послѣднихъ теорія Ньютона съ небольшимъ измѣненіемъ приложима. Поэтому понятно, что опыты Борда и нѣкоторыхъ другихъ дали результаты совсѣмъ несогласные съ теоріей, даже прямо ей противорѣчащіе. Съ другой стороны сложность пріемовъ для рѣшенія вопроса о сопротивленіи теоретическимъ путемъ сдѣлала то, что въ концѣ прошедшаго и во всемъ текущемъ столѣтіи преобладаетъ опытный путь изслѣдованія законовъ сопротивленія. Такъ же точно опытнымъ путемъ старались опредѣлить поверхность наименьшаго сопротивленія и, надо сознаться, въ этомъ направленіи достигнуты замѣчательные результаты, хотя нельзя не указать на то, что эти рѣшенія имѣютъ болѣе или менѣе приближенный характеръ и для практики недостаточное значеніе, такъ что до сихъ поръ чертежъ корабля, сдѣланный опытнымъ практикомъ инженеромъ предпочитается всякому составленному на основаніи тѣхъ или другихъ теоретическихъ соображеній. Тѣмъ не менѣе опытная разработка вопроса столь извѣстными учеными инженерами, какъ Бофуа, Чапманъ, Скоттъ-Россель, Ранкинъ, Фрудъ и др.,— значительно подвинула дѣло. Установленный ими законъ, что для тѣла погруженнаго вполнѣ въ жидкость (капельную), при скоростяхъ не превосходящихъ извѣстныхъ предѣловъ, сопротивленіе пропорціонально квадрату скорости, подтверждается и теоретически, какъ то показалъ Казанскій профессоръ Поповъ[8]).

---

[7]) Кромѣ того въ изложеніи опытовъ по сопротивленію, съ которыми мнѣ приходилось знакомиться, не обращено должнаго вниманія на усиліе, необходимое для сообщенія тѣлу даннаго движенія,—усиліе, пропорціональное высшимъ чѣмъ вторая степенямъ скорости и могущее значительно вліять на вѣрность выводовъ. По этому поводу см.

Гербертъ Спенсеръ. Основанія Біологіи. Пер. съ англійскаго подъ ред. Герда. СПБ. 1870 г. Часть II, стр. 157 и др.

[8]) *А. Поповъ.* Изслѣдованіе поверхности, которая представляетъ наименьшее сопротивленіе потоку жидкости. Ученыя Записки Императорскаго Казанскаго Университета. 1876 г. т. XII. Стр. 751—766.

Изъ его изслѣдованія о цилиндрической поверхности наименьшаго сопротивленія оказывается, что сопротивленіе для подводныхъ частей пропорціонально квадрату скорости, тогда какъ на поверхности воды оно выражается функціей въ составъ которой входитъ скорость въ различныхъ степеняхъ. Тоже самое было подтверждено и опытами: вотъ причина, по которой вопросъ о поверхности наименьшаго сопротивленія для поверхностнаго плаванія еще не можетъ быть рѣшенъ въ настоящее время, между тѣмъ какъ для подводнаго плаванія это рѣшеніе возможно [9]). Въ настоящей статьѣ имѣется въ виду изложить рѣшеніе вопроса о поверхности наименьшаго сопротивленія для тѣла вращенія, вполнѣ погруженнаго въ жидкость. Задача эта въ настоящее время имѣетъ и практическое значеніе, такъ какъ вопросъ о подводномъ плаваніи стоитъ на очереди. Предлагаемое здѣсь рѣшеніе отличается отъ даннаго Ньютономъ тѣмъ, что получаются замкнутыя поверхности, заключающія данный объемъ,—слѣдовательно достигается рѣшеніе задачи въ той формѣ, въ какой она можетъ быть поставлена съ практической точки зрѣнія [10]).

---

[9]) Здѣсь слѣдуетъ указать на мемуаръ *Geoffroy*, *L.* Memoire sur les résistances qu'éprouve une surface mobile de la part d'un milieu fluide dans lequel elle se meut. Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure Deuxième serie Tom. VII Année 1878 p. 215—226,— въ которомъ принятъ въ основаніе вычисленій законъ Ньютона и даны нѣкоторые выводы, относящіеся къ поверхности съ нулевымъ нормальнымъ сопротивленіемъ, а также къ движенію корабельнаго винта.

[10]) Въ русской литературѣ по столь важному вопросу, какъ вопросъ о сопротивленіи, существуетъ прекрасное сочиненіе Проф. *Д. И. Менделѣева* «О сопротивленіи жидкостей и о воздухоплаваніи. СПБ. 1880 г. Выпускъ I», въ которомъ рядомъ съ подробнымъ изложеніемъ многочисленныхъ опытовъ, относящихся къ этому предмету, приведены, съ приложеніемъ математическаго анализа, и главнѣйшія теоріи сопротивленія.

I.

Отысканіе уравненія кривой, образующей при вращеніи поверхность наименьшаго сопротивленія.

Задача, поставленная здѣсь, можетъ быть формулирована въ такой формѣ:

Опредѣлить поверхность вращенія, заключающую данный объемъ и при движеніи въ несжимаемой жидкости представляющую наименьшее сопротивленіе.

Принявъ въ соображеніе указанное выше условіе, что сопротивленіе при подводномъ плаваніи пропорціонально квадрату скорости, найдемъ для сопротивленія на поверхность вращенія, образуемую кривой $y=f(x)$, выраженіе вида

$$P=2\pi\rho v^2 k\int_{s_1}^{s_2} y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3 ds,$$

гдѣ v есть скорость движенія, ρ — плотность жидкости, принятыя независимыми отъ сопротивленія, такъ какъ скорость удерживается постоянно одинаковою внѣшней причиной и ρ постоянно вслѣдствіе несжимаемости самой жидкости, въ которой происходитъ движеніе; k—есть коеффиціентъ, зависящій отъ тренія, а также отъ свойствъ жидкости, сцѣпленія ея частицъ и пр.

Условіе, чтобы поверхность вращенія заключала данный объемъ, можетъ быть замѣнено равнозначительнымъ условіемъ,

чтобы кривая вращенія образовала съ осью X-овъ, т. е. съ осью вращенія, съ которой совпадаетъ направленіе движенія, данную площадь Π именно, чтобы

$$\Pi=\int_{x_1}^{x_0} y dx$$

гдѣ предѣлы x_0 и x_1 соотвѣтствуютъ предѣламъ s_0 и s_1 въ первомъ интегралѣ.

Задача такимъ образомъ поставленная относится къ роду такъ называемыхъ maximum et minimum relativa и сводится къ отысканію и приравненію нулю первой варіаціи выраженія

$$2\pi\rho v^2 k\int_{s_0}^{s_1} y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3 ds+a\int_{x_0}^{x_1} y dx \tag{1}$$

гдѣ a представляетъ собою постоянную величину, подлежащую опредѣленію изъ условій вопроса.

Прежде всего выраженіе первое необходимо привести къ одной независимой перемѣнной такимъ образомъ.

Положимъ

$$a=-A.2\pi\rho v^2 k$$

вслѣдствіе чего варіація выраженія (1) приметъ видъ

$$\delta\left\{\int_{s_0}^{s_1} y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3 ds-A\int_{x_0}^{x_1} y dx\right\}=0 \tag{2}$$

Положивъ далѣе

$$\frac{dy}{ds}=u \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx}=p \tag{3}$$

будемъ имѣть

$$dx=\frac{dy}{p}, \quad dy=uds \quad \text{и} \quad dx=\frac{u}{p}ds$$

также

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{dx}=u\frac{ds}{dx} \quad \text{и} \quad \frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

а потому, принявъ во вниманіе положенія (3), найдемъ

$$p=u\sqrt{1+p^2},$$

откуда

$$p=\frac{u}{\sqrt{1-u^2}},$$

слѣдовательно

$$dx=\frac{u}{p}ds=\sqrt{1-u^2}.\,ds$$

и выраженіе (2) получитъ видъ

$$\delta\int_{s_0}^{s_1} y(u^3-A\sqrt{1-u^2})ds=0 \tag{4}$$

Означивъ подъинтегральную функцію въ интегралѣ (4) чрезъ V

$$V=y(u^3-A\sqrt{1-u^2})$$

для равенства нулю первой варіаціи получимъ выраженіе

$$\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{d\frac{\partial V}{\partial u}}{ds}=0, \tag{5}$$

гдѣ чрезъ ∂ обозначены частныя производныя.

Совершивъ указанныя въ (5) дѣйствія, получимъ диффеpенціальное уравненіе втораго порядка вида [11])

[11]) *Hoüel*, Cours de calcul infinitésimal, Tom III Paris 1880, pap. 55, § 975, 2°

$$2u^3+A\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}+y\left\{6u+A\frac{1}{(\sqrt{1-u^2})^3}\right\}\frac{du}{ds}=0 \qquad (6)$$

для кривой, производящей вращеніемъ около оси X-овъ тѣло наименьшаго сопротивленія.

Но мы имѣемъ

$$ds=\frac{dy}{u}$$

а потому въ уравненіи (6) можемъ раздѣлить перемѣнныя, именно

$$\frac{dy}{y}+\frac{6u^2+A\frac{u}{(\sqrt{1-u^2})^3}}{2u^3+A\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}}du=0$$

выраженіе, интегралъ котораго есть

$$\mathrm{Log}\,y+\mathrm{Log}\left(2u^3+A\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right)=C,$$

откуда

$$y=\frac{C_1}{2u^3+A\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}} \qquad (7)$$

Выраженіе это есть дифференціальное уравненіе перваго порядка восьмой степени; интегрированіе его сопряжено съ затрудненіями; поэтому для опредѣленія x воспользуемся слѣдующимъ пріемомъ. Изъ выраженій

$$\frac{dy}{dx}=p \quad \text{и} \quad p=\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$$

найдемъ

$$dx=\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}dy$$

Но изъ выраженія (7) имѣемъ

$$dy = -C_1 \frac{6u^2 + A\frac{u}{(\sqrt{1-u^2})^3}}{\left[2u^3 + A\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right]^2} du \qquad (8)$$

а потому

$$dx = -C_1 \frac{6u(\sqrt{1-u^2})^3 + A}{[2u^3\sqrt{1-u^2} + A]^2} du \qquad (9)$$

и значеніе x опредѣлится интеграломъ

$$x = -C_1 \int \frac{6u(\sqrt{1-u^2})^3 + A}{[2u^3\sqrt{1-u^2} + A]^2} du, \qquad (10)$$

въ которомъ если уничтожить ирраціональность, то въ знаменателѣ получится уравненіе шестнадцатой степени и потому непосредственно интегрировать его неудобно. Вслѣдствіе этого преобразуемъ интегралъ (10) помощію тригонометрическихъ функцій такимъ образомъ.

Положимъ

$$u = \sin\omega$$

тогда

$$\sqrt{1-u^2} = \cos\omega, \quad du = \cos\omega d\omega$$

и самый интегралъ (10) по раздѣленіи числителя и знаменателя на A^2 обратится въ слѣдующій

$$x = -\frac{C_1}{A} \int \frac{1 + \frac{6}{A}\sin\omega\cos^2\omega}{[1 + \frac{2}{A}\sin^3\omega\cos\omega]^2} \cos\omega d\omega \qquad (11)$$

Развернувъ въ рядъ помощію дѣленія подъинтегральную функцію (11) и перенеся знакъ суммы за знакъ интегрированія, получимъ

$$x=-\frac{C_1}{A}\sum_{n=\infty}^{n=0}(-1)^n\left(\frac{2}{A}\right)^n\int\sin^{3n-2}\omega\cos^{n+1}\omega[(n+1)\sin^2\omega-3n\cos^2\omega]d\omega$$

выраженіе, въ которомъ замѣнивъ $\cos^2\omega=1-\sin^2\omega$, найдемъ

$$x=-\frac{C_1}{A}\sum_{n=\infty}^{n=0}(-1)^n\left(\frac{2}{A}\right)^n\left[(4n+1)\int\sin^{3n}\omega\cos^{n+1}\omega d\omega-\right.$$

$$\left.-3n\int\sin^{3n-2}\omega\cos^{n+1}\omega d\omega\right] \qquad (12)$$

Но извѣстно [12]), что

$$(4n+1)\int\sin^{3n}\omega\cos^{n+1}\omega d\omega=-\sin^{3n-1}\omega\cos^{n+2}\omega+$$

$$+(3n-1)\int\sin^{3n-2}\omega\cos^{n+1}\omega d\omega$$

внося это выраженіе въ предыдущее (12), получимъ

$$x=\frac{C_1}{A}\sum_{n=\infty}^{n=0}(-1)^n\left(\frac{2}{A}\right)^n\sin^{3n-1}\omega\cos^{n+2}\omega+$$

$$+\frac{C_1}{A}\int\frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}d\omega+\frac{C_1}{A}\int\sum_{n=\infty}^{n=1}(-1)^n\left(\frac{2}{A}\right)^n\sin^{3n-2}\omega\cos^{n+1}\omega d\omega \qquad (13)$$

Сдѣлаемъ въ этомъ выраженіи слѣдующія преобразованія

---

[12]) *Bertrand*. Traite de calcul differentiel et de calcul intégral. Tom II. Calcul Intégral, Paris 1870 pag 73.

$$\sum_{n=\infty}^{n=0}(-1)^n\left(\frac{2}{A}\right)^n\sin^{3n-1}\omega\cos^{n+2}\omega=\frac{\cos^2\omega}{\sin\omega}\sum_{n=\infty}^{n=0}\left(-\frac{2}{A}\sin^3\omega\cos\omega\right)^n=$$

$$=\frac{\cos^2\omega}{\sin\omega}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{A}\sin^3\omega\cos\omega}; \tag{14}$$

далѣе

$$\int\frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}d\omega=-\frac{1}{\sin\omega} \tag{15}$$

и наконецъ

$$\sum_{n=\infty}^{n=1}(-1)^n\left(\frac{2}{A}\right)^n\sin^{3n-2}\omega\cos^{n+1}\omega=\frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}\sum_{n=\infty}^{n=1}\left(-\frac{2}{A}\sin^3\omega\cos\omega\right)^n= \tag{16}$$

$$=-\frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}\cdot\frac{\frac{2}{A}\sin^3\omega\cos\omega}{1+\frac{2}{A}\sin^3\omega\cos\omega}=-\frac{2}{A}\frac{\sin\omega\cos^2\omega}{1+\frac{2}{A}\sin^3\omega\cos\omega}$$

Внеся значенія (14), (15) и (16) въ выраженіе (13) найдемъ

$$x=-\frac{C_1}{A}\left\{\frac{\sin\omega(A+2\sin\omega\cos\omega)}{A+2\sin^3\omega\cos\omega}+2\int\frac{\sin\omega\cos^2\omega d\omega}{A+2\sin^3\omega\cos\omega}\right\}$$

или, замѣняя $\sin\omega=u$, $\cos\omega=\sqrt{1-u^2}$ и $\cos\omega d\omega=du$, получимъ

$$x=-\frac{C_1}{A}\left\{\frac{u(A+2u\sqrt{1-u^2})}{A+2u^3\sqrt{1-u^2}}+2\int\frac{u\sqrt{1-u^2}}{A+2u^3\sqrt{1-u^2}}du\right\} \tag{17}$$

выраженіе для x въ упрощенномъ видѣ.

Для совершенія оставшагося еще въ выраженіи (17) интегрированія приведемъ подъинтегральную функцію въ раціо-

нальному виду положеніемъ

$$\sqrt{1-u^2}=1-uz\,,$$

откуда найдемъ

$$u=\frac{2z}{1+z^2}\,,\quad \sqrt{1-u^2}=\frac{1-z^2}{1+z^2}\,,\quad du=2\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}$$

и самый интегралъ принимаетъ видъ

$$\int\frac{u\sqrt{1-u^2}}{A+2u^3\sqrt{1-u^2}}du=4\int\frac{z(1-z^2)^2dz}{A(1+z^2)^4+16z^3(1-z^2)}= \quad (18)$$

$$=\frac{4}{A}\int\frac{z-2z^3+z^5}{z^8+4z^6-\frac{16}{A}z^5+6z^4+\frac{16}{A}z^3+4z^2+1}dz$$

Для интегрированія этого выраженія необходимо рѣшить уравненіе восьмой степени

$$z^8+4z^6-\frac{16}{A}z^5+6z^4+\frac{16}{A}z^3+4z^2+1=0\,, \quad (19)$$

которое может быть представлено такъ

$$z^4\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)+4z^4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\frac{16}{A}z^4\left(\frac{1}{z}-z\right)+6z^4=0\,,$$

гдѣ положивъ

$$\frac{1}{z}-z=2w\,,$$

откуда

$$z^2+\frac{1}{z^2}=4w^2+2$$

$$z^4+\frac{1}{z^4}=16w^4+16w^2+2$$

а также сокративъ на z^4 получимъ

$$w^4+2w^2+\frac{2}{A}w+1=0 \qquad (20)$$

уравненіе четвертой степени, помощію корней котораго легко могутъ быть выражены корни уравненія (19).

Опредѣлимъ теперь, какіе корни имѣетъ уравненіе (20); съ этой цѣлію найдемъ для него систему функцій Штурма — именно:

$$V=w^4+2w^2+\frac{2}{A}w+1$$

$$V_1=4w^3+4w+\frac{2}{A}$$

$$V_2=-w^2-\frac{3}{2A}w-1$$

$$V^3=-\frac{9}{A^2}w-\frac{8}{A}$$

$$V_4=\frac{64}{81}A^2-\frac{1}{3}$$

изъ которыхъ не трудно убѣдиться, что при условіи

$$\frac{64}{81}A^2-\frac{1}{3}>0 \qquad (21)$$

всѣ корни уравненія (20) мнимы, если-же

$$\frac{64}{81}A^2-\frac{1}{3}<0,$$

то уравненіе (20) имѣетъ два дѣйствительныхъ и два мнимыхъ корня.

Изъ выраженія

$$\frac{1}{z}-z=2w\,,$$

имѣемъ

$$z=-w\pm\sqrt{w^2+1}\,, \tag{22}$$

а потому если всѣ значенія w мнимы, то и всѣ значенія z мнимы; если-же уравненіе (20) имѣетъ два корня дѣйствительные и два мнимые, то для z имѣемъ четыре корня дѣйствительные и четыре мнимые.

Такъ какъ по условіямъ задачи y не должно обращаться въ безконечность, то слѣдовательно уравненіе (19), а съ нимъ и уравненіе (20) не должны имѣть дѣйствительныхъ корней. Поэтому значеніе A, опредѣляемое выраженіемъ (21), должно быть больше

$$A>\frac{3\sqrt{3}}{8} \tag{23}$$

или

$$A>0{,}64951787407\ldots.$$

Итакъ предположивъ, что всѣ значенія w, а съ ними и значенія z мнимы, для опредѣленія w можемъ воспользоваться слѣдующимъ пріемомъ.

Уравненіе (20) въ случаѣ мнимыхъ значеній w разлагается на произведеніе вида

$$(w^2-2aw+a^2+b_1^2)(w^2+2aw+a^2+b_2^2)=0\,, \tag{24}$$

здѣсь взято въ обоихъ производителяхъ одно и тоже количество a на томъ основаніи, что въ уравненіи (20) нѣтъ члена, содержащаго w^3.

Произведеніе (24) по сравненіи (20) для опредѣленія a, b_1 и b_2 даетъ выраженія

$$b_1^2+b_2^2-2a^2=2$$

$$a(b_1^2-b_2^2)=\frac{1}{A} \qquad (25)$$

$$(a^2+b_1^2)(a^2+b_2^2)=1 \ ,$$

изъ которыхъ изъ перваго и втораго найдемъ значенія для b_1^2 и b_2^2 вида

$$b_1^2=1+a^2+\frac{1}{2Aa}$$

$$b_2^2=1+a^2-\frac{1}{2Aa} \qquad (26)$$

и внося эти значенія въ послѣднее уравненіе системы (25), получимъ уравненіе, опредѣляющее a, вида

$$a^6+a^4-\frac{1}{16A^2}=0 \qquad (27)$$

которое имѣетъ два равныхъ дѣйствительныхъ корня съ противуположными знаками и четыре мнимыхъ [13]). Зная a, опредѣлимъ b_1 и b_2 изъ выраженій (26), именно

---

[13]) Въ этомъ можно убѣдиться, изслѣдуя помощію функцій Штурма уравненіе

$$v^3+v^2-\frac{1}{16A^2}=0 \ ,$$

которое при

$$A>\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

имѣетъ три дѣйствительныхъ корня, одинъ положительный и два отрицательныхъ. Условіе

$$a=\sqrt{v}$$

дѣлаетъ то, что отрицательные дѣйствительные корни для v даютъ мнимые корни для a.

$$b_1=\sqrt{1+a^2+\frac{1}{2Aa}}=\frac{1}{4Aa^2}\sqrt{1+8a^3A}$$

$$b_2=\sqrt{1+a^2-\frac{1}{2Aa}}=\frac{1}{4Aa^2}\sqrt{1-8a^3A}$$

такъ какъ изъ уравненія (27) имѣемъ

$$1+a^2=\frac{1}{16a^4A^2}$$

Опредѣливши такимъ образомъ a, b_1 и b_2, четыре корня уравненія (20) выразимъ формулою

$$w=(\pm a)\pm\frac{1}{4a^2A}\sqrt{1+8(\pm a)^3A}.i$$

и восемь значеній z помощію формулы (22) опредѣлятся выраженіемъ

$$z=\left\{(\pm a)\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2+8(\pm a)^3A}-(\pm 1)}{Aa}}\right\}\pm \tag{28}$$
$$\pm\left\{\frac{\sqrt{1+8(\pm a)^3A}}{4a^2A}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2+8(\pm a)^3A}+(\pm 1)}{Aa}}\right\}i$$

причемъ необходимо всѣ двойные знаки, поставленные въ скобкахъ, измѣнять одновременно.

Изслѣдовавъ такимъ образомъ уравненіе (19), получаемъ возможность совершить интегрированіе выраженія (18). Для этого означимъ опредѣляемый формулою (28) корень z чрезъ

$$z=\alpha_n\pm\beta_n i \tag{29}$$

гдѣ n равняется 1, 2, 3 и 4; кромѣ того имѣемъ (см. выше стр. 14)

$$\sqrt{1-u^2}=1-uz,$$

откуда

$$z=\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u};$$

а потому на основаніи извѣстныхъ формулъ интегральнаго исчисленія [14]) найдемъ

$$\int\frac{u\sqrt{1-u^2}}{A+2u^3\sqrt{1-u^2}}du=$$

$$=\frac{4}{A}\overset{n=1}{\underset{n=4}{\mathrm{S}}}\Bigg\{\frac{P_np_n+Q_nq_n}{P_n^2+Q_n^2}\mathrm{Log}\left[\left(\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u}-\alpha_n\right)^2+\beta_n^2\right]+ \quad (30)$$

$$+2\frac{Q_np_n-P_nq_n}{P_n^2+Q_n^2}\mathrm{arctang}\left[\frac{\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u}-\alpha_n}{\beta_n}\right]\Bigg\}+C_2$$

Остается теперь только опредѣлить значенія P, Q, p и q, что можемъ сдѣлать такимъ образомъ. Означивъ чрезъ

$$f(z)=(1-z^2)^2$$

$$F_1(z)=\frac{1}{z}\,\frac{d\left[(1+z^2)^4+\frac{16}{A}z^3(1-z^2)\right]}{dz}$$

т. е. чрезъ $f(z)$ числителя подъинтегральной функціи выраженія (18), раздѣленнаго на z, и чрезъ $F_1(z)$ первую производную отъ знаменателя того же выраженія (18), раздѣленную на z, получимъ для опредѣленія p, q, P и Q выраженія

---

[14]) *Jordan.* Cours d'Analyse de l'École Polytechnique Tom. II. Calcul Intégral. Paris 1883. Pag. 14 et 15.

$$\left.\begin{aligned} f(\alpha_n+i\beta_n)&=p_n+iq_n \\ F_1(\alpha_n+i\beta_n)&=P_n+iQ_n \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

гдѣ α и β получаютъ значенія, указанныя выраженіемъ (29). Найденныя изъ системы (31) величины для p, q, P и Q имѣютъ видъ

$$p_n=(\alpha_n^2-\beta_n^2-1)^2-4\alpha_n^2\beta_n^2$$

$$q_n=4\alpha_n\beta_n(\alpha_n^2-\beta_n^2-1)$$

$$P_n=8\left\{(\alpha_n^2-\beta_n^2+1)^3-4\alpha_n^2\beta_n^2(\alpha_n^2-\beta_n^2+1)+\right.$$

$$\left.+\frac{2\alpha_n}{A}(15\beta_n^2-5\alpha_n^2+3\right\}$$

$$Q_n=8\left\{6\alpha_n\beta_n(\alpha_2^2-\beta_n^2+1)^2-8\alpha_n^3\beta_n^3-\frac{2\beta_n}{A}(15\alpha_n^2-5\beta_n^2-3)\right\}$$

На практикѣ вычисленіе значеній p, q, P и Q удобнѣе производить, положивъ

$$\alpha_n^2-\beta_n^2-1=a_n\ ,$$

$$2\alpha_n\beta_n=b_n\ ;$$

тогда значенія p, q, P и Q будутъ

$$p_n=a_n^2-b_n^2=(a_n+b_n)(a_n-b_n)$$

$$q_n=2a_nb_n$$

$$P_n=8\left[(a+2)(p_n+4a_n+4)-\frac{2\alpha_n}{A}(15a_n-10a_n^2+12)\right]$$

$$Q_n=8\left[3b_n(p_n+4a_n+4)+2b_n^2-\frac{2\beta_n}{A}(15a_n+10\beta_n^2+12)\right]$$

формулы, которыми въ значительной степени упрощается опредѣленіе p, q, P и Q.

На основаніи предыдущихъ изслѣдованій уравненіе кривой, дающей при вращеніи около оси X-овъ поверхность наименьшаго сопротивленія, содержащую данный объемъ, будетъ вида

$$y=\frac{C_1\sqrt{1-u^2}}{A+2u^3\sqrt{1-u^2}},$$

$$x=-\frac{C_1}{A}\Bigg[\frac{u(A+2u\sqrt{1-u^2})}{A+2u^3\sqrt{1-u^2}}+ \tag{32}$$

$$+\frac{8}{A}\mathop{\mathrm{S}}_{n=4}^{n=1}\left\{\frac{P_np_n+Q_nq_n}{P_n^2+Q_n^2}\mathrm{Log}\left[\left(\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u}-\alpha_n\right)^2+\beta_n^2\right]+2\frac{Q_np_n-P_nq_n}{P_n^2+Q_n^2}\mathrm{arctang}\frac{\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u}-\alpha_n}{\beta_n}\right\}+C_2\Bigg]$$

Въ составъ этихъ выраженій входятъ три постоянныя произвольныя: A постоянное варіированія, C_1 и C_2 постоянныя двухъ произведенныхъ интегрированій. Опредѣленіе ихъ значенія будетъ предметомъ слѣдующей главы.

II

Опредѣленіе значеній постоянныхъ, введенныхъ варіированіемъ и интегрированіемъ.

Выше было упомянуто, что въ составъ уравненія кривой (32), дающей при вращеніи поверхность наименьшаго сопротивленія, входимъ три постоянныя произвольныя C_1, C_2 и A, изъ которыхъ первые два C_1 и C_2 введены интегрированіемъ, а послѣднее A введено извѣстнымъ пріемомъ варіаціоннаго исчисленія для обращенія задачи на minimum relativum въ задачу на minimum absolutum. Опредѣленіемъ этихъ постоянныхъ произвольныхъ теперь и займемся [15]).

Данное выше значеніе y въ системѣ (32) при условіи $u=0$ обращается въ

$$y_m=\frac{C_1}{A} \tag{33}$$

и дѣлается наибольшимъ (maximum), въ чемъ легко убѣдиться изъ выраженія

$$\frac{dy}{dx}=p=\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} ,$$

которое обращается въ нуль при $u=0$ и вторая производная, какъ нетрудно видѣть, имѣетъ отрицательное значеніе. При такихъ условіяхъ площадь наибольшаго поперечнаго сѣченія,

---

[15]) Предѣлы интеграла задачи опредѣляются условіемъ, чтобы кривая въ двухъ точкахъ пересѣкала ось X-овъ.

называемаго въ корабельной архитектурѣ *мидельшпангоутомъ*[16]), выразится

$$\pi y_m^2 = \pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^2 = \otimes \tag{34}$$

Съ другой стороны постоянное произвольное C_1 входитъ множителемъ въ выраженіе для координаты x и, какъ увидимъ впослѣдствіи, въ выраженіе всѣхъ элементовъ поверхности въ соотвѣтствующихъ степеняхъ; поэтому съ нимъ связывается однообразіе принимаемой для измѣренія единицы, что соотвѣтствуетъ и существующему въ корабельной архитектурѣ правилу производить вычисленіе всѣхъ элементовъ судна въ зависимости отъ мидельшпангоута.

Произвольное постоянное C_2 опредѣляетъ мѣстоположеніе всей поверхности на оси X—овъ; поэтому придавая ему соотвѣтствующія значенія, мы можемъ передвигать поверхность по оси X—овъ въ ту или другую сторону на желаемое разстояніе. Удобнѣе всего опредѣлить C_2 такимъ образомъ, чтобы наибольшее поперечное сѣченіе (мидельшпангоутъ) совпадало съ началомъ координатъ. Для этого необходимо, чтобы при $u=0$ значеніе x было также равно нулю, а потому значеніе C_2 изъ общаго уравненія (32) опредѣлится выраженіемъ

$$C_2 + \frac{8}{A}\mathop{\mathbf{S}}_{n=4}^{n=1}\left\{\frac{P_n p_n + Q_n q_n}{P_n^2 + Q_n^2}\operatorname{Log}(\alpha_n^2 + \beta_n^2) - \right.$$

$$\left. -2\frac{Q_n p_n - P_n q_n}{P_n^2 + Q_n^2}\operatorname{arctang}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\right\} = 0$$

---

[16]) *Мидельшпангоутомъ* въ корабельной архитектурѣ называется наибольшее поперечно-вертикальное сѣченіе судна, площадь котораго обозначается такъ $\otimes$ См. напр. *Окуневъ*. «Руководство для изученія корабельной архитектуры». Часть I СПБ. 1865 г. стр. 364 и 367.

такъ какъ для $u=0$ имѣемъ $z=0$ [17]).

Значеніе постояннаго произвольнаго C_2 можетъ быть выражено въ другой формѣ, которая будетъ необходима въ дальнѣйшемъ изложеніи для опредѣленія нѣкоторыхъ свойствъ кривой, а также для изслѣдованія образуемой ею поверхности. Форму эту можно получить слѣдующимъ пріемомъ

Выше было указано (стр. 13), что интегралъ (17) можетъ быть представленъ такъ

$$2\int\frac{u\sqrt{1-u^2}}{A+2u^3\sqrt{1-u^2}}du=\frac{2}{A}\int\frac{\sin\omega\cos^2\omega}{1+\frac{2}{A}\sin^3\omega\cos\omega}d\omega=$$

$$=\frac{2}{A}\int\sin\omega\cos^2\omega d\omega+\frac{2}{A}\sum_{n=\infty}^{n=1}(-1)^n\left(\frac{2}{A}\right)^n\int\sin^{3n+1}\omega\cos^{n+2}\omega d\omega$$

Но мы имѣемъ

$$\frac{2}{A}\int\sin\omega\cos^2\omega d\omega=-\frac{2}{A}\frac{\cos^3\omega}{3}$$

а также [18]) для втораго интеграла въ случаѣ нечетнаго n равнаго $n=2p-1$ получимъ

---

[17]) Собственно для $u=0$ имѣемъ

$$z=\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u}=\frac{0}{0}$$

но взявъ первыя производныя отъ числителя и знаменителя этого выраженія и затѣмъ сдѣлавъ $u=0$, получимъ

$$z=\left|\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u}\right|_{u=0}=\left|\frac{\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}}{1}\right|_{u=0}=0$$

что и требовалось показать.

[18]) *Bertrand*. Calcul intégral pag. 73.

$$\frac{2}{A}\sum_{n=\infty}^{n=1}(-1)^{2p-1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p-1}\int \sin^{6p-2}\omega \cos^{2p+1}\omega d\omega =$$

$$=-\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\frac{\sin^{6p-1}\omega}{8p-1}\left\{\cos^{2p}\omega + \mathbf{S}_{q=p}^{q=1}\frac{2p(2p-2)\ldots(2p-2q+2)}{(8p-3)(8p-5)\ldots(8p-2q-1)}\cos^{2p-2q}\omega\right\}$$

и въ случаѣ четнаго $n=2p$ имѣемъ

$$\frac{2}{A}\sum_{p=\infty}^{p=1}(-1)^{2p}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\int \sin^{6p+1}\omega \cos^{2p+2}\omega d\omega =$$

$$=\frac{2}{A}\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\frac{\cos^{2p+3}\omega}{8p+3}\left\{\sin^{6p}\omega + \mathbf{S}_{q=3p}^{q=1}\frac{6p(6p-2)\ldots(6p-2q+2)}{(8p+1)(8p-1)\ldots(8p-2q+3)}\sin^{6p-2q}\omega\right\}$$

Вносся полученныя выраженія въ значеніе для x, а также замѣнивъ снова $\sin\omega$ чрезъ u, получимъ для x слѣдующее выраженіе

$$x = \frac{C_1}{A}\left\{-\frac{u(A+2u\sqrt{1-u^2})}{A+2u^3\sqrt{1-u^2}} + \frac{2}{A}\,\frac{(\sqrt{1-u^2})^3}{3} + \right.$$

$$+\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\frac{u^{6p}}{8p-1}\Bigg[(1-u^2)^p +$$

$$+\mathbf{S}_{q=p}^{q=1}\frac{2p(2p-2)\ldots(2p-2q+2)}{(8p-3)(8p-5)\ldots(8p-2q-1)}(1-u^2)^{p-q}\Bigg] +$$

$$+\frac{2}{A}\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\frac{(\sqrt{1-u^2})^{2p+3}}{8p+3}\Bigg[u^{6p} +$$

$$\left. +\mathbf{S}_{q=3p}^{q=1}\frac{6p(6p-2)\ldots(6p-2q+2)}{(8p+2)(8p-1)\ldots(8p-2q+3)}u^{6p-2q}\Bigg] - C_2\right\} \qquad (35)$$

Для того, чтобы $x=0$ при $u=0$, необходимо

$$C_2=\frac{2}{A}\left\{\frac{1}{3}+\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\frac{6p(6p-2)....4.2}{(8p+3(8p+1)....(2p+3)}\right\} \tag{36}$$

выраженіе, которымъ опредѣляется значеніе C_2.

Остается затѣмъ опредѣлить постоянное A, введенное, какъ выше указано, пріемомъ варіаціоннаго исчисленія для обращенія задачи на minimum relativum въ задачу на minimum absolutum.

Одно изъ поставленныхъ выше условій вопроса состоитъ, какъ мы видѣли (стр. 8) въ томъ, чтобы кривая съ осью X-овъ образовала данную площадь, именно

$$\int_{x_0}^{x_1} y dx = \Pi \tag{37}$$

чѣмъ выражается опредѣленность величины заключаемаго въ поверхность вращенія объема. Внося въ выраженіе (37) значеніе y и dx изъ выраженій (7) и (9), находимъ

$$\Pi=-C_1{}^2\int_{-1}^{+1}\frac{6u(\sqrt{1-u^2})^3+A}{[2u^3\sqrt{1-u^2}+A]}\sqrt{1-u^2}du \tag{38}$$

Для совершенія указаннаго здѣсь интегрированія сдѣлаемъ $u=\sin\omega$ причемъ выраженіе (38) обратится

$$\Pi=-C_1{}^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{A+6\sin\omega\cos^3\omega}{[A+2\sin^3\omega\cos\omega]}\cos^2\omega d\omega$$

или послѣ раздѣленія числителя и знаменателя на A^3 и обращенія въ рядъ разсматриваемаго выраженія пріемомъ обыкно-

веннаго дѣленія получимъ

$$H=-\left(\frac{C_1}{A}\right)^2\sum_{n=\infty}^{n=0}(-1)^n\left(\frac{2}{A}\right)^n\frac{n+1}{2}\left[(n+2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3n}\omega\cos^{n+2}\omega d\omega-\right.$$

$$\left.-3n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3n-2}\omega\cos^{n+4}\omega d\omega\right] \qquad (39)$$

замѣнивъ здѣсь $\cos^2\omega=1-\sin^2\omega$ и вспомнивъ, что [19])

$$(4n+2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3n}\omega\cos^{n+2}\omega d\omega=(3n-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3n-2}\omega\cos^{n+2}\omega d\omega$$

а также что интегралъ перваго члена выраженія (37) есть

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2\omega d\omega=\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{2}=\frac{\pi}{2},$$

найдемъ

$$\pi=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{C_1}{A}\right)^2+\sum_{n=\infty}^{n=1}(-1)^n\left(\frac{2}{A}\right)^n\frac{n+1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3n-2}\omega\cos^{n+2}\omega d\omega$$

Здѣсь встрѣчаются два случая, именно, когда n нечетное, $n=2p-1$, и когда n четное, $n=2p$; въ первомъ случаѣ будемъ имѣть [20])

---

[19]) *Bertrand*. Calcul intégral pag. 73.

[20]) *Bertrand*. Calcul intégral pag. 132 et 133.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p-5}\cos^{2p+1}\omega d\omega = M\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p-5}\omega\cos\omega d\omega = M\left|\frac{\sin^{6p-4}\omega}{6p-4}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \doteq$$

$$= \frac{M}{6p-4}\left\{\left[\sin^{3p-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^2 - \left[\sin^{3p-2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]^2\right\} \doteq$$

$$\doteq \frac{M}{6p-4}\Big((+1)^2-(\pm 1)^2\Big) = 0$$

Во второмъ случаѣ, именно для $n=2p$, получимъ

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p-2}\omega\cos^{2p+2}\omega d\omega \doteq 2\int_{0}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p-2}\omega\cos^{2p+2}\omega d\omega =$$

$$= \frac{1.3.5....(2p+1).1.3.5....(6p-3)}{2.4.6.8.10...(8p-2)8p}\pi, \qquad (40)$$

а потому значеніе для $\varPi$ будетъ

$$\varPi = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{C_1}{A}\right)^2 \sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}(2p+1)\frac{1.3.5...(2p+1).1.3.5...(6p-3)}{2.4.6.8....(8p-2)8p}$$

Раздѣливъ обѣ части этого выраженія на общаго множителя второй изъ нихъ, на $\frac{\pi}{2}\left(\frac{C_1}{A}\right)^2$, и перенося единицу въ первую часть, а также выдѣливъ множителей 2 въ знаменателѣ подъ знакомъ суммы, найдемъ

$$\frac{2\varPi}{\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^2} + 1 = \sum_{p=\infty}^{p=1}\frac{1}{A^{2p}}\cdot\frac{2p+1}{2^{2p}}\cdot\frac{1.3.5...(2p+1).1.3.5...(6p-3)}{1.2.3.4...(4p-2)(4p-1)4p}$$

выраженіе, которымъ опредѣляется значеніе произвольнаго постояннаго A.

Выраженіе для Π можетъ быть представлено еще помощію функцій Γ, что́, благодаря множеству существующихъ способовъ вычисленія этихъ функцій, а также составленныхъ для этой цѣли таблицъ, можетъ въ значительной степени сократить работу при отысканіи численныхъ коеффиціентовъ членовъ ряда, опредѣляющаго Π.

Замѣняя въ интегралѣ (40) $\sin\omega$ чрезъ u, найдемъ

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p-2}\omega\cos^{2p+2}\omega d\omega=2\int_0^1 u^{6p-2}(1-u^2)^{p+\frac{1}{2}}du$$

а этотъ послѣдній при маломъ измѣненіи обращается въ извѣстный Эйлеровъ интегралъ, который выражается помощію функцій Γ такимъ образомъ [21])

$$2\int_0^1 u^{6p-2}(1-u^2)^{p+\frac{1}{2}}du=\frac{\Gamma\left(3p-\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4p+1)}\,; \qquad (41)$$

но съ другой стороны мы имѣемъ [22])

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{1.3.5...(2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi}=$$

$$=\frac{1.2.3.4.5.6...(2m-1).2m}{2\,.\,4\,.\,6\,..........\,2m}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^m}=$$

$$=\frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m+1)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m}}=2\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m}}$$

[21]) *Bertrand.* Calcul intégral, pag. 274.

[22]) *Schlömilch.* Compendium der höheren Analysis II. Band. Braunschweig 1874. S. 244.

Bertrand. Calcul intégral, pag. 251.

а потому интегралъ (41) будетъ

$$2\int_0^1 u^{6p-2}(1-u^2)^{p+\frac{1}{2}}du=4\frac{\Gamma(6p-2).\Gamma(2p+2)}{\Gamma(3p-1).\Gamma(p+1).\Gamma(4p+1)}\frac{\pi}{2^{8p}}$$

а съ нимъ вмѣстѣ и рядъ, выражающій Π, принимаетъ видъ

$$\frac{2\Pi}{\otimes}+1=4\sum_{p=\infty}^{p=1}\frac{1}{A^{2p}}\frac{2p+1}{2^{6p}}.\frac{\Gamma(6p-2).\Gamma(2p+2)}{\Gamma(3p-1).\Gamma(p+1).\Gamma(4p+1)} \quad (42)$$

выраженіе, которое легко можетъ быть приведено къ данному выше (на стр. 28).

Если же воспользоваться извѣстной формулой

$$\Gamma(a)=e^{-a}a^{a-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi} \quad ,$$

которая обладаетъ тѣмъ большей точностію, чѣмъ больше a, то предыдущее выраженіе можно представить такъ

$$\frac{2\Pi}{\otimes}+1=e\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}(2p+1)\frac{(3p-1)^{3p-1}(p+1)^{p+1}}{(4p+1)^{4p+1}}$$

При отысканія числовыхъ значеній выраженія (42) можно пользоваться также и разложеніемъ въ рядъ логариѳмовъ отъ функцій Γ.

Здѣсь слѣдуетъ замѣтить, что выдѣлившійся во второй части выраженія, опредѣляющаго Π, общій множитель есть полуплощадь наибольшаго поперечнаго (миделева) сѣченія, именно

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{C_1}{A}\right)^2=\frac{\pi y_m^2}{2}=\frac{\otimes}{2}$$

и притомъ, очевидно, полуплощадь въ видѣ общаго множителя выдѣлилась на томъ основаніи, что Π представляетъ только полуплощадь продольнаго сѣченія, проходящаго чрезъ ось вращенія. Выраженіе же (42) и его раньше указанныя видоизмѣненія представляютъ отношеніе цѣлыхъ площадей сѣченій,

продольнаго, проходящаго чрезъ ось, и наибольшаго поперечнаго (миделева)[23]).

Изслѣдуемъ затѣмъ условія сходимости ряда выражающаго Π. Для этого найдемъ отношеніе его $p+1$ члена къ p члену. Отношеніе это будетъ

$$\frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{2p+3}{2p+1}\cdot\frac{(2p+3)(6p-1)(6p+1)(6p+3)}{(4p+1)(4p+2)(4p+3)(4p+4)}$$

или, раздѣливши числителя и знаменателя на p^5, получимъ

$$\frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2+\frac{3}{p}}{2+\frac{1}{p}}\cdot\frac{\left(2+\frac{3}{p}\right)\left(6-\frac{1}{p}\right)\left(6+\frac{1}{p}\right)\left(6+\frac{3}{p}\right)}{\left(4+\frac{1}{p}\right)\left(4+\frac{2}{p}\right)\left(4+\frac{3}{p}\right)\left(4+\frac{4}{p}\right)}$$

выраженіе, которое для $p=\infty$ обратится

$$\frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2.6.6.6}{4.4.4.4}=\frac{1}{A^2}\left(\frac{3}{4}\right)^3$$

Для сходимости ряда, какъ извѣстно, необходимо

$$\frac{1}{A^2}\left(\frac{3}{4}\right)^3<1 ,$$

откуда

$$A>\frac{3\sqrt{3}}{8} \quad \text{или} \quad A>0,64951787407\ldots.. \qquad (23)$$

выраженіе, съ которымъ мы уже встрѣчались раньше (стр. 16).

---

[23]) Такимъ образомъ площадь продольнаго сѣченія съ помощію площади наибольшаго поперечнаго (миделева) выражается сама собою формулою

$$2\pi = k(\pi y_m^2) = k\otimes$$

гдѣ k постоянный коеффиціентъ для данной поверхности. О выраженіи отношенія поперечныхъ сѣченій къ миделеву въ такой же формѣ будетъ сказано ниже. Поэтому въ корабельной архитектурѣ совершенно правильно поступаютъ, приводя площади всѣхъ сѣченій къ площади мидельшпангоута, умножаемой на постоянный коеффиціентъ.

Полученный результатъ (23) вполнѣ согласуется съ вышеприведенными изслѣдованіями. Дѣйствительно, если значеніе A будетъ имѣть меньшую, чѣмъ указано неравенствомъ (23), величину, то рядъ, опредѣляющій Π, будетъ расходящимся и сумма его равна безконечности. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ площадь продольнаго сѣченія будетъ въ безконечное число разъ больше площади поперечнаго $\otimes$. Съ другой стороны, выше мы видѣли (стр. 16), что если A имѣетъ меньшую, чѣмъ указано неравенствомъ (23) величину, то знаменатель y имѣетъ дѣйствительные корни, слѣдовательно для нѣкоторыхъ значеній u ордината y обращается въ безконечность прежде пересѣченія оси X-овъ. Полная площадь кривой при такихъ условіяхъ равняется безконечности и образуемая ею поверхность вращенія разомкнута съ одного конца.

Значеніемъ A, какъ нетрудно видѣть изъ выраженія (42), опредѣляется то или другое желаемое соотношеніе между площадями продольнаго, проходящаго чрезъ ось, сѣченія и наибольшаго поперечнаго (миделева), слѣдовательно, между длиною и шириною поверхности[24]).

При $A=\infty$ площади продольнаго и поперечнаго сѣченій одинаковы, ихъ отношеніе равно единицѣ[25]), а самая поверхность есть шаровая. Дѣйствительно для $A=\infty$ имѣемъ

$$y=\left(\frac{C_1}{A}\right)\sqrt{1-u^2}\ ,\quad x=-\left(\frac{C_1}{A}\right)u \qquad (43)$$

---

[24]) Такое соотношеніе, какъ извѣстно, имѣетъ большое значеніе въ корабельной архитектурѣ.

[25]) Собственно минусъ единицѣ, но это происходитъ отъ того, что равныя площади взаимно перпендикулярны и для сравненія ихъ необходимо одну изъ нихъ повернуть на прямой уголъ, что по теоріи кватерніоновъ соотвѣтствуетъ помноженію на -1. Въ самомъ дѣлѣ, означивъ чрезъ R радіусъ поперечнаго сѣченія, радіусъ продольнаго будетъ Rj; площади этихъ сѣченій выразятся чрезъ πR^2 и $\pi(Rj)^2$ или чрезъ πR^2 и $-\pi R^2$, такъ какъ $j^2=-1$, слѣдовательно отношеніе между ними равняется -1. См. по этому предмету:

Tait. An elementary treatise on Quaternions. London 1882, pag. 34 & 35.

Здѣсь множитель $\frac{C_1}{A}$ зависитъ отъ единицы измѣренія и въ нуль не обращается, такъ какъ C_1 произвольная величина и мы можемъ ее увеличивать одновременно съ A.

Исключая изъ уравненій (43) вспомогательную перемѣнную u, получимъ

$$x^2+y^2=\left(\frac{C_1}{A}\right)^2$$

уравненіе круга, вращеніемъ котораго образуется шаровая поверхность.

Въ заключеніе необходимо обратить вниманіе на то, что для практическихъ случаевъ значеніе A вообще можетъ колебаться между предѣлами: указаннымъ выше (23) и тѣмъ, который обращадтъ вторую часть выраженія (42) въ единицу. Такое значеніе для A почти равняется (немного менѣе)

$$A=\sqrt{45}.8^{-1}=0{,}838525492....$$

Въ этомъ можно убѣдиться изъ того, что первый членъ ряда (42) при значеніи для $A=0{,}838525492...$ будетъ 0,4 и второй 0,(2). Величина отношенія между членами начиная со второго колеблется отъ 0,64 (наибольшая) до 0,6 (наименьшая при $p=\infty$). Если вмѣсто ряда (42) взять безконечную геометрическую прогрессію съ знаменателями отношенія 0,64 и 0,6, то получимъ для первой сумму 1,017284... и для второй сумму 0,9(5), между которыми заключается сумма ряда (42); а потому эта сумма для указаннаго выше значенія A мало отличается отъ единицы. Слѣдовательно для практическихъ цѣлей значеніе A должно заключаться предѣлами

$$\frac{\sqrt{45}}{8}>A>\frac{\sqrt{27}}{8}$$

или

$$0{,}838525492...>A>0{,}64951787407....$$

что и требовалось показать.

III.

Опредѣленіе условій minimum'a интеграла.

На VII Съѣздѣ Естествоиспытателей и Врачей въ Одессѣ въ 1883 году профессоръ В. В. Преображенскій предложилъ крайне простой пріемъ для преобразованія второй варіаціи при различеніи maximum'a и minimum'a даннаго интеграла [26]). На основаніи этого пріема знакъ второй варіаціи зависитъ отъ знака выраженія

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}\left(\frac{v\delta u - v'\delta y}{v}\right)^2 ,$$

слѣдовательно, очевидно, отъ знака [27]) второй частной производной $\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}$, въ разсматриваемомъ случаѣ отъ знака выраженія

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = y\,\frac{6u(\sqrt{1-u^2})^3 + A}{(\sqrt{1-u^2})^3} \qquad (44)$$

---

[26]) Протоколы VII Съѣзда Естествоиспытателей и Врачей въ Одессѣ въ 1883 году. Засѣданіе математической секціи 24 августа, сообщеніе проф. В. В. Преображенскаго о преобразованіи второй варіаціи.

[27]) При этомъ для сохраненія одинаковости знака внѣинтегральныхъ членовъ съ знакомъ интеграла, вѣроятно, необходимо, чтобы v между данными предѣлами не обращалось ни въ нуль ни въ безконечность, что въ разсматриваемомъ случаѣ выполняется.

Такъ какъ y предполагается всегда положительнымъ, а также и значеніе выраженія $\sqrt{1-u^2}$ тоже берется положительнымъ [28]), то знакъ выраженія (44) зависитъ исключительно отъ знака выраженія

$$6u(\sqrt{1-u^2})^3+A \quad , \qquad (45)$$

изслѣдованіемъ котораго теперь и займемся.

Для всѣхъ положительныхъ значеній u знакъ выраженія (45), а съ нимъ и знакъ выраженія (44) остается неизмѣнно *плюсъ*, поэтому вся передняя часть поверхности до наибольшаго поперечнаго сѣченія (миделева), опредѣляемаго значеніями u отъ $u=1$ до $u=0$, представляетъ minimum интеграла, выражающаго сопротивленіе.

Для задней части поверхности, опредѣляемой значеніями u отъ $u=0$ до $u=-1$, выраженіе (45) два раза обращается въ нуль, слѣдовательно два раза мѣняетъ знакъ. Въ этомъ можно убѣдиться уже изъ того, что произведеніе

$$6u(\sqrt{1-u^2})^3$$

имѣетъ наибольшее численное значеніе при $u=\pm 0{,}5$ и равняется [29])

$$\Big|^{0,5} 6u(\sqrt{1-u^2})^3=\pm\frac{9\sqrt{3}}{8}=\pm\frac{\sqrt{243}}{8}=\pm 1{,}9485572...$$

---

[28]) Такъ какъ уголъ, составляемый сопротивленіемъ съ нормалью къ поверхности, не можетъ быть болѣе 180°, то sinus его всегда положительный.

[29]) Дѣйствительно, имѣемъ

$$\frac{d[6u(\sqrt{1-u^2})^3]}{du}=6(1-4u^2)\sqrt{1-u^2},$$

откуда для maximum имѣемъ

$$1-4u^2=0 \quad \text{и} \quad u=\pm 0{,}5 \quad ,$$

равенство нулю другого множителя, $1-u^2=0$, опредѣляетъ minimum,

между тѣмъ какъ значеніе для A въ пригодныхъ для практики случаяхъ колеблется какъ мы видѣли (выше стр. 33) между наибольшимъ

$$A=\frac{\sqrt{45}}{8}=0,838525492....$$

и наименьшимъ

$$A=\frac{\sqrt{27}}{8}=0,64951787407...$$

Поэтому точки, въ которыхъ выраженіе (45), а съ нимъ и выраженіе (44) перемѣняютъ знакъ, вообще существуютъ и опредѣляются отрицательными значеніями u, слѣдовательно находятся на задней части поверхности. Такихъ точекъ, какъ нетрудно видѣть, двѣ; въ одной изъ нихъ знакъ (45) переходитъ изъ *плюса* въ *минусъ* и во второй изъ *минуса* въ *плюсъ* т. е. въ первомъ случаѣ интегралъ переходитъ изъ minimum'a въ maximum и во второмъ изъ maximum'a въ minimum. Кромѣ того эти точки наиболѣе удаляются другъ отъ друга по мѣрѣ уменьшенія значенія A между указанными выше предѣлами.

Впрочемъ, въ виду особой важности этого вопроса, изслѣдуемъ его подробнѣе.

Для этой цѣли выраженію (45) придадимъ раціональный видъ положеніемъ

$$u=\frac{1}{\sqrt{w^2+1}}$$

вслѣдствіе котораго взамѣнъ выраженія (45) получимъ слѣдующее

$$\frac{6w^3+A(1+w^2)^2}{(1+w^2)^2}$$

Очевидно точки, въ которыхъ выраженіе (45) мѣняетъ знакъ, опредѣлятся уравненіемъ

$$w^4+\frac{6}{A}w^3+2w^2+1=0 \qquad (46)$$

Функціи Штурма для этого уравненія будутъ

$$V_0=w^4+\frac{6}{A}w^3+2w^2+1$$

$$V_1=4w^3+\frac{18}{A}w^2+4w$$

$$V_2=\left(\frac{27}{4}\frac{1}{A^2}-1\right)w^2+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{A}w-1$$

$$V_3=\left[\frac{9}{A^2}w-\frac{6}{A}\left(\frac{81}{4}\frac{1}{A^2}-4\right)\right]\left(\frac{27}{4}\frac{1}{A^2}-1\right)^{-2}$$

$$V_4=\left(\frac{27}{4}\frac{1}{A^2}-1\right)^2\left(\frac{64}{9}\frac{1}{A^2}-27\right)$$

изъ которыхъ очевидно, что если

$$\frac{64}{9}A^2-27>0 \text{ или } A>\frac{\sqrt{243}}{8} \text{ и } A>1,9485572...$$

то разсматриваемое уравненіе дѣйствительныхъ корней не имѣетъ и выраженіе (45) знака ни для какихъ значеній u не мѣняетъ.

Если же имѣемъ

$$\frac{64}{9}A^2-27<0 \text{ или } A<\frac{\sqrt{243}}{8} \text{ и } A<1,9485572...$$

то разсматриваемое уравненіе имѣетъ два дѣйствительныхъ и два мнимыхъ корня т. е. существуютъ только два значенія для u [30]), обращающія въ нуль выраженіе (45). На основа-

[30]) Собственно четыре значенія для u, два положительныхъ и два отрицательныхъ, изъ которыхъ только два послѣднія обращаютъ въ нуль выраженіе (45), а потому мы только эти значенія постоянно имѣемъ въ виду.

ніи вышесказаннаго этотъ послѣдній случай вообще имѣетъ мѣсто.

Такимъ образомъ есть двѣ точки, въ которыхъ выраженіе (44) мѣняетъ знакъ.

Означивъ дѣйствительные корни уравненія (46) большій по численному значенію чрезъ w_1 и меньшій чрезъ w_2, найдемъ, что интегралъ будетъ имѣть minimum въ области, опредѣляемой значеніями u отъ $u_0=1$ до $u_1=-\frac{1}{\sqrt{w_1^2+1}}$, maximum въ области, опредѣляемой значеніями u отъ $u_1=-\frac{1}{\sqrt{w_1^2+1}}$ до $u_2=-\frac{1}{\sqrt{w_2^2+1}}$ и затѣмъ снова minimum въ области, опредѣляемой значенія u отъ $u_2=-\frac{1}{\sqrt{w_2^2+1}}$ до $u_3=-1$.

Необходимо замѣтить, что вообще въ пригодныхъ для практики случаяхъ только что указанные предѣлы u весьма мало колеблются при различныхъ значеніяхъ A. Чтобы убѣдиться въ этомъ, опредѣлимъ значенія u для предѣльныхъ значеній A, которыя могутъ имѣть мѣсто на практикѣ, именно (см. выше стр. 33) для наибольшаго значенія $A=0{,}838525492......$ и для наименьшаго значенія $A=0{,}64951787407...$ Въ первомъ случаѣ, принявъ приблизительно $6A^{-1}=7$, точки перехода интеграла изъ minimum'а въ maximum и обратно опредѣлимъ значеніями u вида

$$u_1=-0{,}1476761... \quad \text{и} \quad u_2=-0{,}83112918...$$

во второмъ случаѣ, принявъ приблизительно $6A^{-1}=10$, эти точки опредѣлимъ значеніями u слѣдующими

$$u_1=-0{,}1015676... \quad \text{и} \quad u_2=-0{,}874295023....$$

Поэтому положеніе первой точки во всякомъ пригодномъ для

практики случаѣ опредѣляейся неравенствами

$$-0{,}1476761\ldots < u_1 < -0{,}1015676\ldots$$

и положеніе второй точки неравенствами

$$-0{,}83112918\ldots > u_2 > -0{,}874295023\ldots$$

изъ которыхъ слѣдуетъ, что колебанія этихъ значеній, а слѣдовательно и перемѣщеніе точекъ перехода интеграла изъ minimum'а въ maximum и обратно крайне незначительно для различныхъ значеній A, пригодныхъ въ практикѣ.

Для всѣхъ поверхностей, для которыхъ значеніе A было бы взято больше $A > 1{,}9485572\ldots$ интегралъ имѣетъ minimum на всей поверхности. Поэтому и шаровая поверхность, получаемая при $A = \infty$, имѣетъ во всѣхъ своихъ точкахъ minimum интеграла, въ чемъ легко убѣдиться и непосредственно.

IV.

Изслѣдованіе кривой, образующей при вращеніи поверхность наименьшаго сопротивленія.

Здѣсь изслѣдуемъ нѣкоторыя свойства кривой, опредѣляемой уравненіями (32) (см. выше стр. 21), а также найдемъ длину ея дуги и площадь, образуемую ею съ осью X-овъ.

Значеніе координаты y опредѣляется выраженіемъ

$$y=\frac{C_1\sqrt{1-u^2}}{2u^3\sqrt{1-u^2}+A},$$

изъ котораго не трудно видѣть, что при $u=\pm1$ y обращается въ нуль, т. е. кривая пересѣкаетъ ось X-овъ въ двухъ точкахъ. При измѣненіи величины u отъ $u=1$ до $u=0$, значеніе y постоянно возрастаетъ, имѣя наибольшую величину (maximum) при $u=0$, именно

$$y_m=\frac{C_1}{A}$$

При дальнѣйшемъ измѣненіи u отъ $u=0$ до $u=-1$, значеніе y постоянно уменьшается и равняется нулю при $u=-1$. Къ этому необходимо добавить, что знаменатель выраженіе y (см. выше стран. 33) въ разбираемыхъ нами случаяхъ (т. е. при допускаемыхъ величинахъ для A) неимѣетъ дѣй-

ствительныхъ корней, иначе сказать, не обращается въ нуль, слѣдовательно y неимѣетъ безконечныхъ значеній.

Такъ какъ внѣ указанныхъ предѣловъ $+1$ и -1 u неможетъ имѣть значеній[31]), то въ разсматриваемомъ случаѣ y не будетъ имѣть отрицательныхъ величинъ и кривая не переходитъ по другую сторону оси X-овъ, въ пересѣченіи съ которой имѣетъ предѣльныя точки.

Вышесказанное остается дополнить тѣмъ, что въ разбираемыхъ нами случаяхъ (т. е. при допускаемыхъ величинахъ A) x ни для какихъ значеній u между предѣлами $u=+1$ и $u=-1$ не обращается въ безконечность, въ чемъ легко убѣдиться изъ выраженія (35) (см. выше стр. 25). Поэтому кривая, опредѣляемая уравненіями (32) конечная, имѣетъ опредѣленную длину и заключаетъ данную площадь, образуя при вращеніи около оси X-овъ соотвѣтствующій (опредѣленный или заданный) объемъ.

Теперь остается найти величины x для значеній $u=+1$ и $u=-1$. Съ этой цѣлію въ формулу (35) (см. выше стр. 25) внесемъ поочереди $u=+1$ и $u=-1$; сдѣлавъ сначала $u=+1$, для x получимъ выраженіе

$$x_1=\frac{C_1}{A}\left\{-1+\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\frac{2p.(2p-2).(2p-4)\ldots4.2}{(8p-1).(8p-3)\ldots(6p+5).(6p+3)}-C_2\right\}$$

сдѣлавъ затѣмъ $u=-1$ для x найдемъ выраженіе

$$x_2=-\frac{C_1}{A}\left\{-1+\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\frac{2p.(2p-2).(2p-4)\ldots4.2}{(8p-1).(8p-3)\ldots(6p+5).(6p+3)}+C_2\right\}$$

---

[31]) Вслѣдствіе того, что

$$\frac{dy}{ds}=u$$

а dy не можетъ быть болѣе ds по численному значенію.

изъ которыхъ очевидно

$$x_2 = -\left(x_1 + 2\frac{C_1}{A}C_2\right)$$

т. е. что въ отрицательную сторону (по направленію къ задней или кормовой части поверхности) численное значеніе x на $2C_2.C_1.A^{-1}$ болѣе, чѣмъ въ положительную сторону.

Означивъ далѣе уголъ, составляемый касательною съ осью X-овъ чрезъ τ, будемъ имѣть

$$\operatorname{tang}\tau = \frac{dy}{dx} = p = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$$

Такъ какъ u можетъ имѣть всѣ значенія между предѣлами $u=+1$ и $u=-1$ включительно, то τ будетъ имѣть всѣ значенія отъ $\tau=90^\circ$ до $\tau=0$ включительно; значеніе $\tau=90^\circ$ получится при $u=\pm1$, слѣдовательно кривая въ обѣихъ точкахъ пересѣченія съ осью X-овъ встрѣчаетъ эту послѣднюю подъ прямымъ угломъ.

При $u=0$ имѣемъ $\tau=0$, а потому касательная въ точкѣ

$$x=0 \quad , \quad y=\frac{C_1}{A}=y_m$$

(именно на мидельшпангоутѣ) идетъ параллельно оси X-овъ.

Относительно построенія касательной и нормали вопросъ значительно упрощенъ тѣмъ, что заданіе точки кривой производится посредствомъ значенія u, зная которое легко построить касательную и нормаль ко всякой кривой [32]).

[32]) Дѣйствительно, зная u, отложимъ его значеніе отъ начала координатъ по оси X-овъ на противуположной сторонѣ относительно той, съ которой задана точка кривой. Отъ точки отложенія радіусомъ, равнымъ единицѣ, проведемъ дугу и точку пересѣченія дуги съ осью У-ковъ соединимъ съ точкою отложенія u по оси X-овъ; чрезъ указанную точку кривой проведемъ параллельную, которая будетъ нормалью къ данной кривой.

Для опредѣленія направленія выпуклости и вогнутости кривой, найдемъ вторую производную отъ y по x такимъ образомъ. Выше мы видѣли, что

$$\frac{dy}{dx}=\frac{u}{\sqrt{1-u^2}},$$

диференцируя это выраженіе по x найдемъ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{(\sqrt{1-u^2})^3}\frac{du}{dx}$$

но значеніе $\frac{du}{dx}$ опредѣляется выраженіемъ (9) (выше стр. 11), внося которое получимъ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{C_1}\cdot\frac{1}{(\sqrt{1-u^2})^3}\cdot\frac{[2u^3\sqrt{1-u^2}+A]^2}{6u(\sqrt{1-u^2})^3+A} \qquad (47)$$

Для всѣхъ значеній u отъ $u=+1$ до $u=-\frac{1}{\sqrt{w_1+1}}$ выраженіе (47) имѣетъ конечную отрицательную величину, равно какъ и для значеній u отъ $u=-\frac{1}{\sqrt{w_1^2+1}}$ до $u=-1$. Въ этихъ областяхъ кривая вогнутостію обращена къ оси X-овъ. Въ точкахъ, опредѣляемыхъ значеніями $u=-\frac{1}{\sqrt{w_1^2+1}}$ и $u=-\frac{1}{\sqrt{w_2^2+1}}$, именно въ точкахъ перехода интеграла изъ minimum въ maximum и обратно, выраженіе (47) равно безконечности, также какъ и дальнѣйшія производныя отъ y по x равны тоже безконечности [33].

---

[33]) Точки перехода интеграла изъ minimum'a въ maximum и обратно характеризуются между прочимъ слѣдующими условіями

Радіусъ кривизны разсматриваемой кривой выражается формулою

$$\rho = C_1 \frac{6u(\sqrt{1-u^2})^3 + A}{[2u^3\sqrt{1-u^2}+A]^2} = -\frac{dx}{du}$$

изъ которой не трудно видѣть, что въ трехъ точкахъ, опредѣляемыхъ значеніями $u=+1$, $u=0$ и $u=-1$, радіусъ кривизны имѣетъ одинаковыя величины и равняется

$$\rho = \frac{C_1}{A} = y_m$$

т. е. наибольшему значенію y. Слѣдовательно для точки $u=0$ центръ кривизны находится въ началѣ координитъ.

Длина дуги разсматриваемой кривой.

Изъ выраженія (6) (см. выше стр. 10), внося въ него значеніе y, не трудно получить выраженіе для ds, интегрируя которое получимъ длину дуги въ такой формѣ

$$s = -C_1 \int_{-1}^{+1} \frac{6u(\sqrt{1-u^2})^3 + A}{[2u^3\sqrt{1-u^2}+A]^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad ;$$

чтобы совершить это интегрированіе употребимъ тѣже поло-

$$\frac{dx}{du}=0 \quad , \quad \frac{dy}{du}=0 \quad ;$$

кромѣ того, какъ указано въ текстѣ имѣемъ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\infty \quad \text{и вообще} \quad \frac{d^ny}{dx^n}=\infty \quad ,$$

такъ какъ

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \infty$$

вслѣдствіе того, что $\frac{du}{dx}=\infty$

женія, какія были приведены выше (стр. 27) именно: сдѣлаемъ $x=\sin\omega$, раздѣлимъ числителя и знаменателя на A^2 и полученное выраженіе разложимъ въ рядъ помощію дѣленія, при чемъ найдемъ, замѣнивъ предварительно во второмъ членѣ $\cos^2\omega=1-\sin^2\omega$

$$s=-\frac{C_1}{A}\sum_{n=\infty}^{n=0}(-1)^n\left(\frac{2}{A}\right)^n\left\{(4n+1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3n}\omega\cos^n\omega d\omega-\right.$$

$$\left.-3n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3n-2}\omega\cos^n\omega d\omega\right\}\quad;$$

но мы имѣемъ [34])

$$(4n+1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3n}\omega\cos^n\omega d\omega=\frac{(3n-1)(4n+1)}{4n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3n-2}\omega\cos^n\omega d\omega$$

внося это значеніе въ предыдущее выраженіе, получимъ, произведя предварительно интеграцію перваго члена

$$s=-\pi\frac{C_1}{A}+\frac{C_1}{A}\sum_{n=\infty}^{n=1}(-1)^n\left(\frac{2}{A}\right)^n\frac{n+1}{4n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3n-2}\cos^n\omega d\omega$$

Здѣсь n можетъ имѣть значеніе нечетное и четное; для нечетнаго $n=2p-1$, какъ мы видѣли раньше (стр. 28) вышеуказанный интегралъ обращается въ нуль

---

[34]) *Bertrand*. Calcul integral pag. 73.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^{6p-2}\omega \cos^{2p-1}\omega d\omega = 0$$

для четнаго же $n=2p$ имѣемъ

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^{6p-2}\omega \cos^{2p}\omega d\omega = \frac{1.3.5...(2p-1).1.3.5...(6p-3)}{2.4.6....(8p-4)(8p-2)}\pi$$

и значеніе s принимаетъ видъ

$$s = -\pi\frac{C_1}{A} + \pi\frac{C_1}{A}\sum_{n=\infty}^{n=0} \frac{1}{A^{2p}}.\frac{1}{2^{2p}}.\frac{1.3.5...(2p+1).1.3.5...(6p-3)}{1.2.3.4....(4p-1).4p} \quad (48)$$

выраженіе, въ которомъ выдѣлилась общимъ множителемъ полудлина дуги наибольшаго поперечнаго (миделева) сѣченія

$$\pi\frac{C_1}{A} = \pi y_m = \frac{2\pi y_m}{2}$$

Раздѣливъ обѣ части выраженія (48) на эту полудлину и перенеся единицу въ первую часть, получимъ

$$\frac{s}{\pi y_m} + 1 = \sum_{p=\infty}^{p=1} \frac{1}{A^{2p}}.\frac{1}{2^{2p}}.\frac{1.3.5...(2p+1).1.3.5....(6p-3)}{1.2.3.4....(4p-1).4p} \quad (49)$$

выраженіе, которое можетъ быть представлено въ такой формѣ

$$2s = k_{\circ}.2\pi y_m$$

т. е. длина дуги продольнаго сѣченія для разсматриваемой поверхности выражается длиною дуги наибольшаго поперечнаго (миделева) сѣченія, помноженнаго на нѣкоторый постоянный

для данной поверхности коеффиціентъ k_0. Въ той же формѣ обыкновенно это отношеніе выражается и въ корабельной архитектурѣ.

Для нахожденія численныхъ значеній s можетъ быть небезполезно воспользоваться представленіемъ выраженія (49) помощію функцій Г именно

$$\frac{s}{\pi y_m}+1=\sum_{p=\infty}^{p=1}\frac{1}{A^{2p}}\frac{4}{2^{6p}}\frac{\Gamma(2p+2).\Gamma(6p-2)}{\Gamma(4p+1).\Gamma(p+1).\Gamma(3p-1)}$$

которое даетъ возможность при значительныхъ величинахъ p употребить для вычисленія приближенныя значенія функцій Г.

Относительно сходимости ряда (49) тѣмъ же самымъ пріемомъ, какой выше былъ употребленъ (стр. 31) именно изслѣдованіемъ отношенія двухъ рядомъ стоящихъ членовъ $p+1$ и p нетрудно найти, что рядъ (49) будетъ сходящимся для величинъ A, опредѣляемыхъ неравенствомъ

$$A>\frac{3\sqrt{3}}{8} \quad \text{или} \quad A>0,64951787407\ldots.$$

т. е. получается условіе сходимости одинаковое съ вышенайденнымъ для ряда (31) (выше стран. 42).

Площадь, образуемая кривой съ осью X-овъ.

Площадь Π, образуемая кривой съ осью X-овъ, опредѣлена выше при изслѣдованіи значеній, которыя можетъ принимать A (см. выше стр. 26, 27, 28, 29 и 30).

Въ заключеніе необходимо указать на то, что разсматриваемая кривая при условіи $A=\infty$ переходитъ, какъ мы видѣли выше (стр. 32) въ кругъ; въ случаѣ же $A=0$ представляетъ кривую, указанную Ньютономъ для рѣшенія задачи о получаемой вращеніемъ поверхности наименьшаго сопротивленія.

V.

Изслѣдованіе поверхности, образуемой вращеніемъ вышеуказанной кривой.

Означивъ выраженія координатъ кривой (32) (см. выше стр. 21) чрезъ

$$y=\frac{C_1}{A}\psi(u) \quad \text{и} \quad x=\frac{C_1}{A}\varphi(u) \quad ,$$

уравненіе поверхности наименьшаго сопротивленія, образуемой вращеніемъ этой кривой около оси X-овъ, получимъ по исключеніи u изъ выраженій

$$y^2+z^2=\left(\frac{C_1}{A}\right)^2\left[\psi(u)\right]^2$$

$$x=\frac{C_1}{A}\varphi(u)$$

При такихъ условіяхъ уравненіе всякаго поперечнаго сѣченія, находящагося въ разстояніи a отъ наибольшаго (миделева), опредѣляемаго $x=0$, получимъ въ видѣ

$$y^2+z^2=\left(\frac{C_1}{A}\right)^2\left[\psi(u_1)\right]^2$$

гдѣ значеніе u_1 опредѣляется корнемъ уравненія

$$\varphi(u_1)=\frac{A}{C_1}a$$

Длина этого сѣченія будетъ

$$2\pi\frac{C_1}{A}\psi(u_1)=k_2.2\pi y_m$$

и площадь его выразится

$$\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^2\left[\psi(u_1)\right]^2=k_3.\pi y_m{}^2=k_3.\boxtimes$$

такъ какъ $\psi(u_1)$ есть величина постоянная, зависящая отъ данной величины a (ср. стр. 25).

Уравненіе какого бы то нибыло продольнаго сѣченія, параллельнаго оси вращенія, но не проходящаго чрезъ нее, опредѣляется выраженіями

$$y=\sqrt{\left(\frac{C_1}{A}\right)^2\left[\psi(u)\right]^2-b^2}$$

$$x=\frac{C_1}{A}\varphi(u) \quad ,$$

гдѣ b означаетъ разстояніе этого сѣченія отъ оси.

Длина и площадь такого сѣченія могутъ быть приведены къ виду [35]) первая

$$\int_{u_2}^{u_1}ds=x_1.2s=k_4.2\pi y_m$$

вторая

$$\int_{u_2}^{u_1}ydx=x^2.2\Pi=k_5.\pi y_m{}^2=k_5.\boxtimes$$

---

[35]) Выраженія эти вполнѣ подобны по своей формѣ принятымъ въ корабельной архитектурѣ для вычисленія длины и площадей вертикальныхъ и горизонтальныхъ сѣченій судна или точнѣе, длины и площадей *шпангоутовъ*, *батоксовъ* и *ватерлиній*.

гдѣ предѣлы u_1 и u_2 суть корни уравненія

$$\psi(u)=\frac{C_1}{A}b\sqrt{2}$$

Такъ какъ для разсматриваемой поверхности всѣ ея элементы, какъ то, форма, квадратура, объемъ или водоизмѣщеніе (имѣется въ виду подводное плаваніе), центръ тяжести, моментъ инерціи и др. могутъ быть точно вычислены математическимъ путемъ, то мы здѣсь неостанавливаемся болѣе на подробностяхъ вычисленія продольныхъ и поперечныхъ сѣченій, обыкновенно необходимыхъ въ корабельной архитектурѣ для нахожденія указанныхъ выше элементовъ судна и перейдемъ къ разсмотрѣнію другихъ свойствъ поверхности.

Длина всей поверхности по оси Х-овъ опредѣляется (см. выше стр. 42). выраженіемъ

$$D=2\left(x_1+\frac{C_1}{A}C_2\right)$$

Съ другой стороны положеніе наибольшаго поперечнаго сѣченія (мидельшпангоута) отстоитъ на разстояніи x_1 отъ передней (носовой) части поверхности и на $x_1+2\frac{C_1}{A}C_2$ отъ задней (кормовой). Поэтому наибольшее поперечное сѣченіе (мидельшпангоутъ) находится ближе къ передней (носовой) части поверхности, чѣмъ къ задней (кормовой). Такого рода устройство мы замѣчаемъ у всѣхъ рыбъ, имѣющихъ близкое къ кругу поперечное сѣченіе.

Выше (стр. 42) было указано, что кривая, производящая вращеніемъ разсматриваемую поверхность, встрѣчаетъ ось Х-овъ или ось вращенія подъ прямымъ угломъ, а потому въ этихъ точкахъ поверхность имѣетъ *точки сферической кривизны* (ombilic). Кромѣ того также выше мы видѣли (стр. 44), что

радіусъ кривизны разсматриваемой кривой въ точкѣ ея пересѣченія съ осью У-ковъ выражается чрезъ

$$\rho=\frac{C_1}{A}$$

Съ другой стороны радіусъ проходящаго чрезъ эту точку наибольшаго поперечнаго сѣченія поверхности есть

$$y_m=\frac{C_1}{A}=\rho\quad;$$

такимъ образомъ двѣ взаимно перпендикулярныя кривизны меридіанальныхъ линій и пересѣкающаго ихъ круга равны. Слѣдовательно во всѣхъ точкахъ наибольшаго поперечнаго сѣченія (мидельшпангоута) разсматриваемая поверхность имѣетъ также *точки сферической кривизны* (ombilic).

Квадратура разсматриваемой поверхности.

Поверхность тѣла вращенія выражается интеграломъ

$$\sigma=2\pi\int_{s_1}^{s_0} yds$$

Для разсматриваемаго случая этотъ интегралъ принимаетъ видъ

$$\sigma=-2\pi C_1{}^2\int_{-1}^{+1}\frac{6u(\sqrt{1-u^2})^3+A}{[2u^3\sqrt{1-u^2}+A]^3}du$$

сдѣлавъ здѣсь $u=\sin\omega$, раздѣливъ числителя и знаменателя на A^3 и разложивъ въ рядъ помощію обыкновеннаго дѣленія найдемъ, замѣнивъ предварительно $\cos^2\omega$ чрезъ $1-\sin^2\omega$

$$\sigma=-2\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^2\sum_{n=\infty}^{n=1}(-1)^n\left(\frac{2}{A}\right)^n\frac{n+1}{2}\left\{(4n+2)\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3n}\omega\cos^{n+1}\omega d\omega-\right.$$

$$\left.-3n\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3n-2}\omega\cos^{n+1}\omega d\omega\right\}$$

Но извѣстно, что [36])

$$(4n+2)\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3n}\omega\cos^{n+1}\omega d\omega=\frac{(3n-1)(4n+2)}{4n+1}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3n-2}\omega\cos^{n+1}\omega d\omega$$

внося это значеніе въ предыдущее и произведя интеграцію перваго члена получимъ

$$\sigma=-4\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^2+ \tag{50}$$

$$+2\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^2\sum_{n=\infty}^{n=1}(-1)^n\left(\frac{2}{A}\right)^n\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{4n+1}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3n-2}\omega\cos^{n+1}\omega d\omega$$

Для нечетнаго $n=2p-1$ имѣемъ

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p-5}\omega\cos^{2p}\omega d\omega=M\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin\omega\cos^{2p}\omega d\omega=$$

$$=-\frac{M}{2p+1}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^{2p+1}\omega=0\quad;$$

---

[36]) *Bertrand.* Calcul intégral, pag. 73.

для четнаго $n=2p$ найдемъ

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^{6p-2}\omega \cos^{2p+1}\omega d\omega =$$

$$= \frac{2p(2p-2)\ldots4.2}{(8p-1)\ldots(6p+3).(6p+1)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^{6p-2}\omega \cos\omega d\omega$$

но мы имѣемъ

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^{6p-2}\omega \cos\omega d\omega = \left| \frac{\sin^{6p-1}\omega}{6p-1} \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{1-(-1)}{6p-1} = \frac{2}{6p-1}$$

Внося эти значенія въ интегралъ (50), найдемъ, выдѣливъ предварительно множителей равныхъ 2

$$\sigma = -4\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^2 +$$

$$+4\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^2 \sum_{p=\infty}^{p=1} \frac{1}{A^{2p}} . 2^{3p}(2p+1) \frac{1.2.3.4\ldots(p-1).p.(p+1)}{(6p-1).(6p+1)\ldots(8p-1).(8p+1)}$$

выраженіе, обѣ части котораго раздѣлимъ на общаго множителя вида

$$4\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^2 = 4\pi y_m{}^2 = 4 \otimes$$

равнаго поверхности шара, построеннаго на наибольшемъ поперечномъ (миделевомъ) сѣченіи, при этомъ, перенеся единицу въ первую часть, получимъ

$$\frac{\sigma}{4\pi y_m^2}+1=\sum_{p=\infty}^{p=1}\frac{1}{A^{2p}}\cdot 2^{3p}(2p+1)\frac{1.2.3\ldots p(p+1)}{(6p-1).(6p+1)\ldots(8p+1)} \quad (51)$$

Такимъ образомъ квадратура разсматриваемой поверхности выражается формулою

$$\sigma=k_6.\bigotimes$$

т. е. помощію площади наибольшаго поперечнаго сѣченія, помноженной на постоянный для данной поверхности коеффиціентъ k_6.

Помощію функцій Γ выраженіе (51) можно представить такимъ образомъ

$$\frac{\sigma}{4\pi y_m^2}+1=\sum_{p=\infty}^{p=1}\frac{1}{A^{2p}}2^{4p}(2p+1)\frac{\Gamma(p+2).\Gamma(6p-1).\Gamma(4p+1)}{\Gamma(8p+2).\Gamma(3p+1)}6p$$

или, воспользовавшись приближенной формулой

$$\Gamma(a+1)=e^{-a}a^a\sqrt{2a\pi}$$

а также замѣнивъ

$$\Gamma(p+2)=(p+1)\Gamma(p+1)$$

$$\Gamma(6p-1)=\frac{\Gamma(6p+1)}{6p.(6p-1)}$$

$$\Gamma(8p+2)=(8p+1)\Gamma(8p+1)$$

получимъ приближенное значеніе выраженіе (51) въ видѣ

$$\frac{\sigma}{4\bigotimes}+1=\sqrt{2\pi}\sum_{p=\infty}^{p=1}\frac{(2p+1)(p+1)\sqrt{p}}{(6p-1)(8p+1)}\cdot\left(\frac{27}{1024}\right)^p$$

выраженіе, которымъ съ выгодою можно воспользоваться для практическихъ вычисленій, въ особенности при значительныхъ величинахъ p.

Для опредѣленія условій сходимости ряда (51) въ выраженіи представляющемъ отношеніе его $p+1$ члена къ p члену, именно

$$\frac{1}{A^2}.2^3.\frac{2p+3}{2p+1}.\frac{(p+2)(6p-1)(6p+1)(6p+3)}{(8p+3)(8p+5)(8p+7)(8p+9)}$$

сдѣлаемъ $p=\infty$, причемъ получимъ

$$\frac{1}{A^2}.2^3.\frac{2}{2}.\frac{1}{8}.\frac{6}{8}.\frac{6}{8}.\frac{6}{8}=\frac{1}{A^2}\left(\frac{3}{4}\right)^3 \quad ;$$

для сходимости ряда (51) необходимо

$$\frac{1}{A^2}\left(\frac{3}{4}\right)^3<1 \quad \text{откуда} \quad A>\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

предѣлъ одинаковый съ вышенайденными.

Объемъ разсматриваемой поверхности.

Объемъ тѣла вращенія опредѣляется формулою

$$V=\pi\int_{x_0}^{x_1} y^2dx \quad ;$$

внося въ этотъ интегралъ значенія y^2 и dx, выраженныя въ функціи u (см. выше стр. 10 и 11), получимъ

$$V=-\pi C_1{}^3\int_{-1}^{+1}\frac{6u(\sqrt{1-u^2})^3+A}{[2u^3\sqrt{1-u^2}+A]^4}(1-u^2)du$$

сдѣлавъ въ этомъ интегралѣ такія же преобразованія, какъ указано выше (стр. 11 и 12) получимъ

$$V = -\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^3 \sum_{n=\infty}^{n=0} (-1)^n \left(\frac{2}{A}\right)^n \frac{(n+1)(n+2)}{1.2.3} \left\{(4n+3)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^{3n}\omega \cos^{n+3}\omega d\omega - \right.$$

$$\left. -3n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^{3n-2}\omega^{n+3}\omega d\omega \right\} \qquad (52)$$

Но мы знаемъ, что

$$(4n+3)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^{3n}\omega \cos^{n+3}\omega d\omega = (3n-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^{3n-2}\omega \cos^{n+3}\omega d\omega$$

внося это значеніе въ выраженіе (52), въ которомъ совершивъ предварительно интеграцію перваго члена, именно

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^3\omega d\omega = \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\sin\omega - \frac{\sin^3\omega}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

получимъ

$$V = -\frac{4}{3}\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^2 +$$

$$+\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^3 \sum_{n=\infty}^{n=1} (-1)^n \left(\frac{2}{A}\right)^n \frac{(n+1)(n+2)}{1.2.3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^{3n-2}\omega \cos^{n+3}\omega d\omega$$

Для нечетнаго $n = 2p-1$ имѣемъ (см. выше стр. 28)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^{6p-5}\omega \cos^{2p+2}\omega d\omega = 0$$

Для четнаго $n=2p$ получимъ (см. выше стр. 53)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^{6p-2}\omega \cos^{2p+3}\omega d\omega = \frac{(2p+2).2p.(2p-1)...4.2}{(8p+1)(8p-1)...(6p+1)} \cdot \frac{2}{6p-1}$$

и значеніе объема выразится

$$V = -\frac{4}{3}\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^3 + \tag{53}$$

$$+\frac{4}{3}\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^3 \sum_{p=\infty}^{p=1} \frac{1}{A^{2p}} . 2^{3p}(2p+1)(p+1) \frac{1.2.3...(p-1)p.(p+1)}{(6p-1)(6p+1)....(8p-1)}$$

Полученное здѣсь общимъ множителемъ выраженіе

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi y_m^3$$

есть объемъ шара, построеннаго на наибольшемъ поперечномъ сѣченіи (мидельшпангоутѣ); раздѣливъ на этотъ объемъ все выраженіе (53), будемъ имѣть

$$\frac{V}{\frac{4}{3}\pi y_m^3} + 1 = \sum_{p=\infty}^{p=1} \frac{1}{A^{2p}} . 2^{3p}(2p-1)(p+1) \frac{1.2.3....(p-1)(p+1)}{(6p-1)(6p-1)...(8p+1)}$$

значеніе объема, которое легко выразить помощію функцій Γ такимъ образомъ

$$\frac{V}{\frac{3}{4}\pi y_m^3} + 1 = \sum_{p=\infty}^{p=1} \frac{1}{A^{2p}} 2^{2p}(2p+1)(p+1) \frac{\Gamma(p+2).\Gamma(6p-1).\Gamma(4p+1)}{\Gamma(8p+2).\Gamma(3p+1)} 6p$$

или выразивъ приближенно указаннымъ выше пріемомъ (стр. 54) найдемъ

$$\frac{V}{\frac{4}{3}\pi y_m^3}+1=\sqrt{2\pi}\sum_{p=\infty}^{p=1}\frac{(2p+1)(p+1)^2\sqrt{p}}{(6p-1)(8p+1)}\cdot\left(\frac{27}{1024}\right)^p$$

выраженіе мало разнящееся отъ полученнаго для квадратуры.

Сходимость ряда (53) очевидно обусловливается тѣмъ же предѣломъ для A, какъ и сходимость ряда (51), именно, A должно быть больше

$$A>\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Здѣсь слѣдуетъ указать на то, что для $A\div 0$, т. е. для рѣшенія, даннаго Ньютономъ, мы имѣемъ $V=\infty$, т. е. это рѣшеніе даетъ поверхность, заключающую безконечно большой объемъ.

Центръ тяжести разсматриваемой поверхности.

Какъ извѣстно[36]), центръ тяжести поверхности вращенія находится на оси вращенія, въ данномъ случаѣ на оси X-овъ, и опредѣляется координатою

$$x=\frac{\int yxds}{\int yds}$$

Выше мы видѣли (стр. 25), что

$$x=\frac{C_1}{A}\Phi(\omega)-C_2\frac{C_1}{A} \tag{54}$$

а потому

---

[36]) *Брашманъ.* Теорія равновѣсія тѣлъ твердыхъ и жидкихъ. Москва 1837 стр. 173.

William Walton. A collection of problems of theoretical mecanics. London 1876 3 ed. p. 29.

Sturm. Cours de mecanique.

Duhamel. Cours de mecanique и др.

$$x=\frac{C_1}{A}\cdot\frac{\int y\phi(\omega)ds}{\int yds}-C_2\frac{C_1}{A} \qquad (55)$$

Интегралъ, находящійся въ знаменателѣ выраженія (55) былъ опредѣленъ выше (см. стр. 51, 52, 53 и 54), а потому намъ необходимо для отысканія значенія x найти только интегралъ, находящійся въ числителѣ, который для краткости означимъ чрезъ I

$$I=\int y\phi(\omega)ds \qquad (56)$$

Сравнивая выраженіе (54) съ даннымъ выше (на стр. 12) выраженіемъ (13), найдемъ значеніе $\phi(\omega)$ въ такой формѣ

$$\phi(\omega)=-\frac{\sin\omega(A+2\sin\omega\cos\omega)}{A+2\sin^3\omega\cos\omega}+$$

$$+\sum_{n=\infty}^{n=1}(-1)^n\left(\frac{2}{A}\right)^n\int\sin^{3n-2}\omega\cos^{n+1}\omega d\omega$$

Внося это значеніе $\phi(\omega)$ въ выраженіе (56) и замѣтивъ тамъ произведеніе yds чрезъ (см. выше стр. 51)

$$yds=-C_1{}^2\frac{(A+6\sin\omega\cos^3\omega)\cos\omega}{(A+2\sin^3\omega\cos\omega)^3}d\omega$$

получимъ для интеграла I выраженіе

$$I=\left(\frac{C_1}{A}\right)^2[I_1+I_2]$$

гдѣ I_1 и I_2 опредѣляются формулами

$$I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1+\frac{6}{A}\sin\omega\cos^3\omega\right)\left(1+\frac{2}{A}\sin\omega\cos\omega\right)\sin\omega\cos\omega}{\left[1+\frac{2}{A}\sin^3\omega\cos\omega\right]^4}d\omega$$

$$I_2=-\sum_{n=\infty}^{n=1}(-1)^n\left(\frac{2}{A}\right)^n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{1+\frac{6}{A}\sin\omega\cos^3\omega}{\left[1+\frac{2}{A}\sin^3\omega\cos\omega\right]^3}\cos\omega d\omega\int\sin^{3n-2}\omega\cos^{n+1}\omega d\omega$$

Для опредѣленія значенія I_1 разложивъ его подъинтегральную функцію въ рядъ помощію обыкновеннаго дѣленія и проинтегрировавъ первый членъ

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin\omega\cos\omega d\omega=0$$

получимъ для I_1 выраженіе

$$I_1=\sum_{m=\infty}^{m=1}(-1)^m\left(\frac{2}{A}\right)^m\frac{m+1}{1.2.3}\left\{(m+2)(4m+3)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3m+1}\omega\cos^{m+1}\omega d\omega-\right.$$

$$-4(m+2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3m-1}\omega\cos^{m+1}\omega d\omega+$$

$$\left.+3m(m-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3m-3}\omega\cos^{m+3}\omega d\omega\right\}$$

Приведемъ помощію интегрированія первый и третій интегралъ

ко второму, именно

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3m+1}\omega\cos^{m+1}\omega d\omega=\frac{3m}{4m+2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3m-1}\omega\cos^{m+1}\omega d\omega$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3m-3}\omega\cos^{m+3}\omega d\omega=\frac{m+2}{3m-2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3m-1}\omega\cos^{m+1}\omega d\omega$$

Внося эти значенія въ I_1 и соединивъ три интеграла въ одинъ найдемъ

$$I_1=-\sum_{m=\infty}^{m=1}(-1)^m\left(\frac{2}{A}\right)^m\frac{m(m+1)(m+2)(5m-8)}{1.2.3(4m+2)(3m-2)}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3m-1}\omega\cos^{m+1}\omega d\omega$$

Здѣсь m можетъ имѣть какъ четныя такъ и нечетныя значенія; для m четнаго равнаго $m=2r$ имѣемъ

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6r-1}\omega\cos^{2r+1}\omega d\omega=0$$

Для m нечетнаго и равнаго $m=2r-1$ разсматриваемый интегралъ выразится

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6r-4}\omega\cos^{2r}\omega d\omega=\frac{1.3.5...(2r-1).1.3.5...(6r-5)}{2.4.6.8...(8r-6).(8r-4)}\pi$$

и значеніе I_1 принимаетъ видъ

$$I_1=\pi\frac{A}{2}\sum_{r=\infty}^{r=1}\frac{1}{A^{2r}}\cdot\frac{1}{2^{2r-2}}\frac{r(2r-1)(10r-13)}{1.2.3(6r-5)}\cdot\frac{1.3.5..(2r+1)\,1.3.5...(6r-5)}{1.2.3.4...(4r-2).(4r-1)}$$

выраженіе, имѣющее положительное значеніе для всѣхъ величинъ A, пригодныхъ въ практикѣ.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію значенія I_2. Для этого первую подъинтегральную функцію представимъ въ формѣ ряда, выдѣливъ первый членъ, причемъ получимъ (см. выше стр. 52)

$$I_2=-\sum_{n=\infty}^{n=1}(-1)^n\left(\frac{2}{A}\right)^n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\omega d\omega\int\sin^{3n-2}\omega\cos^{n+1}\omega d\omega-$$

$$-\sum_{n=\infty}^{n=1}(-1)^n\left(\frac{2}{A}\right)^n\sum_{n=\infty}^{n=1}(-1)^m\left(\frac{2}{A}\right)^m\frac{m+1}{2}\left\{(4m+2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3m}\omega\cos^{m+1}\omega d\omega\int\sin^{3n-2}\cos^{n+1}\omega d\omega-\right.$$

$$\left.-3m\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3m-2}\omega\cos^{m+1}\omega d\omega\int\sin^{3n-2}\omega\cos^{n+1}\omega d\omega\right\}$$

Но значеніе неопредѣленнаго интеграла, входящаго въ этомъ выраженіи подъ знакъ опредѣленнаго интеграла, при четномъ n и равномъ $n=2p$ можетъ быть представлено формулою

$$\int \sin^{6p-2}\omega\cos^{2p+1}\omega d\omega = \frac{1}{2p+2} \mathop{\mathrm{S}}_{q=p}^{q=0} \frac{(2p+2)2p(2p-2)\ldots(2p-2q+2)}{(8p-1)(8p-3)\ldots.(8p-2q-1)} \sin^{6p-1}\omega\cos^{2p-2q}\omega$$

и при четномъ n равномъ $n=2p-1$ формулою

$$\int \sin^{6p-5}\omega\cos^{2p}\omega d\omega = \frac{1}{6p-4} \mathop{\mathrm{S}}_{q=3(p-1)}^{q=0} \frac{(6p-4)(6p-6)\ldots.(6p-2q-4)}{(8p-5)(8p-7)\ldots.(8p-2q-5)} \sin^{6p-2q-6}\omega\cos^{2p+1}\omega$$

Означивъ для краткости коэффиціенты, входящіе подъ знакъ суммы, первый чрезъ

$$\frac{(2p+2)2p(2p-2)\ldots.(2p-2q+2)}{(8p-1)(8p-3)\ldots.(8p-2q-1)} = (M_q)$$

второй чрезъ

$$\frac{(6p-4)(6p-6)\ldots.(6p-2q-4)}{(8p-5)(8p-7),\ldots(8p-2q-5)} = (N_q)$$

и внося полученныя значенія интеграловъ въ выраженіе для I_2 (стр. 62) найдемъ

$$I_2 = -\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\frac{1}{2p+2}\mathbf{S}_{q=p}^{q=0}(M_q)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p-1}\omega\cos^{2p-2q+1}\omega d\omega - \frac{A}{2}\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\frac{1}{6p-4}\mathbf{S}_{q=3(p-1)}^{q=0}(N_q)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p-2q-6}\omega\cos^{2q+2}\omega d\omega -$$

$$-\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\sum_{m=\infty}^{m=1}(-1)^m\left(\frac{2}{A}\right)^m\frac{m+1}{2(2p+2)}\mathbf{S}_{q=p}^{q=0}(M_q)\left\{(4m+2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p+3m-1}\omega\cos^{m+2p-2q+1}\omega d\omega - 3m\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p+3m-1}\omega\cos^{m+2p-2q+1}\omega d\omega\right\}$$

$$-\frac{2}{A}\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\sum_{m=\infty}^{m=1}(-1)^m\left(\frac{2}{A}\right)^m\frac{m+1}{2(6p-4)}\mathbf{S}_{q=3(p-1)}^{q=0}(N_q)\left\{(4m+2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p+3m-2q-6}\omega\cos^{m+2p+2}\omega d\omega - 3m\int\sin^{6p+3m-2q-8}\omega\cos^{m+2p+2}\omega d\omega\right\}$$

Сдѣлавъ въ двухъ послѣднихъ членахъ упрощенія, одинаковыя съ указанными (см. выше стр. 52,56), а также вспомнивъ, что первый интегралъ имѣющій нечетные показатели при $\sin\omega$ и $\cos\omega$, равенъ

нулю, найдемъ (сравн. выше стр. 28)

$$I_2 \doteq -\frac{A}{2}\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\frac{1}{6p-4}\mathop{\mathbf{S}}_{q=3(p-1)}^{q=0}(N_q)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p-2q-6}\omega\cos^{2p+2}\omega d\omega -$$

$$-\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\sum_{m=\infty}^{m=1}(-1)^m\left(\frac{2}{A}\right)^m\frac{m+1}{2(2p+2)}\mathop{\mathbf{S}}_{q=p}^{q=0}(M_q)\frac{6p-m-2+3mq}{2m+4p-q}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p+3m-1}\omega\cos^{m+2p-2q+1}\omega d\omega +$$

$$+\frac{A}{2}\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\sum_{m=\infty}^{m=1}(-1)^m\left(\frac{2}{A}\right)^m\frac{m+1}{2(6p-4)}\mathop{\mathbf{S}}_{q=3(p-1)}^{q=0}(N_q)\frac{5m+mq+2q-6p+7}{4p+2m-q-2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p+3m-2q-8}\omega\cos^{m+2p+2}\omega d\omega$$

Изслѣдуя два послѣдніе изъ только что приведенныхъ интеграловъ для различныхъ значеній m, найдемъ, что при m четномъ и равномъ $m=2r$ первый интегралъ будетъ имѣть нечетные показатели $\sin\omega$ и $\cos\omega$, а потому уничтожится, т. е. равняется нулю, между тѣмъ какъ второй интегралъ при $m=2r$ имѣетъ при $\sin\omega$ и $\cos\omega$ четные показатели, а потому получаетъ опредѣленное значеніе. Наоборотъ при

m нечетномъ и равномъ $m=2r-1$ первый изъ разсматриваемыхъ интеграловъ получаетъ опредѣленное значеніе, а второй равняется нулю. Поэтому значеніе I_2 можетъ быть представлено въ такомъ видѣ

$$I_2=-\frac{A}{2}\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\frac{1}{6p-4}\mathbf{S}_{q=3(p-1)}^{q=0}(N_q)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p-2q-6}\omega\cos^{2p+2}\omega d\omega+$$

$$+\frac{A}{2}\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\sum_{r=\infty}^{r=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2r}\frac{r}{2p+2}\mathbf{S}_{q=p}^{q=0}(M_q)\frac{6p+6rq-2-3rq-3}{4+4rp-q-2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p+6r-6}\omega\cos^{2r+2p-2q}\omega d\omega+$$

$$+\frac{2}{A}\sum_{p=\infty}^{p=0}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\sum_{r=\infty}^{r=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2r}\frac{2r+1}{2(6p-4)}\mathbf{S}_{p=3(p-1)}^{q=0}(N_q)\frac{10r+2rq+2q-6p+7}{4r+4p-q-2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p+6r-2q-8}\omega\cos^{2r+2p+2}\omega d\omega$$

Не трудно видѣть, что ряды, выражающіе I_1 и I_2 будутъ сходящимися для тѣхъ же величинъ A, которыя были указаны выше для сходимости рядовъ, выражающихъ квадратуру и объемъ поверхности.

Означивъ для краткости интегралъ, находящійся въ знаменателѣ выраженія для координаты центра тяжести x чрезъ I_3, найдемъ

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} yds = I_3 = 4\left(\frac{C_1}{A}\right)^2\Big\{-1+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\frac{(2p+1)(p+1)}{8p+1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{3}}\sin^{6p-2}\omega\cos^{2p+1}\omega d\omega\Big\}\,.$$

выраженіе, какъ извѣстно, положительное.

На основаніи вышеизложеннаго положеніе центра тяжести опредѣляется координатою

$$x=\frac{C_1}{A}\left\{\frac{I_1+I_2}{I_3}-C_2\right\}\quad,$$

гдѣ значенія для I_1 и I_2 были указаны выше.

Моментъ инерціи разсматриваемой поверхности.

Моментъ инерціи поверхности вращенія по отношенію къ ея оси опредѣляется, какъ извѣстно [39]), интеграломъ

$$M=2\pi\int y^3ds$$

Внося въ это выраженіе значенія y^2 и yds для разсматриваемой поверхности, получимъ

$$M=-2\pi C_1^4\int_{-1}^{+1}\frac{6u(\sqrt{1-u^2})^3+A}{[2u^3\sqrt{1-u^2}+A]^5}(1-u^2)du$$

Раздѣливъ числителя и знаменателя этого выраженія на A^5

[39]) *Hoüel.* Calcul infinitésimal, Tom II, pag. 262.

затѣмъ замѣнивъ u чрезъ $\sin\omega$ и разложивъ въ рядъ помощію дѣленія найдемъ, сдѣлавъ предварительно упрощенія, одинаковыя съ вышеуказанными (стр. 45) а также совершивъ интеграцію перваго члена

$$M=-\frac{8}{3}\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^4+$$

$$+2\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^4\sum_{n=\infty}^{n=1}(-1)^n\left(\frac{2}{A}\right)^n\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4(4n+3)}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3n-2}\omega\cos^{n+2}$$

Здѣсь n можетъ имѣть какъ четныя, такъ и нечетныя значенія, для n нечетнаго, равнаго $n=2p-1$ интегралъ

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p-5}\omega\cos^{2p+2}\omega d\omega=0$$

обращается въ нуль; для n четнаго, равнаго $n=2p$ интегралъ имѣетъ опредѣленное значеніе, а потому получимъ

$$M=-\frac{8}{3}\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^4+$$

$$+\frac{8}{3}\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^4\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\frac{(p+1)(p+2)(2p+1)(2p+3)}{8(8p+3)}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p-2}\omega\cos^{2p+2}$$

Но мы знаемъ, что моментъ инерціи шаровой поверхности по отношенію къ его діаметру, совпадающему съ направленіемъ оси X-овъ, есть

$$\frac{8}{3}\pi R^4=\frac{8}{3}\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^4=\frac{8}{3}\pi y_m{}^4$$

Раздѣливъ на это выраженіе предыдущую формулу и внося значеніе интеграла, получимъ

$$\frac{M}{\frac{8}{3}\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^4}+1=$$

$$=\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\frac{(p+1)(p+2)(2p+1)(2p+3)}{4(8p+3)}\cdot\frac{(2p+2)2p(2p-2)\dots 4.2}{(8p+1)(8p-1)\dots(6p-1)}$$

выраженіе для момента инерціи разсматриваемой поверхности, которое можно представить въ такомъ видѣ

$$M=k_8(m)\quad,$$

гдѣ m есть моментъ инерціи шаровой поверхности, построенной на наибольшемъ поперечномъ (миделевомъ) сѣченіи.

Опредѣленіе сопротивленія для разсматриваемой поверхности.

Интегралъ, выражающій сопротивленіе, какъ было указано выше (стр. 7) есть

$$P=2\pi\rho v^2k\int_{-1}^{+1}yu^3ds\quad;$$

внося въ это выраженіе значеніе yds, получимъ

$$P=-2\pi\rho v^2kC_1{}^2\int_{-1}^{+1}\frac{6u(\sqrt{1-u^2})^3+A}{[2u^3\sqrt{1-u^2}+A]^3}u^3du$$

Раздѣливъ числителя и знаменателя подъинтегральной функціи на A^3, замѣнивъ потомъ u чрезъ $\sin\omega$ и разложивъ въ рядъ помощію дѣленія, получимъ, сдѣлавъ предварительно подобныя вышеприведеннымъ упрощенія (выше стр. 12)

$$P=-2\pi\rho v^2k\left(\frac{C_1}{A}\right)^2\sum_{n=\infty}^{n=1}(-1)^n\left(\frac{2}{A}\right)^n\frac{n+2}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{3n+1}\omega\cos^{n+1}\omega d\omega \qquad (57)$$

такъ какъ первый членъ, выражающійся интеграломъ

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^3\omega\cos\omega d\omega=0$$

ровенъ нулю. Въ выраженіи (57) значеніе n можетъ быть четное и нечетное. При n четномъ, равномъ $n=2p$, показатели при $\sin\omega$ и $\cos\omega$ подъинтегральной функціи (57) имѣютъ нечетныя значенія, а потому интегралъ

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p+1}\omega\cos^{2p+1}\omega d\omega=0$$

вообще равенъ нулю. При n нечетномъ равномъ $n=2p-1$, интегралъ выраженія (57) получаетъ четные показатели при $\sin\omega$ и $\cos\omega$, а потому опредѣленное значеніе именно

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p-2}\omega\cos^{2p}\omega d\omega=\frac{p}{2^{4p-3}}\cdot\frac{1.3.5...(2p-1)...1.3.5...(6p-3)}{1.2.3.4....(4p-1)\,4p}\pi$$

Сопротивленіе P при такихъ условіяхъ выразится въ формѣ

$$P=2\pi\rho v^2k\left(\frac{C_1}{A}\right)^2.A\sum_{p=\infty}^{p=1}\left(\frac{2}{A}\right)^{2p}\frac{2p+1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{6p-2}\omega\cos^{2p}\omega d\omega$$

или въ такомъ видѣ

$$P=2\pi p v^2 k.\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^2.A\sum_{p=\infty}^{p=1}\frac{1}{A^{2p}}.\frac{p}{2^{2p}}.\frac{1.3.5...(2p+1).1.3.5...(6p-3)}{1.2.3.4...(4p-1).4p}$$

выраженія, при помощи которыхъ можно вычислять сопротивленіе на поверхность при данномъ значеніи A.

Значеніе сопротивленія P можетъ быть представлено помощію функцій Γ такимъ образомъ

$$P=2\pi p v^2 k.\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^2.A\sum_{p=\infty}^{p=1}\frac{1}{A^{2p}}.\frac{1}{2^{6p}}.\frac{\Gamma(2p+2).\Gamma(6p-2)}{\Gamma(p).\Gamma(3p-1).\Gamma(4p)}$$

а также въ приближенной формѣ, подобной даннымъ выше (стр. 30, 54).

Выведемъ теперь условія сходимости ряда, выражающаго сопротивленіе P. Для этого возьмемъ отношеніе его $p+1$ члена къ p члену, которое выразится такъ

$$\frac{1}{A^2}.\frac{1}{2^2}.\frac{(2p+3)(6p-1)(6p+1)(6p+3)}{(4p+1)(4p+2)(4p+3)(4p+4)}$$

раздѣливъ числителя и знаменателя этого выраженія на p^4 и положивъ $p=\infty$, получимъ

$$\frac{1}{A^2}.\frac{1}{4}.\frac{2.6.6.6}{4.4.4.4}=\frac{1}{A^2}\left(\frac{3}{4}\right)^3$$

Для сходимости ряда, выражающаго сопротивленіе, необходимо

$$\frac{1}{A^2}\left(\frac{3}{4}\right)^3<1 \quad \text{или} \quad A>\frac{3\sqrt{3}}{8} \quad \text{и} \quad A>0,64951787407...$$

тоже самое предѣльное значеніе для A, которое неоднократно получалось выше.

Въ выраженіи для сопротивленія P, а также и въего видоизмѣненія, входитъ множителемъ

$$\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^2=\pi y_m{}^2=\otimes$$

т. е. площадь наибольшаго поперечнаго сѣченія (мидельшпангоута); значеніе для сопротивленія P можетъ быть вообще представлено въ такомъ видѣ

$$P=K.\otimes.v^2 \tag{58}$$

гдѣ K означаетъ выраженіе

$$K=2\pi\rho kA\sum_{p=\infty}^{p=1}\frac{1}{A^{2p}}.\frac{p}{2^{2p}}.\frac{1.3.5...(2p+1).1.3.5...(6p-3)}{1.2.3.4....(4p-1).4p}$$

и имѣетъ для каждой данной поверхности, опредѣляемой параметромъ A, постоянную величину.

Выраженіе (58) по своей формѣ одинаково съ тѣми, которыя обыкновенно употребляются въ корабельной архитектурѣ для вычисленія сопротивленія воды на корабль, причемъ вмѣсто погруженной (подводной) поверхности корабля, берется площадь его наибольшаго поперечно вертикальнаго сѣченія (площадь $\otimes$ мидельшпангоута).

Чтобы точнѣе прослѣдить зависимость, существующую между сопротивленіемъ P и параметромъ A, возьмемъ отъ P первую производную по A именно

$$\frac{dP}{dA}=-2\pi\rho v^2k.\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^2.\sum_{p=\infty}^{p=1}\frac{1}{A^{2p}}.\frac{p(2p-1)}{2^{2p}}.\frac{1.3.5...(2p+1).1.3.5...(6p-3)}{1.2.3.4....(4p-1).4p}$$

выраженіе, которое не можетъ сдѣлаться нулемъ ни для какихъ конечныхъ величинъ A, слѣдовательно P неимѣетъ ни

maximum ни minimum, зависящихъ отъ A. Кромѣ того первая производная отъ P по A имѣетъ всегда отрицательную величину для какихъ бы то нибыло значенiи A, а потому сопротивленiе P возрастаетъ съ уменьшенiемъ численнаго значенiя A и наоборотъ уменьшается съ увеличенiемъ численнаго значенiя A, что впрочемъ можно видѣть и непосредственно.

Съ другой стороны сравнивая значенiе 2Π или продольнаго сѣченiя, заданiемъ котораго опредѣляется вмѣстимость искомой поверхности съ выраженiемъ для сопротивленiя P, нетрудно видѣть, что съ уменьшенiемъ A продольное сѣченiя 2Π, а съ нимъ и объемъ, возрастаютъ быстрѣе, чѣмъ сопротивленiе P. Дѣйствительно представивъ данное выше (стр. 28) значенiе 2Π въ такомъ видѣ

$$2\Pi+\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^2=2\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^2\sum_{p=\infty}^{p=1}\frac{1}{A^{2p}}\frac{p}{2^{2p}}.\frac{1.3.5...(2p+1).1.3.5...(6p-3)}{1.2.3.4...(4p-1).4p}+$$

$$+\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^2\sum_{p=\infty}^{p=1}\frac{1}{A^{2p}}.\frac{1}{2^{2p}}.\frac{1.3.5...(2p+1).1.3.5...(6p-3)}{1.2.3.4...(4p-1)4p}$$

можемъ значенiе для 2Π написать такъ

$$2\Pi+\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^2=\frac{P}{\pi\rho v^2k}.\frac{1}{A}+$$

$$+\pi\left(\frac{C_1}{A}\right)^2\sum_{p=\infty}^{p=1}\frac{1}{A^{2p}}.\frac{1}{2^{2p}}.\frac{1.3.5...(2p+1).1.3.5...(6p-3)}{1.2.3.4....(4p-1).4p}$$

выраженiе, показывающее, что, при уменьшенiи A, 2Π быстрѣе возрастаетъ, чѣмъ P, иначе сказать, объемъ быстрѣе увеличивается, чѣмъ сопротивленiе.

VI.

Изложеніе Ньютонова рѣшенія задачи о поверхности наименьшаго сопротивленія.

Выше, въ предисловіи, было упомянуто, что вопросъ о поверхности наименьшаго сопротивленія былъ поставленъ Ньютономъ и былъ имъ же рѣшенъ въ его Philosophiae naturalis principia mathematica. Сочиненіе это, одно изъ важнѣйшихъ произведеній Ньютона, было издано при его жизни три раза. Первое изданіе вышло въ 1686 году[40]), второе относится къ 1713 году[41]) и третье отмѣчено на заглавномъ листѣ 1726 годомъ[42]). Задача о поверхности наименьшаго сопротивленія находится и рѣшена во всѣхъ трехъ изданіяхъ въ одномъ и томъ же мѣстѣ, именно—въ scholium къ предложенію 34 второй книги, посвященной главнымъ образомъ изслѣдованію движенія тѣлъ въ сопротивляющихся средахъ. Предложеніе 34 заключается въ слѣдующемъ:

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXVIII

«*Si globus et cylindrus aequalibus diametris descripti, in medio raro ex particulis aequalibus et ad aequales ab invicem distantias libere dispositis constante secundum*

[40]) Предисловіе помѣчено: Cantabrigiae. Maii 8, 1686.

[41]) Предисловіе помѣчено Londini. Mar. 28, 1713.

[42]) Предисловіе помѣчено: Londini. Jan. 12, 1725—26.

plagam axis cylindri, aequali cum velocitate moveantur: erit resistentia globi duplo minor quam resistentia cylindri».

Въ переводѣ:

Если въ жидкой средѣ, состоящей изъ равныхъ частицъ, въ равномъ взаимномъ разстояніи свободно расположенныхъ, движутся съ одинаковой скоростію шаръ и цилиндръ равныхъ діаметровъ вдоль по направленію оси цилиндра, то сопротивленіе шара будетъ вдвое меньше, чѣмъ сопротивленіе цилиндра.

Доказавши это предложеніе Ньютонъ даетъ scholium, начинающійся такимъ образомъ:

Eadem methodo figurae aliae inter se quoad resistentiam comparari possunt, eaeque inveniri quae ad motus suos in mediis resistentibus continuandos aptiores sunt.

Въ переводѣ:

«Тѣмъ же пріемомъ могутъ быть сравниваемы между собою относительно сопротивленія и другія формы, а также могутъ быть отыскиваемы тѣ изъ нихъ, которыя наиболѣе способны къ продолженію движенія въ сопротивляющихся средахъ» т. е. испытываютъ наименьшее сопротивленіе. При этомъ Ньютонъ указываетъ, что усѣченный конусъ имѣетъ наименьшее сопротивленіе въ томъ случаѣ, когда производящая наклонена къ оси подъ угломъ 45°, или имѣетъ при вершинѣ уголъ въ 90°, или же, наконецъ, уголъ, составляемый производящею съ меньшимъ сѣченіемъ, равенъ 135°. Изъ этого слѣдуетъ, что если къ эллиптической или овальной формѣ придать описанный усѣченный конусъ съ передней стороны такъ, чтобы производящая, касательная къ данной формѣ, была наклонена къ сѣченію подъ угломъ въ 135°, то съ этимъ придаткомъ форма будетъ испытывать меньшее сопротивленіе, чѣмъ въ первоначальномъ видѣ. Quam quidem propositionem in construendis navibus non inutilem ſuturam esse censeo.

т. е, «думаю», пишетъ Ньютонъ, «что это предложеніе будетъ очень не безполезно для постройки кораблей».

Разсматриваемый scholium заключается слѣдующими словами

Quod si figura *DNFG* ejusmodi sit curva, ut si ab ejus puncto quovis *N* ad axem *AB* demittatur perpendiculum *NM*, & a puncto dato *G* ducatur recta *GR* quae parallela sit rectae figuram tangenti in *N*, & axem productum secet in *R*, fuerit *MN* ad *GR* ut *GRcub* ad $4BR \times GBq$; solidum quod figurae hujus revolutione circa axem *AB* facta describitur, in medio raro praedicto ab *A* versus *B* movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eadem longitudine & latitudine descriptum solidum circulare.

Въ переводѣ:

«Для того, чтобы такая фигура *DNFG* была криволинейною, необходимо, чтобы, если опустить изъ какой либо ея точки *N* на ось *AB* перпендикуляръ *MN* и въ данной (произвольно взятой) точкѣ *G* провести прямую *GR* параллельную касательной къ разсматриваемой фигурѣ (кривой) въ точкѣ *N* и пересѣкающую ось *AB* въ точкѣ *R*, то *MN* будетъ относиться къ *GR*, какъ *GRкуб.* къ $4BR \times GB$*кв.*; тѣло, производимое вращеніемъ такой кривой около оси *AB*, при движеніи отъ *A* къ *B* въ упомянутой выше жидкой средѣ, имѣетъ наименьшее сопротивленіе, чѣмъ всякое другое тѣло вращенія такой же длины и ширины».

Такимъ образомъ принятый Ньютономъ методъ для рѣшенія разсматриваемой задачи есть синтетическій. Доказавши, что шаръ испытываетъ вдвое меньшее сопротивленіе, чѣмъ цилиндръ, слѣдовательно, частный случай, Ньютонъ указываетъ, что этимъ пріемомъ можно пользоваться и въ общемъ случаѣ т. е. при сравненіи различныхъ формъ относительно сопротивленія. Понятно, что сравнивая различныя формы по отношенію къ сопротивленію, можно найти свойства, отличающія тѣ изъ нихъ,

которыя имѣютъ наименьшее сопротивленіе. И въ рѣшеніи этого вопроса Ньютонъ шелъ строго синтетическимъ путемъ, отыскивая сначала между формами одного семейства, именно усѣченныхъ конусовъ, ту изъ нихъ, которая испытываетъ меньшее сопротивленіе. Оказалось при этомъ, что въ усѣченномъ конусѣ наименьшаго сопротивленія производящая должна составлять съ меньшимъ сѣченіемъ уголъ въ 135°. Провѣрить этотъ выводъ аналитически не трудно помощію обыкновеннаго пріема диффеpенціальнаго исчисленія для отысканія maximum и minimum [43]). Далѣе, какъ мы видѣли, Ньютонъ указываетъ, что усѣченный конусъ наименьшаго сопротивленія можетъ служить для уменьшенія сопротивленія и въ криволинейныхъ формахъ. Только послѣ такихъ указаній Ньютонъ считаетъ синтезъ достаточно яснымъ и даетъ въ видѣ пропорціи свойство кривой, образующей при вращеніи тѣло наименьшаго сопротивленія. Большинство вопросовъ, разсматриваемыхъ Ньютономъ въ его Principia, изложены только что указаннымъ синтетическимъ методомъ, къ которому Ньютонъ, по словамъ Лапласа [44]), вѣроятно, имѣлъ пристрастіе, какъ къ любимому методу древнихъ греческихъ геометровъ. При этомъ Ньютонъ въ изложеніи своихъ Principia какъ бы избѣгаетъ формулъ и связаннаго съ ними аналитическаго метода [45]). Эти обстоятельства сдѣлали то, что уже въ первой половинѣ прошедшаго столѣтія являлись изданія Ньютона съ комментаріями, въ которыхъ частію давались рѣшенія разсматриваемыхъ Ньютономъ вопросовъ путемъ аналитическимъ, частію облекался въ формулы его

---

[43]) *Wolfers.* Sir Icaac Newton's mathematische Principien der Naturlehre. Berlin 1872. S. 609 № 170.

[44]) *Laplace.* Traité de mecanique céleste. Paris 1882. Tom V, pag. 393.

[45]) *Laplace.* Ibid pag. 393.

Въ первомъ изданіи Principia въ scholium къ предложенію 35 третьей книги Ньютонъ по вопросу о движеніи апогея лунной орбиты употребляетъ слѣдующее не совсѣмъ гармонирующее съ математическимъ сочиненіемъ выраженіе, котораго, правда, нѣтъ въ дальнѣйшихъ изданіяхъ: «я не привожу здѣсь относящихся сюда вычисленій, потому что они слишкомъ запутаны и переполнены приближеніями».

синтетическій методъ [46]). Дѣйствительно, аналитическій методъ ведетъ скорѣе и, пожалуй, безошибочнѣе къ цѣли, онъ болѣе удобенъ въ своемъ приложеніи, такъ какъ при его употребленіи «за насъ думаютъ символы» [47]); но путь синтетическій имѣетъ свои преимущества: онъ изященъ и доступенъ; имъ пользовалось человѣчество при первоначальныхъ своихъ изслѣдованіяхъ, хотя въ приложеніи его необходимо быть крайне осмотрительнымъ, чтобы избѣжать ошибочныхъ выводовъ. Послѣднее обстоятельство является причиною тому недовѣрію, съ какимъ нерѣдко математики относятся къ синтетическому методу, который притомъ же часто очень трудно и отыскать для рѣшенія даннаго вопроса. Вотъ что пишетъ о синтезѣ Whewell [48]): «Тяжеловѣсное орудіе синтеза, которое въ рукахъ Ньютона было столь сильно и плодотворно, съ тѣхъ поръ никѣмъ не употребляется съ успѣхомъ для той же цѣли; и мы съ удивленіемъ и любопытствомъ смотримъ на это орудіе, какъ на какое то исполинское, которое стоитъ безъ употребленія между памятниками древности, и съ удивленіемъ спрашиваемъ, что это былъ за человѣкъ, который могъ владѣть этимъ орудіемъ до того тяжелымъ, что мы едва можемъ поднять его». Далѣе. «Преемники Ньютона въ ближайшемъ поколѣніи отказались отъ всякой надежды сравняться съ нимъ въ этой напряженности умственныхъ усилій [49])..... Даже его соотечественники, хотя они долго держались синтетическаго метода, отвергая аналитическій, тѣмъ неменѣе не произвели ничего, что̀ могло бы сравниться съ изслѣдованіями Ньютона или подвинуть ихъ далѣе»

Впрочемъ кромѣ Ньютона его современники пользовались удачно синтетическимъ методомъ, въ особенности при изслѣдованіи

[46]) Для примѣра можно указать на изданіе маркизы du Châtelet.
La marquise *du Châtelet*. Traduction française des *Principia Newtoni*. Paris 1759. Supplements.

[47]) *Whewell*. History of the Inductive Sciences. T. II. Chapt. II. § 4.

[48]) *Whewell*. Ibid.

[49]) *Laplace*. Traité de mecanique céleste. Tom V pag. 394.

вопросовъ такого рода, гдѣ анализъ того времени приводилъ къ крайне сложнымъ комбинаціямъ, вычисленіямъ и формуламъ: не будь синтеза многія задачи слишкомъ опоздали бы въ своемъ рѣшеніи. Въ подтвержденіе только что сказавнаго можно указать на исторію въ концѣ XVII и въ началѣ XVIII столѣтій вопросовъ о maximum и minimum, требующихъ приложенія варіаціоннаго исчисленія, такъ называемыхъ questions célèbres того времени, и въ частности, напримѣръ, на особенно извѣстную и сдѣлавшую въ свое время много шума задачу Іоанна Бернулли о брахистохронѣ: problema novum ad cujus solutionem mathematici invitantur [50]). Задачи эти, рѣшаемыя съ особымъ трудомъ помощію синтеза математиками того времени, въ настоящее время, при развитіи аналитическихъ методовъ, не представляютъ ни малѣйшаго затрудненія и служатъ лишь примѣрами въ учебникахъ варіаціоннаго исчисленія, гдѣ легко и просто рѣшаются.

Тоже самое можно сказать и относительно разсматриваемой здѣсь задачи Ньютона о поверхности наименьшаго сопротивленія, которая, при настоящемъ состояніи анализа, рѣшается крайне просто и не встрѣчаетъ ни малѣйшаго затруд-

---

[50]) Acta Eruditorum 1696.

Задача эта собственно принадлежитъ Галилею и имъ же рѣшена синтетическимъ методомъ не точно, такъ какъ вмѣсто циклоиды для брахистохроны между двумя точками имъ указана дуга круга.

Интересный примѣръ синтетическаго метода находится у *Guldin* въ его Centrobaryca, Viennae 1640, именно въ выводѣ извѣстныхъ приписываемыхъ ему *), теоремъ о квадратурѣ и объемѣ поверхностей вращенія. Получивъ эти теоремы синтетическимъ путемъ, Guldin счелъ нужнымъ привести прямое доказательство въ такомъ родѣ: разстояніе центра тяжести отъ оси вращенія есть среднее для всѣхъ разстояній различныхъ частей фигуры отъ оси и такая точка только одна; поэтому, если какая либо точка должна имѣть указанныя свойства (по отношенію къ опредѣленію квадратуръ и объемовъ поверхностей вращенія), то нѣтъ сомнѣнія, что это долженъ быть центръ тяжести. И въ тоже время мнѣ не удалось встрѣтить указаній на то, что Guldin далъ теоремы безъ доказательства.

---

*) Теоремы эти принадлежатъ *Pappus* и первый разъ явились въ его Mathematical collections 1588.

нія[51]). Въ тоже время для рѣшенія этой задачи синтетическимъ путемъ, какъ мы видѣли, Ньютонъ долженъ былъ сдѣлать цѣлый рядъ положеній, изъ которыхъ доказавши первое, онъ указалъ на послѣдующія, какъ необходимыя звѣнья полнаго синтеза,—обстоятельство, вѣроятно, послужившее поводомъ утверждать, какъ увидимъ впослѣдствіи, что Ньютонъ привелъ рѣшеніе задачи, не указавъ пути.

Первое изданіе Principia Ньютона, какъ выше указано, появилось въ 1686 году. Время это, именно конецъ XVII и начало XVIII столѣтій, характеризуется, какъ время вопросовъ на maximum и minimum, важность значенія которыхъ вполнѣ опредѣлилась, равно какъ была уже понята и возможность ихъ рѣшенія. Тѣмъ не менѣе исчисленіе безконечно малыхъ, которое одно въ состояніи рѣшать эти вопросы всецѣло, едва только начинало выясняться, и предлагаемыя задачи рѣшались самыми разнообразными пріемами. Помѣщенная въ вышедшихъ въ 1686 г. Principia Ньютона задача о производимой вращеніемъ поверхности наименьшаго сопротивленія, какъ задача такого рода, на которыхъ сосредоточивается интересъ времени, обратила на себя вниманіе. Изложеннымъ выше ея синтетическимъ рѣшеніемъ неудовольствовались и начали прилагать анализъ къ ея изслѣдованію. Въ 1699 году т. е. 13 лѣтъ спустя послѣ выхода въ свѣтъ Principia математикъ того времени Fatio далъ рѣшеніе Ньютоновой задачи аналитическимъ путемъ, но рѣшеніе это было далеко не полное, такъ какъ получалось лишь выраженіе радіуса развертки искомой кривой, дающей при вращеніи поверхность наименьшаго сопротивленія. Притомъ же путь рѣшенія былъ на столько сложенъ и запутанъ, что извѣстный математикъ того времени маркизъ de l'Hôpital, которому былъ присланъ одинъ экземпляръ

[51]) *Брунъ*. Руководство къ варіаціонному исчисленію. Одесса, 1848. стр. 126, § 56.

Todhunter. A treatise on the integral calculus. London 1880. Pag. 394 No 20.

записки Fatio, нашелъ болѣе удобнымъ самъ искать рѣшенія, чѣмъ слѣдовать автору въ его темномъ и запутанномъ пути [52]). Кромѣ того было основаніе полагать, что и самый пріемъ рѣшенія былъ неправильный. Маркизъ de l'Hôpital нашелъ аналитическое рѣшеніе задачи, которое давало возможность построить непосредственно самую кривую, а также получить и свойство, данное Ньютономъ для ея опредѣленія. Также точно неудовлетворенный рѣшеніемъ Fatio Іоаннъ Бернулли далъ свое рѣшеніе, близкое къ рѣшенію маркиза de l'Hôpital'я. Послѣ этого въ 1701 году [53]), затѣмъ въ 1713 году [54]) и самъ Fatio далъ полныя и простыя рѣшенія разсматриваемой задачи, которая послѣ этого уже можетъ считаться вполнѣ рѣшенною и путемъ аналитическимъ.

«Кривая», пишетъ Montucla въ своей исторіи математики [55]), «производящая тѣло наименьшаго сопротивленія, имѣетъ нѣкоторыя достойныя примѣчанія особенности. Во первыхъ она не беретъ начало въ данной вершинѣ A, какъ можно было-бы безъ сомнѣнія ожидать; она всегда начинается въ нѣкоторой точки B, удаленной отъ точки A на извѣстное количество AB...», т. е. кривая не пересѣкаетъ оси вращенія. Затѣмъ Montucla говоритъ о томъ, что поверхность наименьшаго сопротивленія не смыкается въ передней части и раскрыта совершенно въ кормовой. Кромѣ того въ началѣ A кривая имѣетъ точку возврата. Только что указанное обстоятельство, именно, что кривая даетъ даже и въ передней части несмыкающуюся поверхность, произвело то, что, какъ указано выше, въ предисловіи, рѣшеніе это не имѣло особаго практическаго значенія и перешло какъ примѣръ, въ курсы варіаціоннаго исчисленія.

---

[52]) *Montucla.* Histoire des Mathématiques. Tom. II. Paris an VII. Pag. 480.

[53]) Acta Eruditorum 1701.

[54]) Philosophical Transactions 1713.

[55]) *Montucla* Ibid. Pag. 481.

Лакруа во второмъ томѣ своего пространнаго курса диференціальнаго и интегральнаго исчисленія [56]), приводя рѣшеніе Ньютоновой задачи о поверхности наименьшаго сопротивленія, указываетъ на то, что неизвѣстно, какимъ путемъ рѣшилъ эту задачу Ньютонъ. Тоже самое мы находимъ у Пуассона во второмъ томѣ его извѣстнаго курса механики [57]). Такого рода отзывъ о рѣшеніи Ньютона вызванъ, вѣроятно, тѣмъ обстоятельствомъ, что Ньютонъ указалъ только, какъ мы видѣли, путь синтетическій для рѣшенія задачи, который, впрочемъ, безъ особаго труда можетъ быть облеченъ въ формулы и пріемами одной элементарной геометріи изъ приведенной выше доказанной Ньютономъ теоремы о сравненіи сопротивленія шара съ сопротивленіемъ цилиндра, съ присоединеніемъ къ ней общихъ положеній его теоріи сопротивленія, можетъ быть получена данная имъ пропорція для опредѣленія искомой кривой [58]).

Въ учебникѣ варіаціоннаго исчисленія Бруна [59]) точно также приведена задача Ньютона о поверхности наименьшаго сопротивленія, о рѣшеніи которой сказано, что «Ньютонъ построилъ эту кривую изъ дифференціальнаго ея уравненія, скрывъ отъ насъ путь, по которому онъ дошелъ до этого уравненія».

---

[56]) *Lacroix*. Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, 2 édit Paris, 1814. Tom. II, Pag. 791, § 867.

[57]) *Poisson*. Traté de mécanique. 2 édit. Paris 1833. Tom. II, pag. 40.
Здѣсь необходимо указать на то обстоятельство, что первое изданіе механики Пуассона вышло въ 1811 году, между тѣмъ какъ изданіе Lacroix, на которое указываетъ предыдущая выноска, относится къ 1814 году и въ немъ въ числѣ источниковъ по составленію указана и механика Пуассона. Такимъ образомъ кому, Lacroix или Poisson'у, принадлежитъ первоначальный отзывъ о неуказаніи Ньютономъ пути рѣшенія разсматриваемой задачи мнѣ опредѣлить не удалось, такъ какъ и механики Пуассона и курса Лакруа въ моемъ распоряженіи были лишь вторыя изданія.

[58]) *Wolfers*. Sir Scaac Newton's mathematische Principien der Naturlehre. Berlin 1872. S. 610 No 171.

Въ примѣчаніи No 171 указанъ путь для полученія помощію пріемовъ элементарной геометріи данной Ньютономъ пропорціи для опредѣленія кривой, образующей при вращеніи тѣло наименьшаго сопротивленія.

[59]) *Брунъ*. Руководство къ варіаціонному исчисленію. Одесса 1848. Стр. 184, § 87.

Такого рода отзывъ кромѣ несправедливости относительно неуказанія Ньютономъ пріёма рѣшенія задачи, еще содержитъ неточность касательно пропорціи, данной имъ для опредѣленія кривой,—пропорціи, которая, какъ выше указано, представляетъ свойство касательной [60]).

Въ упомянутомъ здѣсь въ предисловіи прекрасномъ сочиненіи проф. Д. И. Менделѣева о сопротивленіи жидкостей [61]) въ приложеніяхъ находится статья Н. Θ. Іорданскаго (приложеніе I стр. 1—14), которая посвящена изложенію Ньютоновой теоріи сопротивленія и составлена по Principia, а также приведена (приложеніе II стр. 18) и задача о поверхности наименьшаго сопротивленія, причемъ сказано:

«Ньютонъ первый далъ рѣшеніе этой задачи, неоткрывая, однако, способа, какимъ онъ пришелъ къ этому рѣшенію. Свойства производящей кривой онъ выражаетъ слѣдующимъ образомъ.

Въ точкѣ *B*, *гдѣ кривая пересѣкаетъ ось*, возставимъ перпендикуляръ...».

Изъ приведенныхъ выше подлинныхъ словъ Ньютона не видно, что-бы онъ упоминалъ объ указываемой здѣсь точкѣ пересѣченія кривой съ осью. Напротивъ, есть основаніе полагать [62]), что Ньютону было извѣстно о томъ, что кривая не доходитъ до оси

---

[60]) *Montucla.* Ibid. pag 480, гдѣ сказано, что Ньютонъ рѣшилъ задачу, en donnant une propriété de cette courbe, savoir celle de sa tangente, что, впрочемъ, мы увидимъ еще ниже.

[61]) Д. И. *Мендълеев.* О сопротивленіи жидкостей и о воздухоплаваніи. СПБ. 1880. Вып. I.

[62]) Чертежъ, данный Ньютономъ въ формѣ эллипсиса, дѣйствительно пересѣкаетъ ось въ двухъ точкахъ *A* и *B*, но объ этихъ точкахъ пересѣченія Ньютонъ упоминаетъ лишь до тѣхъ поръ, пока указываетъ, что описанный усѣченный конусъ, будучи приданъ къ овальной формѣ въ передней части, уменьшаетъ сопротивленіе. Но какъ только Ньютонъ начинаетъ говорить о кривой наименьшаго сопротивленія, сейчасъ же точки пересѣченія *A* и *B* пропадаютъ, онъ ниразу ихъ не называетъ опредѣляя фигуру промежуточными буквами *DNFG*, причемъ буква *D* поставлена въ наибольшемъ сѣченіи фигуры, а буква *G* находится въ нѣкоторомъ разстояніи отъ оси вращенія.

вращенія, начинаясь въ нѣкоторомъ отъ нея разстояніи[63]). Кромѣ того въ приведенномъ также выше описаніи кривой, сдѣланномъ Montucla, прежде всего прямо указано и подробно обсуждается то обстоятельссво, что кривая не доходитъ до оси вращенія и начинается въ нѣкоторомъ отъ нея разстояніи, чтò наглядно подтверждено также и даннымъ тамъ чертежемъ. Впрочемъ въ томъ, что кривая не пересѣкаетъ оси, легко убѣдиться и непосредственно изъ приведеннаго въ томъ-же приложеніи (стр. 18 прилож.), а также здѣсь ниже уравненія кривой, которое для встрѣчи ея съ осью вращенія требуетъ выполненіе условія $y=0$, чтó въ свою очередь влечетъ за собой $1+p^2=0$, или первая производная должна равнятся мнимой величинѣ.

Такимъ образомъ въ указанныхъ выше словахъ статьи Г. Іорданскаго относительно построенія кривой встрѣчается неточность. Что-же касается того, что Ньютономъ неуказано пути, которымъ онъ рѣшилъ задачу, то такое заключеніе, вѣроятно, сдѣлано на основаніи сказаннаго въ механикѣ Пуассона, по которой составлено все второе приложеніе.

Изъ приведенной выше данной Ньютономъ пропорціи для опредѣленія кривой весьма легко получить ея уравненіе въ томъ видѣ, въ какомъ оно обыкновенно приводится въ курсахъ.

Дѣйствительно, упомянутая пропорція представляется въ такомъ видѣ

$$MN : GB = GR^3 : 4BR \times GB^2 \qquad (59)$$

гдѣ $MN=y$ есть ордината нѣкоторой точки кривой, GB произвольная постоянная величина, которую обозначимъ чрезъ $4C_1$, такъ что $GB=4C_1$. Прямыя GR и BR по свойству описаннаго выше построенія представляютъ параллельныя первая

---

[63]) *Montucla.* Ibid. pag. 481 прямо утверждаетъ это.

касательной, а вторая подкасательной въ точкѣ M къ разсматриваемой кривой. Поэтому

$$GR = \frac{4C_1}{y} \cdot \frac{y}{p} \sqrt{1+p^2} = 4\frac{C_1}{p}\sqrt{1+p^2}$$

$$BR = \frac{4C_1}{y} \cdot \frac{y}{p} = \frac{4C_1}{p}$$

и приведенная выше пропорція принимаетъ видъ

$$y : 4\frac{C_1}{p}\sqrt{1+p^2} = 4^3\frac{C_1{}^3}{p^3}(\sqrt{1+p^2})^3 : 4.4\frac{C_1}{p}.4^2C_1{}^2 \ ,$$

откуда

$$y = C_1\frac{(1+p^2)^2}{p^3} \tag{60}$$

Но вспомнивъ, что

$$dx = \frac{dy}{p} \quad \text{и} \quad dy = C_1\frac{(1+p^2)(p^2-3)}{p^4}dp \ .$$

найдемъ

$$x = C_1\int\frac{(1+p^2)(p^2-3)}{p^5}dp = C_1\left[\frac{3}{4}\frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^2} + \mathrm{Log}p\right] + C_2$$

выраженіе, которое вмѣстѣ съ значеніемъ (60) для y представляетъ уравненіе искомой кривой въ той формѣ, въ какой оно обыкновенно встрѣчается въ курсахъ.

Для того, чтобы получить выражающее кривую уравненіе между y и x, необходимо исключить p изъ выраженій (60) и указаннаго для x. Но это исключеніе выполнить трудно, такъ какъ p изъ выраженія (60) опредѣляется уравненіемъ четвертой степени, а изъ выраженія для x вовсе нельзя опредѣлить p въ конечномъ видѣ вслѣдствіе того, что въ составъ его входитъ кромѣ алгебрической еще трансцендентная функція отъ p.

Примѣнивъ же къ этому случаю пріемъ указанный выше въ первой главѣ, мы непосредственно получимъ одно уравненіе

между y и x, опредѣляющее кривую. Дѣйствительно выше было неоднократно указано, что задача Ньютона получится изъ разобранной, какъ частный случай, обусловленный положеніемъ $A=0$. Поэтому значеніе y для даннаго случая будетъ (см. выше стр. 21)

$$y=\frac{C_1}{2}\cdot\frac{1}{u^3} \qquad (61)$$

и значеніе для x выразится (см. выше стр. 11)

$$x=-\frac{3}{2}C_1\int\frac{\sqrt{1-u^2}}{u^5}du$$

или употребивъ тоже самое положеніе, которымъ не разъ пользовались выше, именно $u=\sin\omega$, найдемъ [64])

$$x=-\frac{3}{2}C_1\int\frac{\cos^2\omega}{\sin^5\omega}d\omega=$$

$$=\frac{3}{2}C_1\frac{\cos\omega}{\sin^4\omega}-\frac{3}{16}C_1\frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}+\frac{3}{8}C_1\text{Log}\tang\frac{\omega}{2}+C_2$$

Внося сюда u вмѣсто $\sin\omega$, получимъ

$$x=\frac{3}{8}C_1\left\{\frac{2-u^2}{u^4}\sqrt{1-u^2}+\text{Log}\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u}\right\}+C_2 \qquad (62)$$

Изъ уравненія (61) найдемъ

$$u=ay^{-\frac{1}{3}}\quad, \qquad (63)$$

гдѣ чрезъ a обозначено

$$a=\left(\frac{C_1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Внеся значеніе u изъ выраженія (63) въ выраженіе (62), по-

[64]) *Bertrand.* Calcul intégral, pag. 73. et 75.

лучимъ уравненіе кривой

$$x=\frac{3}{4}\frac{1}{a}\left\{(2y-a^2y^{2/3})\sqrt{y^{2/3}-a^2}+a^4\operatorname{Log}(y^{\frac{1}{3}}-\sqrt{y^{2/3}-a^2})\right\}+C_1$$

въ конечномъ видѣ [65]).

Въ заключеніе укажемъ два свойства кривой, полученной Ньютономъ при рѣшеніи задачи о поверхности наименьшаго сопротивленія—первое, вытекающее изъ данной имъ пропорціи (59) именно; *квадратъ длины касательной есть средняя пропорціональная между четвертой степенью ординаты въ этой точкѣ и длинною подкасательной* или *отношеніе ординаты къ длинѣ касательной въ какой либо точкѣ равняется корню четвертой степени изъ длины подкасательной.*

Второе свойство выражается уравненіемъ (63), которое можно представить такъ

$$y^{\frac{1}{3}}dy=ads$$

откуда

$$\frac{3}{4}y^{4/3}=as+C_2$$

соотношеніе между длиною дуги отъ начала и ординатою въ данной точкѣ.

Радіусъ кривизны разсматриваемой кривой есть (см. выше стр. 44).

$$\rho=\frac{3}{a^2}y^{4/3}\sqrt{y^{2/3}-a^2}$$

или выражая его въ функціи отъ длины дуги, получимъ

$$\rho=\frac{4}{a^2}(as+C_2)\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{as+C_2}-a^2}$$

---

[65]) Кромѣ того изслѣдуя этимъ путемъ задачу Ньютона, мы получимъ еще рѣшеніе $u=0$ или $y=C$ т. е. прямую опредѣленной длины, результатъ, согласующійся съ полученнымъ *Montucla*, Histoire des Mathematiques Tom II, pag. 482.

выраженіе представляющее такъ называемое *независимое*, *существенное* уравненіе кривой (Intrinsic equation of a curve)[66]) т. е. уравненіе, независящее отъ координатъ, такъ какъ представляетъ соотношеніе между длиною дуги кривой и ея кривизною въ данной точкѣ.

Въ другой формѣ *существенное* уравненіе кривой можетъ быть представлено такъ

$$s=\frac{a^3}{\sin(\theta-\tau)}-\frac{C_3}{a},$$

гдѣ θ есть постоянная величина, а чрезъ τ означенъ уголъ, составляемый касательною въ какой либо точкѣ кривой съ даннымъ опредѣленнымъ направленіемъ. Если за это опредѣленное направленіе возьмемъ ось вращенія, то найдемъ, что уголъ касательной съ осью вращенія имѣетъ наименьшее значеніе 30° въ началѣ кривой (въ точкѣ возврата) и наибольшее 90° въ безконечности.

---

[66]) *Whewell*. Cambridge Philosophical Transactions. Vol. VIII. p. 659 and Vol. IX. p. 150.

Boole. A treatise on differential equations. London 1877. Fourth edit. pag. 263 etc.

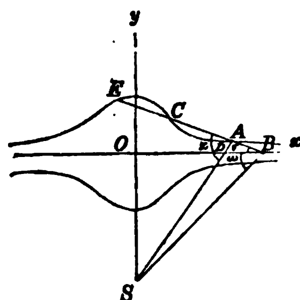
О графическомъ рѣшеніи основнаго уравненія при вычисленіи планетныхъ орбитъ.

Н. Е. Жуковскаго.

При вычисленіи планетной орбиты по тремъ наблюденіямъ мы встрѣчаемся съ рѣшеніемъ уравненія восьмой степени, дающаго уголъ z между радіусомъ векторомъ планеты во второмъ наблюденіи и линіею, соединяющею планету и землю въ моментъ этого наблюденія.

Мы предлагаемъ здѣсь весьма простой графическій способъ, служащій для приближеннаго опредѣленія z въ случаѣ, если промежутки времени t'' и t между наблюденіями малы.

Фиг. 1.



Возьмемъ (фиг. 1) линію AB, соединяющую планету и землю въ моментъ втораго наблюденія, и соединимъ положеніе планеты A во второмъ наблюденіи съ солнцемъ S. Отмѣтимъ на радіусѣ векторѣ AS точку D, въ которой онъ пересѣкается хордою, соединяющею первое и третье положеніе планеты.

Чрезъ точку D проведемъ плоскость N, параллельную прямымъ, соединяющимъ положенія планеты и земли въ моменты перваго и третьяго наблюденія, и построимъ линію OB, по которой плоскость N пересѣкаетъ плоскость SAB.

Уголъ z, который на нашемъ чертежѣ есть уголъ SAC, находится въ способѣ Гаусса съ помощію уравненія, которому можно дать слѣдующій видъ:

$$2AS^2\frac{AD}{DS}=Q; \tag{1}$$

здѣсь Q въ первомъ приближеніи выражается произведеніемъ t'' на коэффиціентъ притяженія k^2.

Принимаемъ линію OB за ось абсциссъ, а перпендикуляръ, опущенный на нее изъ S,—за ось ординатъ, и выражаемъ ур. (1) съ помощію координатъ x и y точки A:

$$((y+h)^2+x^2)^3y^2=\frac{Q^2}{4}h^2; \tag{2}$$

гдѣ h есть разстояніе S отъ OB.

Такимъ образомъ положеніе планеты A, опредѣляющее неизвѣстный уголъ z, является точкою пересѣченія кривой, имѣющей ур. (2), съ прямою AB; но, такъ какъ эта кривая зависитъ отъ двухъ параметровъ h и Q, то ею не удобно пользоваться для графическаго рѣшенія задачи, ибо для каждаго отдѣльнаго случая пришлось бы вычерчивать новую кривую.

Чтобы свести вопросъ къ пересѣченію прямой съ постоянною кривою, мы воспользуемся двумя замѣчаніями: во первыхъ, по малости y мы можемъ въ первой части ур. (2) написать h вмѣсто $h+y$; во вторыхъ, при малыхъ t'' и t одна изъ точекъ пересѣченія кривой, имѣющей ур. (2), съ прямою AB весьма близко подходитъ къ положенію земли въ моментъ втораго наблюденія.

Пусть это будетъ точка C, имѣющая координаты x_0, y_0 *).
Мы получаемъ для опредѣленія координатъ точки A уравненія:

$$(h^2+x^2)^3y^2=\frac{Q^2}{4}h^2, \qquad (3)$$

$$\frac{y_0-y}{x-x_0}=tg\sigma; \qquad (4)$$

гдѣ

$$\sigma=\angle ABD.$$

Дѣлаемъ теперь подстановку

$$x=h\,ctg\zeta; \qquad (5)$$

найдемъ по ур. (3)

$$y=\frac{Q}{2h^2}\,sn^3\zeta. \qquad (6)$$

Подставляемъ x и y изъ ур. (5) и (6) въ ур. (4):

$$\frac{sn^3\zeta_0-sn^3\zeta}{tg\zeta-tg\zeta_0}=\frac{2h^3}{Q}\,tg\sigma. \qquad (7)$$

Здѣсь вторая часть можетъ быть выражена приближенно съ помощію Гауссовой величины c, такъ какъ, обозначая уголъ OBS чрезъ ω, имѣемъ

$$c=\frac{1}{2h^3\left(\dfrac{sn\omega}{sn(\omega-\sigma)}\right)^3 sn\sigma},$$

*) Всѣхъ дѣйствительныхъ точекъ пересѣченія будетъ 4, изъ которыхъ 3 лежатъ на верхней вѣтви кривой, а одна на нижней; эта послѣдняя не соотвѣтствуетъ ни положенію планеты, ни положенію земли.

что по малости σ можно написать такъ:

$$c = \frac{1}{2h^3 tg\sigma}.$$

Съ другой стороны, не трудно замѣтить на фиг. 1, что нашъ уголъ ζ съ тѣмъ же приближеніемъ можетъ быть замѣненъ на z.

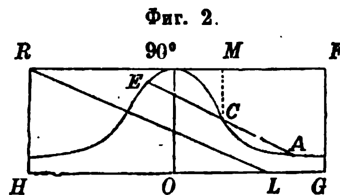
Вслѣдствіе этого ур. (7) можно написать такъ:

$$\frac{sn^3\delta - sn^3 z}{tg z - tg\delta} = \frac{1}{Qc}; \qquad (8)$$

гдѣ δ есть уголъ z_0, т. е. уголъ между линіею AB и радіусомъ векторомъ земли во второмъ наблюденіи.

Теперь вопросъ объ опредѣленіи z приведенъ къ отысканію точекъ пересѣченія прямой съ постоянною кривою и можетъ быть рѣшенъ съ помощію линейки, представленной на фиг. (2).

Фиг. 2.



Принявъ что ось ординатъ проходитъ чрезъ средину линейки, а ось абсциссъ совпадаетъ съ ея краемъ Hg, даемъ въ формулахъ

$$x = c tg z$$
$$y = sn^3 z$$

всевозможныя значенія аргументу z отъ 90^0 до 0^0 и отъ 90^0 до 180^0. Полученныя точки образуютъ кривую ECA, которую

вычерчиваемъ на линейкѣ, отмѣчая величины аргумента z по сторонѣ линейки RF.

Ширину линейки HR беремъ$=1$, а на сторонѣ ея HG откладываемъ величины ξ по аргументу μ, положивъ

$$\xi=10^{\mu};$$

причемъ значенія аргумента μ отмѣчаемъ на краю линейки HG.

Съ помощію этой линейки задача рѣшается такимъ образомъ: отмѣчаемъ по данному аргументу $z=\delta$ точку M, а по ней на кривой точку C; по аргументу

$$\mu=lg\ Q+lgc$$

находимъ точку L и соединяемъ ее съ точкою R линіею RL; проводимъ чрезъ точку C линіею $CA \parallel RL$, и опредѣляемъ точки пересѣченія линіи CA съ кривою ECA.

Одна изъ точекъ пересѣченія E или A даетъ намъ искомую величину z. При этомъ имѣютъ мѣсто извѣстные два случая. Когда аргументу $z=\delta$ соотвѣтствуетъ точка C, то по направленію, въ которомъ видна планета, мы всегда сдѣлаемъ надлежащій выборъ между точками A и E; если же аргументу δ соотвѣтствуетъ точка A или E, то нельзя рѣшить, которой изъ двухъ остальныхъ точекъ соотвѣтствуетъ положеніе планеты.

Обобщеніе одной формулы Абеля.

Н. Я. Сонина.

Формула, обобщенію которой посвящена настоящая замѣтка, была двукратно доказана самимъ Абелемъ, а впослѣдствіи и многими другими учеными. Она относится къ весьма важной, но мало разработанной области обратнаго исчисленія опредѣленныхъ интеграловъ и можетъ быть представлена въ слѣдующихъ двухъ эквивалентныхъ видахъ:

$$(1)\qquad \int_a^x f\xi.d\xi = \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_a^x \frac{d\lambda}{(x-\lambda)^{1-n}}\int_a^\lambda f\xi.\frac{d\xi}{(\lambda-\xi)^n},$$

$$(2)\int_a^x f\xi.d\xi = \frac{1}{\Pi(n-1)}\int_a^x \frac{F\lambda.d\lambda}{(x-\lambda)^{1-n}},\ F\lambda = \frac{1}{\Pi(-n)}\int_a^\lambda \frac{f\xi.d\xi}{(\lambda-\xi)^n},\ 0<n<1$$

Сдѣланное нами обобщеніе этой формулы можетъ быть выполнено слѣдующимъ образомъ.

Разсмотримъ интегралъ

$$\omega = \int_a^x f\xi.d\xi$$

и умножимъ подъинтегральную функцію на единицу, представленную опредѣленнымъ интеграломъ, содержащимъ параметры

ξ и x. Приличнымъ выборомъ перемѣннаго этотъ множитель всегда можно привести къ виду

$$(3)\qquad 1=\int_{\xi}^{x}\sigma(\lambda,\xi,x)d\lambda,$$

и мы получимъ черезъ перемѣну порядка интеграцій

$$(4)\qquad \omega=\int_{a}^{x}f\xi.d\xi\int_{\xi}^{x}\sigma(\lambda,\xi,x)d\lambda=\int_{a}^{x}d\lambda\int_{a}^{\lambda}f\xi.\sigma(\lambda,\xi,x)d\xi.$$

Таково самое общее представленіе простаго интеграла двойнымъ. Сравнивая эту формулу съ формулою Абеля, приходимъ къ мысли принять

$$\sigma(\lambda,\xi,x)=\varphi(\lambda-\xi).\psi(x-\lambda),$$

гдѣ функціи φ и ψ должны быть опредѣлены при помощи условія (3), которое даетъ

$$1=\int_{\xi}^{x}\varphi(\lambda-\xi).\psi(x-\lambda).d\lambda,$$

или, полагая $\lambda=\xi+(x-\xi)\mu$ и означая $x-\xi$ черезъ z,

$$(5)\qquad 1=z\int_{0}^{1}\varphi(z\mu)\,\psi(z-\mu z)d\mu.$$

Для того, чтобъ это равенство могло имѣть мѣсто при $z=0$, очевидно необходимо, чтобы произведеніе $\varphi x.\psi x$ обращалось въ безконечность перваго порядка при $x=0$; съ другой стороны, сходимость интеграла при предѣлахъ требуетъ, чтобъ обѣ функціи φx и ψx при $x=0$ обращались въ безконечность не выше перваго порядка.

На основаніи этихъ соображеній можно принять

$$\varphi x = x^{-p}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) = x^{-p}\sum_0^\infty a_m x^m,\quad 0 < p < 1,$$

$$\psi x = x^{-q}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) = x^{-q}\sum_0^\infty b_n x^n,\quad 0 < q < 1,$$

$$p + q = 1.$$

Чрезъ подстановку этихъ значеній условіе (5) приметъ видъ

$$1 = \sum_{m=o}^{m=\infty}\sum_{n=o}^{n=\infty} z^{m+n} a_m b_n \int_0^1 \mu^{m-p}(1-\mu)^{n-q} d\mu,$$

или

$$1 = \sum_{m=o}^{m=\infty}\sum_{n=o}^{n=\infty} \frac{z^{m+n}}{\Pi(m+n)} a_m \Pi(m-p).b_n \Pi(n-q)$$

и распадается на цѣлый рядъ условій, которыя, полагая $a_m\Pi(m-p) = c_m$, $b_n\Pi(n-q) = d_n$, представятся въ видѣ

$$c_0 d_0 = 1,$$

$$c_m d_0 + c_{m-1} d_1 + c_{m-2} d_2 + \ldots + c_0 d_m = 0,\quad m > 0.$$

Эти условія обнаруживаютъ, что можно принять $c_0 = d_0 = 1$ и что при произвольномъ y должно имѣть мѣсто равенство

$$(1 + c_1 y + c_2 y^2 + \ldots)(1 + d_1 y + d_2 y^2 + \ldots) = 1.$$

Мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующему результату:

Избравъ произвольно два положительныя дробныя числа p и q, которыхъ сумма равна единицѣ, возьмемъ какой нибудь рядъ

$$1 + c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + \ldots = \rho y$$

и, назвавъ сумму его ρy, найдемъ разложеніе

$$\frac{1}{\rho y}=1+d_1y+d_2y^2+d_3y^3+\dots;$$

полагая затѣмъ

$$(6)\qquad \varphi x=x^{-p}\left(\frac{1}{\Pi(-p)}+\frac{c_1yx}{\Pi(1-p)}+\frac{c_2(yx)^2}{\Pi(2-p)}+\dots\right),$$

$$(7)\qquad \psi x=x^{-q}\left(\frac{1}{\Pi(-q)}+\frac{d_1yx}{\Pi(1-q)}+\frac{d_2(yx)^2}{\Pi(2-q)}+\dots\right),$$

будемъ имѣть

$$(8)\qquad \int_a^x f\xi.d\xi=\int_a^x\psi(x-\lambda)d\lambda\int_a^\lambda f\xi.\varphi(\lambda-\xi)d\xi,$$

или, въ другой формѣ,

$$(9)\qquad \int_a^x f\xi.d\xi=\int_a^x F\lambda\psi(x-\lambda)d\lambda,\quad F\lambda=\int_a^\lambda f\xi.\varphi(\lambda-\xi)d\xi.$$

Мы пришли инымъ путемъ къ этому обобщенію формулы Абеля уже около трехъ лѣтъ тому назадъ въ одномъ изслѣдованіи, которое и понынѣ еще не окончено. Мысль умноженія подъинтегральной функціи на единицу, представленную опредѣленнымъ интеграломъ, была высказана нами и примѣнена къ выводу формулы Абеля при $n={}^1/_2$ въ диссертаціи «о разложеніи функцій въ безконечные ряды», напечатанной въ 1871 г. въ V томѣ Математическаго Сборника. Перемѣна порядка интеграцій, произведенная въ формулѣ (4), съ успѣхомъ примѣнена къ выводу формулы Абеля Іоахимсталемъ въ 1860 [1]) и А. В. Лѣтниковымъ въ 1874 году [2]).

---

[1]) *Ioachimsthal*: Ueber ein Attractionsproblem. Crelle's Journal, Bd. 58, S. 185.

[2]) *А. В. Лѣтниковъ*: Изслѣдованія, относящіяся къ теоріи интеграловъ вида $\int_a^x(x-u)^{p-1}f(u)du$. Математическій Сборникъ, издаваемый Московскимъ Математическимъ Обществомъ, т. 7, стр. 1—206.

Пусть $\rho y = e^y$, откуда $\frac{1}{\rho y} = e^{-y}$, $c_n = \frac{1}{\Pi n}$, $d_n = \frac{(-1)^n}{\Pi n}$,

$$\varphi x = x^{-p} \sum_0^\infty \frac{(yx)^n}{\Pi n . \Pi(n-p)}, \quad \psi x = x^{-q} \sum_0^\infty \frac{(-yx)^n}{\Pi n . \Pi(n-q)};$$

обѣ эти функціи весьма просто выражаются помощію цилиндрическихъ, именно

$$\varphi x = (2x)^{-p} \frac{J^{-p}(2i\sqrt{xy})}{(2i\sqrt{xy})^{-p}}, \quad \psi x = (2x)^{-q} \frac{J^{-q}(2\sqrt{xy})}{(2\sqrt{xy})^{-q}};$$

при $p = q = {}^1/_2$ будемъ имѣть

$$\varphi x = \frac{\cos(2i\sqrt{xy})}{\sqrt{\pi x}}, \quad \psi x = \frac{\cos(2\sqrt{xy})}{\sqrt{\pi x}}.$$

Пусть еще $\rho y = (1+y)^{-r}$, откуда $\frac{1}{\rho y} = (1+y)^r$,

$$c_n = (-1)^n \frac{r(r+1)..(r+n-1)}{\Pi n}, \quad d_n = \frac{r(r-1)..(r-n+1)}{\Pi n},$$

$$\varphi x = x^{-p} \sum_0^\infty \frac{r(r+1)..(r+n-1)}{\Pi n . \Pi(n-p)} (-yx)^n = \tau(x,p,r),$$

$$\psi x = x^{-q} \sum_0^\infty \frac{r(r-1)..(r-n+1)}{\Pi n . \Pi(n-q)} (yx)^n = \tau(x,q,-r);$$

при $r = q = 1-p$ находимъ

$$\varphi x = \frac{x^{-p}}{\Pi(-p)} e^{-yx}, \quad \psi x = \frac{1}{\Pi(-q-1)} \int_\infty^x \frac{e^{-yx} dx}{x^{1+q}}$$ и т. д.

Предположимъ, что коэффиціенты c_m, d_n не зависятъ отъ p,q и разсмотримъ функціи $\varphi x,\psi x$, оставляя въ сторонѣ ограниченія, наложенныя на p,q. Означая

$$x^p\sum_0^\infty \frac{c_n(yx)^n}{\Pi(n+p)}=\varphi_p(x),\quad x^q\sum_0^\infty \frac{d_n(yx)^n}{\Pi(n+q)}=\psi_q(x),$$

легко убѣждаемся, что интегралъ $\int_\xi^x \varphi_p(\lambda-\xi)\psi_q(x-\lambda)d\lambda$ будетъ сходящимся при $p>-1$, $q>-1$ и что въ этомъ предположеніи его величина будетъ $\frac{(x-\xi)^{p+q+1}}{\Pi(p+q+1)}$. Вслѣдствіе этого будемъ имѣть

$$(10)\quad \int_a^x f\xi.\frac{(x-\xi)^{p+q+1}}{\Pi(p+q+1)}d\xi=\int_a^x \psi_q(x-\lambda)d\lambda\int_a^\lambda f\xi.\varphi_p(\lambda-\xi).d\xi.$$

Пусть наконецъ будетъ

$$C_0+C_1y+C_2y^2+\ldots=(A_0+A_1y+A_2y^2+\ldots)\,(B_0+B_1y+ +B_2y^2+\ldots),$$

такъ что $C_n=A_nB_0+A_{n-1}B_1+A_{n-2}B_2+\ldots+A_1B_{n-1}+A_0B_n$ Полагая

$$\Phi_p(x)=x^p\sum_0^\infty \frac{A_n(yx)^n}{\Pi(n+p)},$$

$$\Psi_q(x)=x^q\sum_0^\infty \frac{B_n(yx)^n}{\Pi(n+q)},$$

$$X_s(x)=x^s\sum_0^\infty \frac{C_n(yx)^n}{\Pi(n+s)},$$

находимъ при $p > -1$, $q > -1$,

$$X_{p+q+1}(z) = z\int_0^1 \Phi_p(z\mu)\Psi_q(z - z\mu)d\mu = \int_\xi^x \Phi_p(\lambda - \xi).\Psi_q(x - \lambda)d\lambda$$

и слѣдовательно

$$(11) \quad \int_a^x f\xi.X_{p+q+1}(x-\xi)d\xi = \int_a^x \Psi_q(x-\lambda)d\lambda\int_a^\lambda f\xi\Phi_p(\lambda-\xi)d\xi.$$

Этою формулою можно воспользоваться для представленія простаго интеграла помощію кратнаго. Въ обратномъ исчисленіи опредѣленныхъ интеграловъ она служитъ для рѣшенія слѣдующаго вопроса: зная величину $F\lambda$ интеграла $\int_a^\lambda f\xi.\Phi_p(\lambda-\xi)d\xi$, гдѣ $\Phi_p(x)$ есть данная функція, найти величину $X(x)$ интеграла $\int_a^x f\xi.X_{p+q+1}(x-\xi)d\xi$, гдѣ $X_{p+q+1}(x)$ также есть данная функція: на основаніи формулы (11) отвѣтомъ на этотъ вопросъ будетъ служить формула

$$X(x) = \int_a^x F\lambda.\Psi_q(x-\lambda)d\lambda,$$

въ которой коэффиціенты функціи Ψ_q опредѣлятся изъ разложенія

$$B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + \ldots = \frac{C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + \ldots}{A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots}.$$

Сдѣлаемъ въ заключеніе слѣдующее замѣчаніе. Легко убѣдиться, что функціи $\varphi_p(x)$, $\psi_p(x)$, $\Phi_p(x)$, $\Psi_p(x)$, $X_p(x)$, а равно и составленные изъ этихъ функцій и не зависящей

отъ p функцій fx интегралы вида $\int_a^x f\xi.\varphi_p(x-\xi)d\xi$ обладаютъ свойствомъ, выражаемымъ уравненіемъ

$$\frac{du_p}{dx}=u_{p-1}.$$

Примѣчаніе. Перемѣна порядка интеграцій, произведенная въ формулѣ (4), нѣкоторыми писателями приписывается Дирикле. Едва ли есть какая надобность присоединять столь уважаемое имя къ столь элементарной формулѣ, тѣмъ болѣе потому, что какъ эта формула, такъ и другія подобныя и болѣе общія, суть простыя слѣдствія теоремы о перемѣнѣ порядка интеграцій при постоянныхъ предѣлахъ. Въ самомъ дѣлѣ если въ формулѣ

$$\int_a^x d\xi\int_a^x f(\xi,\eta)d\eta=\int_a^x d\eta\int_a^x f(\xi,\eta)d\xi$$

примемъ, что функція $f(\xi,\eta)$ постоянно равна нулю, когда $\eta>\xi$, то получаемъ

$$\int_a^x d\xi\int_a^\xi f(\xi,\eta)d\eta=\int_a^x d\eta\int_\eta^x f(\xi,\eta)d\xi$$

т. е. такъ называемую формулу Дирикле.

Варшава,
Іюнь 1883 года.

Признакъ устойчивости движенія и его связь съ однимъ изъ признаковъ maximum'а или minimum'а простаго опредѣленнаго интеграла.

П. М. Новикова.

Если движущаяся система матеріальныхъ точекъ, получивъ безконечно-малыя консервативныя возмущенія, т. е. такія, при которыхъ живая сила системы не измѣняется, хотя для нѣкоторыхъ изъ этихъ возмущеній возвращается въ положенія первоначальнаго или невозмущеннаго пути, совершивъ безконечно-малыя отклоненія отъ него, то первоначальное движеніе системы мы называемъ устойчивымъ по отношенію къ этимъ спеціальнымъ консервативнымъ возмущеніямъ.

Допустимъ, что къ данной системѣ примѣнимо начало наименьшаго дѣйствія и представимъ его въ формѣ, данной Якоби, т. е. исключимъ изъ интеграла наименьшаго дѣйствія время съ помощью уравненія живыхъ силъ; выразимъ этотъ интегралъ посредствомъ обобщенныхъ координатъ, которыя тождественно удовлетворяютъ уравненіямъ связей системы, такъ что ихъ можно считать свободными, и пусть онѣ будутъ, въ числѣ $n+1$, обозначены черезъ

$$y_1, y_2, \dots y_n, x.$$

Тогда, обозначая черезъ w общее рѣшеніе уравненія въ частныхъ производныхъ, къ рѣшенію котораго приводится динамическая задача, и черезъ $a_1, a_2 \dots a_n$ — n произвольныхъ

постоянныхъ, входящихъ въ это рѣшеніе, получимъ, какъ извѣстно, уравненія траэкторій въ такомъ видѣ:

$$\frac{dw}{da_1}=\alpha_1, \frac{dw}{da_2}=\alpha_2, \ldots \frac{dw}{da_n}=\alpha_n. \quad (1)$$

Подставивъ въ эти уравненія начальныя значенія координатъ и обозначая значеніе, которое приметъ черезъ это w, черезъ w_0, получимъ

$$\frac{dw_0}{da_1}=\alpha_1, \frac{dw_0}{da_2}=\alpha_2, \ldots\ldots \frac{dw_0}{da_n}=\alpha_n. \quad (2)$$

Вычитая соотвѣтственно (2) изъ (1) и обозначая разность $w-w_0$ черезъ v, получимъ уравненія траэкторій въ такомъ видѣ:

$$\frac{dv}{da_1}=0, \frac{dv}{da_2}=0, \ldots\ldots \frac{dv}{da_n}=0, \quad (3)$$

гдѣ постоянными произвольными будутъ $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$, а остальныя n опредѣлены изъ (2) посредствомъ данныхъ начальныхъ положеній. Варіируемъ уравненія (3) по произвольнымъ постояннымъ; имѣемъ

$$(4)\left\{\begin{array}{l}
\frac{dv}{da_1}+\frac{d^2v}{da_1^2}\delta\alpha_1+\frac{d^2v}{da_1da_2}\delta\alpha_2+\ldots+\frac{d^2v}{da_1da_n}\delta\alpha_n+\text{члены высш. пор.}=0\\
\frac{dv}{da_2}+\frac{d^2v}{da_2da_1}\delta\alpha_1+\frac{d^2v}{da_2^2}\delta\alpha_2+\ldots+\frac{d^2v}{da_2da_n}\delta\alpha_n+\ldots\ldots\ldots=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dv}{da_n}+\frac{d^2v}{da_nda_1}\delta\alpha_1+\frac{d^2v}{da_nda_2}\delta\alpha_2+\ldots+\frac{d^2v}{da_n^2}\delta\alpha_n+\ldots\ldots\ldots=0
\end{array}\right.$$

Эти уравненія представляютъ собою уравненія возмущенныхъ путей, исходящихъ изъ того же начальнаго положенія, какъ и разсматриваемый нами невозмущенный путь, опредѣленный уравненіями (3).

Если движеніе въ выше опредѣленномъ смыслѣ устойчиво, то возмущенные пути будутъ имѣть общія положенія съ невозмущенными. Такъ какъ координаты этихъ общихъ положеній будутъ удовлетворять разомъ уравненіямъ (3) и (4), то для этихъ значеній координатъ первые члены лѣвыхъ частей (4) уничтожаются; отбрасывая кромѣ того варіаціи высшихъ порядковъ, получимъ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2v_1}{da_1^{\,2}}\delta a_1+\frac{d^2v}{da_1da_2}\delta a_2+\ldots+\frac{d^2v}{da_1da_n}\delta a_n=0\\
&\frac{d^2v}{da_2da_1}\delta a_1+\frac{d^2v}{da_2^{\,2}}\delta a_2+\ldots+\frac{d^2v}{da_2da_n}\delta a_n=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d^2v}{da_nda_1}\delta a_1+\frac{d^2v}{da_2da_n}\delta a_2+\ldots+\frac{d^2v}{da_n^{\,2}}\delta a_n=0
\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Но чтобы возможны были возмущенные пути, имѣющіе общія положенія съ невозмущеннымъ, необходимо, чтобы въ уравненіяхъ (5) δa_1, $\delta a_2 \ldots \delta a_n$ не были всѣ заразъ равны нулю для какихъ бы то ни было значеній $x_1, y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$. Для этого же необходимо, чтобы детерминантъ изъ коэфиціентовъ варіацій произвольныхъ постоянныхъ для нѣкотораго значенія x дѣлался равнымъ нулю. Обозначая для краткости детерминантъ черезъ заключеніе общаго члена его въ квадратъ, получимъ необходимое условіе устойчивости въ такомъ видѣ

$$\boxed{\frac{d^2v}{da_ida_k}}=0\qquad(6)$$

Обратно, если существуетъ это уравненіе для какихъ нибудь значеній координатъ, то изъ (5) можно опредѣлить нѣкоторыя отношенія варіацій постоянныхъ произвольныхъ, которымъ будутъ соотвѣтствовать возмущенные пути, исходящіе изъ начальнаго положенія системы и имѣющіе общія положенія съ невозмущеннымъ путемъ, опредѣляемыя координатами, для которыхъ удовлетворено уравненіе (6).

Такимъ образомъ условіе (6) представляетъ собою и достаточное условіе устойчивости въ выше опредѣленномъ смыслѣ.

Опредѣляя далѣе изъ уравненій (3) $y_1, y_2 \ldots y_n$ и внося ихъ обратно, мы получимъ тождества, продифференцировавъ которыя по каждому изъ a, получимъ n^2 уравненій, которыя можно представить въ слѣдующей типической формѣ:

$$\frac{d^2v}{da_i da_k}+\frac{d^2v}{da_i dy_1}\frac{dy_1}{da_k}+\frac{d^2v}{da_i dy_2}\frac{dy_2}{da_k}+\ldots+\frac{d^2v}{da_i dy_n}\frac{dy_n}{da_k}=0. \quad (7)$$

Давая здѣсь i и k всевозможныя значенія отъ 1 до n получимъ всѣ n^2 уравненій.

Если мы перенесемъ въ (7) первый членъ лѣвой части въ правую часть и составимъ изъ правыхъ детерминантъ, то изъ лѣвыхъ частей составится равный этому по величинѣ детерминантъ, который по теоремѣ произведенія детерминантовъ разобьется на произведеніе двухъ детерминантовъ, такъ что, употребляя введенное выше обозначеніе для детерминантовъ, получимъ

$$(-1)^n \left|\frac{d^2v}{da_i da_k}\right| = \left|\frac{d^2v}{da_i dy_s}\right| \times \left|\frac{dy_s}{da_k}\right|. \quad (8)$$

Въ этомъ уравненіи $\left|\frac{d^2v}{da_i dy_s}\right|$ не равенъ нулю, такъ какъ равенство его нулю предполагало бы, какъ извѣстно, невоз-

можность опредѣлить изъ (3) всѣ y, но мы исходимъ изъ того предположенія, что (1), а слѣдовательно и (3) представляютъ полную систему интеграловъ. Поэтому, когда изчезаетъ детерминантъ, находящійся въ лѣвой части, изчезновеніе котораго служитъ необходимымъ и достаточнымъ условіемъ устойчивости, то изчезаетъ и $\left|\frac{dy_s}{da_k}\right|$, и наоборотъ. Такимъ образомъ изчезаніе послѣдняго детерминанта можетъ служить признакомъ устойчивости.

Но съ другой стороны можно доказать, что изчезаніе детерминанта $\left|\frac{dy_s}{da_k}\right|$ служитъ признакомъ того, что интегралъ наименьшаго дѣйствія перестаетъ быть minimum.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ γ съ различными указателями произвольныя постоянныя, полагая потомъ

$$(9) \qquad u_{r,s} = \gamma_{1,r}\frac{dy_s}{da_1} + \gamma_{2,r}\frac{dy_s}{da_2} + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \gamma_{n,r}\frac{dy_s}{da_n} + \gamma_{n+1,r}\frac{dy_s}{d\alpha_1} + \gamma_{n+2,r}\frac{dy_s}{d\alpha_2} + \ldots + \gamma_{2n,r}\frac{dy_s}{d\alpha_k}$$

(гдѣ r и s нужно давать всѣ значенія отъ 1 до n) и образуя детерминантъ $|u_{r,s}|$, мы знаемъ, что, пока различнымъ произвольнымъ постояннымъ γ можно дать значенія, при которыхъ детерминантъ $|u_{r,s}|$ *) не изчезаетъ, до тѣхъ поръ интегралъ наименьшаго дѣйствія сохраняетъ свойство minimum'а, но когда достигнемъ такого предѣла интеграціи, при которомъ уже нельзя дать постояннымъ произвольнымъ γ такихъ значеній, чтобы

*) Постоянныя γ въ этомъ детерминантѣ связаны, какъ извѣстно $\frac{n(n-1)}{2}$ условіями, но эти условія очевидно нисколько не вліяютъ на дальнѣйшія разсужденія и потому мы ихъ здѣсь игнорируемъ.

$\boxed{u_{r,s}}$ не изчезалъ внутри предѣловъ интеграціи, то интегралъ наименьшаго дѣйствія теряетъ свойство minimum'а.

Преобразуемъ детерминантъ $[u_{r,s}]$.

Опредѣливъ изъ (3) $y_1, y_2 \ldots . y_n$ въ x, n постоянныхъ произвольныхъ a и начальныхъ значеніяхъ координатъ, подставимъ въ нихъ вмѣсто a ихъ значенія въ α и $y_{10}, y_{20}, \ldots y_{n0}$, которыя получатся, рѣшая (2) по отношенію къ различнымъ a, потомъ дифференцируемъ такимъ образомъ выраженныя y по различнымъ α; получимъ равенства, заключающіяся въ слѣдующей типической формѣ:

$$\frac{dy_s}{d\alpha_t} = \frac{dy_s}{da_1}\frac{da_1}{d\alpha_t} + \frac{dy_s}{da_2}\frac{da_2}{d\alpha_t} + \ldots . + \frac{dy_s}{da_n}\frac{da_n}{d\alpha_t}, \quad (10)$$

гдѣ s и t нужно дать всѣ значенія отъ 1 до n. Здѣсь различныя частныя производныя a по α могутъ быть выражены въ α и начальныхъ значеніяхъ координатъ посредствомъ уравненій (2). Это опредѣленіе совершить очень легко: стоитъ только продифференцировать (2) частнымъ образомъ по различнымъ α, тогда получится достаточное число линейныхъ уравненій, изъ которыхъ и опредѣлятся всѣ частныя производныя a по α въ a и начальныхъ значеніяхъ координатъ x, $y_{10}, y_{20} \ldots . y_{n0}$. Очевидно, всѣ эти частныя производныя a по α будутъ постоянныя количества. Замѣнивъ въ уравненіяхъ (9) производныя y по α ихъ выраженіями, данными въ уравненіяхъ (10), видимъ, что различные $u_{r,s}$ выразятся линейно въ производныхъ y по a, помноженныхъ на постоянныя произвольныя, которыя составлены очень просто изъ прежнихъ постоянныхъ произвольныхъ съ присоединеніемъ къ нимъ производныхъ различныхъ a по α.

Такимъ образомъ будетъ

$$u_{r,s} = C_{1,r}\frac{dy_s}{da_1} + C_{2,r}\frac{dy_s}{da_2} + \ldots . + C_{n,r}\frac{dy_s}{da_n}, \quad (11)$$

гдѣ r и s нужно придать всѣ значенія отъ 1 до n.

Различныя C, которыхъ n^2, могутъ быть представлены въ слѣдующей типической формѣ:

$$C_{i,r}=\gamma_{i,r}+\gamma_{n+1,r}\frac{da_i}{da_1}+\gamma_{n+2,r}\frac{da_i}{da_2}+\ldots+\gamma_{2n,r}\frac{da_i}{da_n}. \quad (12)$$

Составляя детерминантъ изъ лѣвыхъ частей уравненій (11) съ одной стороны и съ другой стороны изъ правыхъ и пользуясь въ послѣднемъ случаѣ теоремой объ умноженіи детерминантовъ, получимъ слѣдующее равенство:

$$\boxed{u_{r,s}}=\boxed{C_{k,r}}\times\boxed{\frac{dy_s}{da_k}}. \quad (13)$$

Такъ какъ въ послѣднемъ равенствѣ детерминантъ $\boxed{C_{k,r}}$ имѣетъ произвольное постоянное значеніе, то детерминанты $\boxed{u_{r,s}}$ и $\boxed{\frac{dy_s}{da_k}}$ изчезаютъ одновременно; но какъ изчезновеніе перваго служитъ признакомъ того, что интегралъ наименьшаго дѣйствія перестаетъ быть minimum, а изчезновеніе втораго, какъ мы показали выше, служитъ признакомъ устойчивости, то мы выводимъ заключеніе, что движеніе устойчиво въ принятомъ нами значеніи этого слова, между начальнымъ положеніемъ и какимъ либо другимъ, если для координатъ этого положенія интегралъ наименьшаго дѣйствія теряетъ свойство minimum'а, которымъ онъ обладалъ до того времени. Наоборотъ, принимая во вниманіе, что изчезновеніе $\boxed{\frac{d^2v}{da_i da_k}}$ влечетъ за собою изчезновеніе детерминанта $\boxed{\frac{dy_s}{da_k}}$, а это въ свою очередь—изчезновеніе детерминанта $\boxed{u_{r,s}}$, видимъ, что, если система устойчива между начальнымъ положеніемъ и

какимъ нибудь другимъ, то для этого другаго интегралъ наименьшаго дѣйствія теряетъ свойство minimum'а.

Выводъ уравненія (13) прилагается непосредственно вообще къ какому бы то ни было опредѣленному простому интегралу, а не только къ интегралу наименьшаго дѣйствія; точно также признакъ того, что опредѣленный простой интегралъ перестаетъ быть minimum или maximum, не смотря на то, что подъинтегральная функція 2-й варіаціи остается еще величиной конечной и не измѣняющей знака, можетъ быть выраженъ, какъ легко видно изъ непосредственнаго обобщенія предъидущихъ разсужденій, въ любой изъ слѣдующихъ 3-хъ формъ

$$\begin{vmatrix} u_{1,1}, u_{1,2} \dots u_{1,n} \\ u_{2,1}, u_{2,2} \dots u_{2,n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ u_{n,1}, u_{n,2} \dots u_{n,n} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{dy_1}{da_1}, \frac{dy_2}{da_1}, \dots \frac{dy_n}{da_1} \\ \frac{dy_1}{da_2}, \frac{dy_2}{da_2}, \dots \frac{dy_n}{da_2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_1}{da_n}, \frac{dy_2}{da_n}, \dots \frac{dy_n}{da_n} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2(w-w_0)}{da_1^2}, \frac{d^2(w-w_0)}{da_1 da_2}, \dots\dots \frac{d^2(w-w_0)}{da_1 da_n} \\ \frac{d^2(w-w_0)}{da_1 da_2}, \frac{d^2(w-w_0)}{da_2^2}, \dots\dots \frac{d^2(w-w_0)}{da_2 da_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{d^2(w-w_0)}{da_1 da_n}, \frac{d^2(w-w_0)}{da_n da_2}, \dots\dots \frac{d^2(w-w_0)}{da_n^2} \end{vmatrix} = 0,$$

гдѣ u опредѣлено въ уравненіи (9), а w есть общее рѣшеніе уравненія въ частныхъ производныхъ, къ которому можетъ быть способомъ Гамильтона-Якоби приведена задача варіаціоннаго исчисленія.

Изъ теоріи рулеттъ.

Θ. Е. Орлова.

Отнесемъ неизмѣняемую фигуру, движущуюся на плоскости по какому нибудь закону, къ прямоугольнымъ осямъ координатъ $O'\xi$ и $O'\eta$, положеніе которыхъ относительно неподвижныхъ осей Ox и Oy будемъ опредѣлять координатами x, y точки O' и угломъ θ оси $O'\xi$ съ осью Ox (чер. 1). Какими бы условіями ни опредѣлялось движеніе фигуры на плоскости, всегда можно при помощи ихъ выразить координаты x и y въ функціи угла вращенія θ. Если будемъ считать положительнымъ направленіе вращенія фигуры слѣва вправо, то координаты мгновенныхъ центровъ послѣдовательныхъ порядковъ C_1, C_2, C_3, C_4 и т. д. выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$x_1=x+\frac{dy}{d\theta},\ x_2=x+\frac{d^2x}{d\theta^2},\ x_3=x-\frac{d^3y}{d\theta^3},\ x_4=x-\frac{d^4x}{d\theta^4},\ldots.$$

$$y_1=y-\frac{dx}{d\theta},\ y_2=y+\frac{d^2y}{d\theta^2},\ y_3=y+\frac{d^3x}{d\theta^3},\ y_4=y-\frac{d^4y}{d\theta^4},\ldots.$$

При помощи этихъ формулъ рѣшаются въ общемъ видѣ всѣ задачи теоріи рулеттъ. Въ настоящей замѣткѣ мы остановимся на разсмотрѣніи лишь того случая движенія фигуры, когда одна изъ точекъ ея описываетъ прямую линію.

Извѣстно, что въ такомъ случаѣ мгновенные центры четнаго порядка $C_2, C_4\ldots$ будутъ расположены на прямой, по

которой точка движется, а мгновенные центры нечетнаго порядка $C_1, C_3 \ldots$ — на другой прямой, перпендикулярной къ первой, при чемъ самая точка, описывающая прямую линію, находится въ ихъ пересѣченіи. Легко впрочемъ доказать, что необходимое и достаточное условіе прямолинейнаго движенія одной изъ точекъ фигуры будетъ заключаться только въ томъ, чтобы линія C_1C_3 была перпендикулярна къ линіи C_2C_4 при всякомъ углѣ вращенія θ. Выразивъ аналитически это условіе, будемъ имѣть:

$$(x_3-x_1)(x_4-x_2)+(y_3-y_1)(y_4-y_2)=0; \qquad (1)$$

но, на основаніи предъидущихъ формулъ,

$$x_2=x_1-\frac{dy_1}{d\theta}, \quad x_3=x_1-\frac{dy_1}{d\theta}-\frac{d^2x_1}{d\theta^2}, \quad x_4=x_1-\frac{dy_1}{d\theta}-\frac{d^2x_1}{d\theta^2}+\frac{d^3y_1}{d\theta^3},$$

$$y_2=y_1+\frac{dx_1}{d\theta}, \quad y_3=y_1+\frac{dx_1}{d\theta}-\frac{d^2y_1}{d\theta^2}, \quad y_4=y_1+\frac{dx_1}{d\theta}-\frac{d^2y_1}{d\theta_2}-\frac{d^3x_1}{d\theta^3};$$

слѣдовательно условіе (1) принимаетъ видъ:

$$\left(\frac{dy_1}{d\theta}+\frac{d^2x_1}{d\theta^2}\right)\left(\frac{d^2x_1}{d\theta^2}-\frac{d^3y_1}{d\theta^3}\right)=\left(\frac{dx_1}{d\theta}-\frac{d^2y_1}{d\theta^2}\right)\left(\frac{d^2y_1}{d\theta^2}+\frac{d^3x_1}{d\theta^3}\right), \qquad (2)$$

т. е. въ него будутъ входить только производныя координатъ x_1 и y_1 мгновеннаго центра C_1.

Означимъ черезъ u скорость 1-го порядка мгновеннаго центра C_1 или скорость точки прикосновенія полоиды и серполоиды по направленію ихъ общей касательной и черезъ λ—уголъ, образуемый этимъ направленіемъ съ осью Ox; тогда проекціи скорости 1-го порядка по осямъ координатъ будутъ

$$\frac{dx_1}{dt}=u\cos\lambda, \quad \frac{dy_1}{dt}=u\sin\lambda.$$

Проекціи скорости 2-го порядка или ускоренія мгновеннаго центра C_1 получатся черезъ диффеdefined ференцированіе предъидущихъ выраженій по времени:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\cos\lambda\frac{du}{dt}-u\sin\lambda\frac{d\lambda}{dt},\quad \frac{d^2y_1}{dt^2}=\sin\lambda\frac{du}{dt}+u\cos\lambda\frac{d\lambda}{dt};$$

но, означая черезъ ds элементъ дуги полоиды, а черезъ ρ — радіусъ кривизны ея въ точкѣ прикосновенія съ серполоидой, будемъ имѣть $\frac{d\lambda}{dt}=\frac{d\lambda}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{u}{\rho}$; слѣдовательно

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{du}{dt}\cos\lambda-\frac{u^2}{\rho}\sin\lambda,\quad \frac{d^2y_1}{dt^2}=\frac{du}{dt}\sin\lambda+\frac{u^2}{\rho}\cos\lambda.$$

Такимъ же образомъ найдемъ проекціи скорости 3-го порядка точки C_1 по осямъ координатъ:

$$\frac{d^3x_1}{dt^3}=\frac{d^2u}{dt^2}\cos\lambda-3\frac{u}{\rho}\frac{du}{dt}\sin\lambda+\frac{u^2}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}\sin\lambda-\frac{u^3}{\rho^2}\cos\lambda,$$

$$\frac{d^3y_1}{dt^3}=\frac{d^2u}{dt^2}\sin\lambda+3\frac{u}{\rho}\frac{du}{dt}\cos\lambda-\frac{u^2}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}\cos\lambda-\frac{u^3}{\rho^2}\sin\lambda,$$

или

$$\frac{d^3x_1}{dt^3}=\left(\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{u^3}{\rho^2}\right)\cos\lambda-\left(3\frac{u}{\rho}\frac{du}{dt}-\frac{u^2}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}\right)\sin\lambda,$$

$$\frac{d^3y_1}{dt^3}=\left(\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{u^3}{\rho^2}\right)\sin\lambda+\left(3\frac{u}{\rho}\frac{du}{dt}-\frac{u^2}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}\right)\cos\lambda.$$

Замѣтивъ, что $d\theta=\omega dt$, гдѣ ω — постоянная угловая скорость вращенія фигуры, и положивъ для краткости $\frac{u}{\omega}=z$, внесемъ предъидущія выраженія въ условіе (2); тогда, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій, получимъ результатъ независимый отъ λ:

$$z\left(1-\frac{z}{\rho}\right)\left[\frac{d^2z}{d\theta^2}+\frac{z^2}{\rho}\left(1-\frac{z}{\rho}\right)\right]=\frac{dz}{d\theta}\left[\left(1-3\frac{z}{\rho}\right)\frac{dz}{d\theta}+\frac{z^2}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}\right]$$

или

$$z\left(1-\frac{z}{\rho}\right)\frac{d^2z}{d\theta^2}-\left(1-3\frac{z}{\rho}\right)\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2-\frac{z^2}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}\frac{dz}{d\theta}+\frac{z^3}{\rho}\left(1-\frac{z}{\rho}\right)^2=0. \quad (3)$$

Такъ какъ во всякое мгновеніе уголъ вращенія фигуры равенъ алгебраической суммѣ угловъ смежности полоиды и серполоиды, то, предполагая, что эти кривыя обращены своею кривизною въ одну сторону (см. чер. 1), будемъ имѣть

$$d\theta=d\lambda'-d\lambda=ds\left(\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{\rho}\right),$$

гдѣ λ' есть уголъ, образуемый общей касательной полоиды и серполоиды съ осью $O'\xi$, и ρ'—радіусъ кривизны серполоиды въ точкѣ прикосновенія съ полоидой; слѣдовательно

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{\omega}{u}=\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{\rho}$$

или

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{\rho}. \quad (4)$$

Такимъ образомъ дифференціальное ур. (3) выражаетъ зависимость между кривизною полоиды и серполоиды въ томъ случаѣ, когда одна изъ точекъ фигуры движется по прямой линіи. Черезъ интегрированіе его можно, по данной зависимости между кривизною полоиды и серполоиды, найти уравненія обѣихъ кривыхъ.

Что касается положенія точки, описывающей прямую линію, то его достаточно опредѣлить для одного какого либо момента времени, напр. для начала движенія. Положимъ для простоты, что въ началѣ движенія, при $\theta=0$, подвижныя оси координатъ совпадаютъ съ неподвижными и общая касатель-

ная полоиды и серполоиды направлена по оси Ox, а общая нормаль ихъ — по оси Oy (чер. 2), тогда $x_1=0$, $y_1=0$ и $\lambda=\lambda'=0$; слѣдовательно, означая индексомъ 0 значенія u, z и ρ при $\theta=0$, будемъ имѣть:

$$\frac{dx_1}{dt}=u_0,\ \frac{d^2x_1}{dt^2}=\left(\frac{du}{dt}\right)_0,\ \frac{d^3x_1}{dt^3}=\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_0-\frac{u_0^3}{\rho_0^2},$$

$$\frac{dy_1}{dt}=0,\ \frac{d^2y_1}{dt^2}=\frac{u_0^2}{\rho_0^2},\ \frac{d^3y_1}{dt^3}=3\frac{u_0}{\rho_0}\left(\frac{du}{dt}\right)_0-\frac{u_0^2}{\rho_0^2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_0,$$

откуда

$$\frac{dx_1}{d\theta}=z_0,\ \frac{d^2x_1}{d\theta^2}=\left(\frac{dz}{d\theta}\right)_0,\ \frac{d^3x_1}{d\theta^3}=\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right)_0-\frac{z_0^3}{\rho_0^2},$$

$$\frac{dy_1}{d\theta}=0,\ \frac{d^2y_1}{d\theta^2}=\frac{z_0^2}{\rho_0^2},\ \frac{d^3y_1}{d\theta^3}=3\frac{z_0}{\rho_0}\left(\frac{dz}{d\theta}\right)_0-\frac{z_0^2}{\rho_0^2}\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)_0.$$

Внеся эти величины въ выраженія координатъ мгновенныхъ центровъ, найдемъ, что при $\theta=0$

$$x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=-\left(\frac{dz}{d\theta}\right)_0,\ x_4=-\left(\frac{dz}{d\theta}\right)_0+3\frac{z_0}{\rho_0}\left(\frac{dz}{d\theta}\right)_0-\frac{z_0^2}{\rho_0^2}\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)_0,$$

$$y_1=0,\ y_2=z_0,\ y_3=z_0\left(1-\frac{z_0}{\rho_0}\right),\ y_4=z_0\left(1-\frac{z_0}{\rho_0}\right)-\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right)_0+\frac{z_0^3}{\rho_0^2}.$$

Такимъ образомъ въ началѣ движенія мгновенный центръ 1-го порядка находится въ началѣ координатъ, а мгновенный центръ 2-го порядка—на оси y въ разстояніи z_0 отъ начала координатъ.

Такъ какъ точка P, описывающая прямую линію, находится въ пересѣченіи прямой C_1C_3 съ перпендикуляромъ, опущеннымъ на нее изъ точки C_2, то координаты ея при $\theta=0$ будутъ

$$\alpha=\frac{y_2x_3y_3}{x_3^2+y_3^2},\ \beta=\frac{y_2y_3^2}{x_3^2+y_3^2}.$$

Внеся сюда найденныя выше значенія координатъ C_1 и C_2, получимъ

$$\alpha=-\frac{z_0^2\left(1-\frac{z_0}{\rho_0}\right)\left(\frac{dz}{d\theta}\right)_0}{\left(\frac{dz}{d\theta}\right)_0^2+z_0^2\left(1-\frac{z_0}{\rho_0}\right)^2},\ \beta=\frac{z_0^3\left(1-\frac{z_0}{\rho_0}\right)^2}{\left(\frac{dz}{d\theta}\right)_0^2+z_0^2\left(1-\frac{z_0}{\rho_0}\right)^2} \quad (5)$$

Направленіе прямолинейнаго движенія точки P опредѣляется угломъ δ съ осью x, при чемъ

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{\left(\frac{dz}{d\theta}\right)_0}{z_0\left(1-\frac{z_0}{\rho_0}\right)}. \quad (6)$$

Если исключить $\left(\frac{dz}{d\theta}\right)_0$ между выраженіями α и β, то получится

$$\alpha^2+\beta^2=z_0\beta,$$

—уравненіе окружности, описанной на діаметрѣ C_1C_2, на которой находится точка P.

Перейдемъ къ интегрированію дифференціальнаго ур. (3) въ предположеніи, что зависимость между кривизною полоиды и серполоиды представляется въ видѣ $\frac{\rho'}{\rho}=f(\theta)$.

Съ этою цѣлію введемъ вспомогательное перемѣнное

$$t=-\frac{\frac{dz}{d\theta}}{z\left(1-\frac{z}{\rho}\right)};$$

тогда

$$\frac{dz}{d\theta}=-z\left(1-\frac{z}{\rho}\right)t$$

и

$$\frac{d^2z}{d\theta^2}=-z\left(1-\frac{z}{\rho}\right)\frac{dt}{d\theta}-t\left(1-2\frac{z}{\rho}\right)\frac{dz}{d\theta}-\frac{z^2}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}t$$

или

$$\frac{d^2z}{d\theta^2}=-z\left(1-\frac{z}{\rho}\right)\frac{dt}{d\theta}+z\left(1-\frac{z}{\rho}\right)\left(1-2\frac{z}{\rho}\right)t^2-\frac{z^2}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}t.$$

Внеся эти величины въ ур. (3), получимъ

$$\frac{dt}{d\theta}-\frac{z}{\rho}(1+t^2)=0,$$

откуда черезъ интегрированіе найдемъ

$$\operatorname{arctg}t=\int_0^\theta\frac{z}{\rho}d\theta+C_0,$$

гдѣ, по формулѣ (4), $\frac{z}{\rho}=\frac{\rho'}{\rho-\rho'}=\frac{f(\theta)}{1-f(\theta)}=F(\theta)$ есть извѣстная функція θ. Для опредѣленія произвольнаго постояннаго C_0 замѣтимъ, что при $\theta=0$, $t=\operatorname{tg}\delta$, какъ это видно изъ формулы (6); слѣдовательно $C_0=\delta$ и

$$\operatorname{arctg}t=\int_0^\theta\frac{z}{\rho}d\theta+\delta.$$

Послѣ этого будемъ имѣть

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{d\theta}=-t\left(1-\frac{z}{\rho}\right)=-\left(1-\frac{z}{\rho}\right)\operatorname{tg}\left(\delta+\int_0^\theta\frac{z}{\rho}d\theta\right),$$

откуда по интегрированіи найдемъ

$$z=Ce^{-\int_0^\theta\left(1-\frac{z}{\rho}\right)\operatorname{tg}\left(\delta+\int_0^\theta\frac{z}{\rho}d\theta\right)d\theta} \qquad (7)$$

гдѣ C—новое произвольное постоянное, представляющее значеніе z при $\theta=0$, т. е. разстояніе $z_0=C_1C_2$.

Зная z въ функціи θ, опредѣлимъ въ отдѣльности ρ и ρ' въ функціи θ. Чтобы получить уравненіе полоиды, замѣтимъ, что

$$\operatorname{tg}\lambda=\frac{dy_1}{dx_1} \text{ и } \frac{1}{\rho}=\frac{\frac{d^2y_1}{dx_1^2}}{\left[1+\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2\right]^{3/2}};$$

слѣдовательно,

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\frac{d\lambda}{dx_1}}{\cos^2\lambda\left[1+\operatorname{tg}^2\lambda\right]^{3/2}}=\cos\lambda\frac{d\lambda}{dx_1},$$

откуда

$$dx_1=\rho\cos\lambda d\lambda$$

и

$$dy_1=\operatorname{tg}\lambda dx_1=\rho\sin\lambda d\lambda.$$

Но $\frac{d\lambda}{d\theta}=\frac{1}{\rho}\frac{ds}{d\theta}=\frac{1}{\rho}\frac{u}{\omega}=\frac{z}{\rho}$ и $\lambda=\int_0^\theta\frac{z}{\rho}d\theta$, слѣдовательно

$$dx_1=z\cos\lambda d\theta,\ dy_1=z\sin\lambda d\theta.$$

Интегрируя эти выраженія и замѣчая, что при $\theta=0$, $x_1=0$ и $y_1=0$, найдемъ

$$x_1=\int_0^\theta z\cos\lambda d\theta,\ y_1=\int_0^\theta z\sin\lambda d\theta. \qquad (8)$$

Уравненіе полоиды получится черезъ исключеніе θ между этими выраженіями. Что касается уравненія серполоиды, то оно получается такимъ же образомъ. Означая координаты ея черезъ ξ_1 и η_1, будемъ имѣть:

$$d\xi_1=\rho'\cos\lambda' d\lambda',\ d\eta_1=\rho'\sin\lambda' d\lambda';$$

но $\frac{d\lambda'}{d\theta}=1+\frac{d\lambda}{d\theta}=1+\frac{z}{\rho}$ и $\lambda'=\int_0^\theta\left(1+\frac{z}{\rho}\right)d\theta$; поэтому

$$d\xi_1=\rho'\left(1+\frac{z}{\rho}\right)\cos\lambda' d\theta,\quad d\eta_1=\rho'\left(1+\frac{z}{\rho}\right)\sin\lambda' d\theta$$

или, на основаніи форм. (4),

$$d\xi_1=z\cos\lambda' d\theta,\quad d\eta_1=z\sin\lambda' d\theta.$$

Интегрируя эти выраженія и замѣчая, что при $\theta=0$, $\xi_1=0$ и $\eta_1=0$, получимъ

$$\xi_1=\int_0^\theta z\cos\lambda' d\theta,\quad \eta_1=\int_0^\theta z\sin\lambda' d\theta. \tag{9}$$

Уравненіе серполоиды будетъ результатъ исключенія θ между этими выраженіями.

Такъ какъ при $\theta=0$, $z_0=C$ и $\left(\frac{dz}{d\theta}\right)_0=-C\left(1-\frac{C}{\rho_0}\right)\text{tg}\delta$, то координаты точки, описывающей прямую линію, по форм. (5), будутъ

$$\alpha=C\sin\delta\cos\delta,\quad \beta=C\cos^2\delta,$$

при чемъ

$$\alpha^2+\beta^2=C\beta \text{ и } \frac{\alpha}{\beta}=\text{tg}\delta.$$

Замѣтимъ, что, не уменьшая общности формулы (7), можно принять въ ней $\delta=0$, т. е. расположить полоиду и серполоиду въ началѣ движенія такимъ образомъ, чтобы направленіе прямолинейнаго движенія было параллельно оси x, за исключеніемъ лишь слѣдующихъ двухъ частныхъ случаевъ, которые разсмотримъ отдѣльно.

1) Если $\frac{z}{\rho}=1$ или $\rho=2\rho'$, то $z=C$, $\lambda=\theta$ и $\lambda'=2\theta$; слѣдовательно по ур. (8)

$$x_1 = C\sin\theta, \quad y_1 = C(1-\cos\theta),$$

откуда

$$x_1^2 + (y_1 - C)^2 = C^2;$$

а по ур. (9)

$$\xi_1 = \frac{C}{2}\sin 2\theta, \quad \eta_1 = \frac{C}{2}(1-\cos 2\theta),$$

откуда

$$\xi_1^2 + \left(\eta_1 - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{4}.$$

Такимъ образомъ полоида есть окружность радіуса C, а серполоида — окружность вдвое меньшаго радіуса, имѣющая съ первою внутреннее прикосновеніе; на чертежѣ 3-мъ онѣ представлены въ начальномъ своемъ положеніи. Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ уголъ δ имѣетъ совершенно произвольную величину, то изъ уравненій

$$\alpha^2 + \beta^2 = C\beta \text{ и } \frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{tg}\delta$$

заключаемъ, что всякая точка серполоиды описываетъ прямую линію, проходящую черезъ центръ полоиды.

2) Если $\frac{z}{\rho} = 0$ или $\rho = \infty$, то $z = Ce^{-\theta \operatorname{tg}\delta}$, $\lambda = 0$ и $\lambda' = \theta$; слѣдовательно по ур. (8)

$$x_1 = \frac{C}{\operatorname{tg}\delta}(1 - e^{-\theta \operatorname{tg}\delta}), \quad y_1 = 0,$$

т. е. полоида есть прямая линія, совпадающая съ осью x; для опредѣленія серполоиды по ур. (9) имѣемъ

$$\xi_1 = C\int_0^\theta e^{-\theta \operatorname{tg}\delta}\cos\theta d\theta = C\cos^2\delta(\sin\theta - \operatorname{tg}\delta.\cos\theta)e^{-\theta \operatorname{tg}\delta} + C\sin\delta\cos\delta,$$

$$\eta_1 = C\int_0^\theta e^{-\theta \operatorname{tg}\delta}\sin\theta d\theta = -C\cos^2\delta(\cos\theta + \operatorname{tg}\delta\sin\theta)e^{-\theta \operatorname{tg}\delta} + C\cos^2\delta,$$

откуда

$$\sqrt{(\xi_1 - C\sin\delta\cos\delta)^2 + (\eta_1 - C\cos^2\delta)^2} = C\cos\delta e^{-\theta tg\delta}$$

и

$$\frac{\xi_1 - C\sin\delta\cos\delta}{\eta_1 - C\cos^2\delta} = -tg(\theta - \delta).$$

Черезъ исключеніе θ изъ послѣднихъ двухъ уравненій получимъ уравненіе логариѳмической спирали, касательная къ которой съ радіусомъ-векторомъ точки прикосновенія образуетъ уголъ $\frac{\pi}{2} - \delta$ (чер. 4). Координаты точки P, описывающей прямую линію, при $\theta = 0$ будутъ

$$\alpha = C\sin\delta\cos\delta, \ \beta = C\cos^2\delta,$$

слѣдовательно описывающая точка есть полюсъ спирали. Если примемъ $\delta = 0$, то получимъ

$$\xi_1^2 + (\eta_1 - C)^2 = C^2$$

и

$$\alpha = 0, \ \beta = C,$$

т. е. серполоида обращается въ окружность радіуса C, и описывающая прямую линію точка находится въ центрѣ этой окружности (чер. 5).

Положимъ вообще, что отношеніе кривизны полоиды и серполоиды въ каждой точкѣ прикосновенія имѣетъ постоянную величину, т. е. $\frac{\rho'}{\rho} = n$ и $\frac{z}{\rho} = \frac{n}{1-n} = m$; тогда по форм. (7), принимая въ ней $\delta = 0$, найдемъ

$$z = C\cos^{\frac{1}{m}-1} m\theta.$$

Такъ какъ при этомъ $\lambda = m\theta$ и $\lambda' = (m+1)\theta$, то ур. (8) и (9) обращаются въ слѣдующія

$$x_1=C\int_0^\theta \cos^{\frac{1}{m}-1} m\theta.\cos m\theta.d\theta=C\int_0^\theta \cos^{\frac{1}{m}} m\theta d\theta,$$

$$y_1=C\int_0^\theta \cos^{\frac{1}{m}-1} m\theta \sin m\theta d\theta=C(1-\cos^{\frac{1}{m}} m\theta)$$

и

$$\xi_1=C\int_0^\theta \cos^{\frac{1}{m}-1} m\theta \cos(m+1)\theta d\theta,$$

$$\eta_1=C\int_0^\theta \cos^{\frac{1}{m}-1} m\theta \sin(m+1)\theta d\theta.$$

При $\delta=0$, $\alpha=0$ и $\beta=C$, т. е. описывающая точка находится въ началѣ движенія на оси y въ разстояніи C отъ начала координатъ.

Приведемъ въ заключеніе нѣсколько примѣровъ.

Положимъ, что серполоида есть прямая линія, т. е., $\rho'=\infty$; тогда $n=\infty$ и $m=-1$, слѣдовательно

$$x_1=C\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos\theta}=Clgtg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right),$$

$$y_1=C\left(1-\frac{1}{\cos\theta}\right),$$

откуда, черезъ исключеніе θ, получимъ

$$C-y_1=\frac{C}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

т. е. полоида будетъ цѣпная линія, расположенная, въ началѣ движенія, какъ показано на чертежѣ 6-мъ; описывающая точка P находится на оси цѣпной линіи въ разстояніи C отъ вершины.

Положимъ, что полоида и серполоида представляютъ тождественныя кривыя, касающіяся въ соотвѣтствующихъ точкахъ

и обращенныя кривизною въ противоположныя стороны, т. е. $\rho'=-\rho$; тогда $n=-1$ и $m=-\frac{1}{2}$, слѣдовательно

$$x_1=C\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=2C\text{tg}\frac{\theta}{2},\qquad \xi_1=C\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=2C\text{tg}\frac{\theta}{2}$$

$$y_1=C\left(1-\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)=-C\text{tg}^2\frac{\theta}{2},\qquad \eta_1=C\int_0^\theta \frac{\sin\frac{\theta}{2}d\theta}{\cos^3\frac{\theta}{2}}=C\text{tg}^2\frac{\theta}{2};$$

исключая θ между этими уравненіями, получимъ

$$x_1{}^2=-4Cy_1 \quad \text{и} \quad \xi_1{}^2=4C\eta_1\,,$$

Такимъ образомъ парабола, катясь по равной съ нею, но обратно расположенной параболѣ, фокусомъ своимъ P описываетъ прямую линію, перпендикулярную къ оси неподвижной параболы (чер. 7). Замѣтимъ, что это — единственная пара тождественныхъ кривыхъ, удовлетворяющихъ условіямъ задачи.

Положимъ еще, что $n=\frac{1}{3}$ и $m=\frac{1}{2}$, тогда будемъ имѣть

$$x_1=C\int_0^\theta \cos^2\frac{\theta}{2}d\theta=\frac{C}{2}(\theta+\sin\theta),$$

$$y_1=C\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)=\frac{C}{2}(1-\cos\theta)$$

и

$$\xi_1=C\int_0^\theta \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}d\theta=\frac{C}{2}\sin\theta(1+\cos\theta),$$

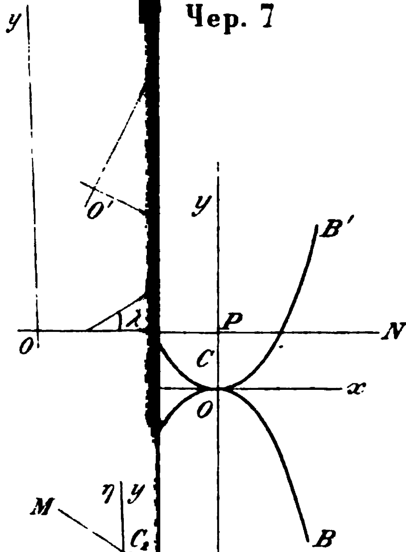
$$\eta_1=C\int_0^\theta \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}d\theta=\frac{C}{2}(1-\cos\theta+\sin^2\theta).$$

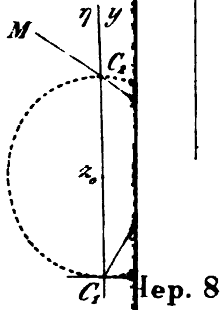
Исключая θ между выраженіями x_1 и y_1, получимъ уравненіе циклоиды, діаметръ образующаго круга которой равенъ C; а исключая θ между выраженіями ξ_1 и η_1 получимъ уравненіе эпициклоиды, которая образуется при катящемся движеніи круга діаметра $\frac{C}{2}$ по кругу того же діаметра. Послѣдняя кривая получается также черезъ продолженіе радіусовъ-векторовъ окружности изъ полюса P, взятаго на окружности, на постоянную величину, равную ея діаметру $\frac{C}{2}$, и по внѣшнему своему виду называется кардіоидой. Эти двѣ кривыя—циклоида и кардіоида—представлены на чертежѣ 8-мъ въ своемъ начальномъ положеніи; описывающая точка находится въ полюсѣ кардіоиды P.

Подобнымъ образомъ, выбирая произвольно $\frac{\rho'}{\rho}=f(\theta)$, можно получить сколько угодно паръ кривыхъ, которыя, будучи приняты за полоиду и серполоиду, доставляютъ прямолинейное движеніе точки.

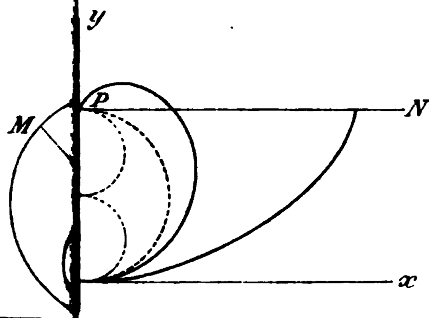
Одесса.
24 авг. 1883.

Чер. 7





Чер. 8



ПРОТОКОЛЫ

засѣданій математическаго отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей съ 23-го марта по 16-ое декабря 1883 г.

Засѣданіе 23-го марта 1883 г.

Присутствовали, подъ предсѣдательствомъ В. Н. Лигина, члены: Бучинскій, Васильевъ, Видгальмъ, Габбе, Каминскій, Клоссовскій, Кононовичъ, Корвацкій, Меликовъ, Репяховъ, Спиро, Старковъ, Умовъ и Шведовъ.

А. Г. Геричъ сдѣлалъ сообщеніе *о такъ называемыхъ явленіяхъ радіофоніи.*

Засѣданіе 5-го апрѣля 1883 г.

Присутствовали, подъ предсѣдательствомъ В. Н. Лигина, члены: Вейнштейнъ, Габбе, Кононовичъ, Клоссовскій, Умовъ, Шведовъ и Репяховъ.

А. Г. Геричъ сдѣлалъ сообщеніе *о попыткахъ къ объясненію явленій радіофоніи.*

Засѣданіе 21-го октября 1883 г.

Присутствовали, подъ предсѣдательствомъ В. Н. Лигина, члены: Умовъ, Клоссовскій, Кононовичъ, Слешинскій, Старковъ, Каминскій, Гохманъ, Габбе, Мелятицкій.

1. Х. Л. Гохманъ сдѣлалъ сообщеніе *о фотометрическихъ измѣреніяхъ классныхъ комнатъ и о приборѣ для такихъ измѣреній.*

Въ преніяхъ, возникшихъ по поводу этого сообщенія, принимали участіе гг. Каминскій, Умовъ, Старковъ, Кононовичъ, Слешинскій и Габбе.

2. Происходило избраніе секретаря математическаго отдѣленія, при чемъ оказался избраннымъ единогласно В. Н. Габбе.

3. По предложенію г. предсѣдателя постановлено: обратиться въ Московское Политехническое Общество, въ физико-математическую секцію Казанскаго Общества Естествоиспытателей и въ редакцію Математическаго Листка съ предложеніемъ вступить въ постоянный обмѣнъ изданіями.

Засѣданіе 16-го декабря 1883 г.

Присутствовали, подъ предсѣдательствомъ В. Н. Лигина, члены: Умовъ, Кононовичъ, Клоссовскій, Слешинскій, Габбе, Старковъ, Рябковъ, Милятицкій, Гохманъ.

1. Была доложена просьба г. Сулинскаго о разсмотрѣніи его способа для дѣленія угла на три равныя части циркулемъ и линейкой. Проф. Лигинъ изложилъ построеніе г. Сулинскаго и показалъ, что невѣрность его заключается въ томъ, что уголъ, дѣлящійся этимъ пріемомъ на три равныя части, не равенъ тому углу, который требуется раздѣлить на три равныя части. И. В. Слешинскій изложилъ основанія общаго доказательства невозможности рѣшить задачу о трисекціи угла. Затѣмъ были приведены нѣкоторыми изъ присутствующихъ еще другія соображенія, убѣждающія въ ошибочности способа г. Сулинскаго. Г. Сулинскій представилъ свои возраженія и до-

казательства, повторяющія лишь сказанное въ внесенной имъ на разсмотрѣніе Общества запискѣ. По предложенію г. предсѣдателя постановлено: не принимать впредь на разсмотрѣніе рѣшеній задачъ о трисекціи угла, объ удвоеніи куба, о квадратурѣ круга и о perpetuum mobile.

2. И. М. Занчевскій сдѣлалъ сообщеніе *о трехшестной сочлененной системѣ.*

3. В. Н. Лигинъ демонстрировалъ построенную университетскимъ механикомъ Тимченко модель новаго аппарата для повѣрки законовъ паденія тѣлъ, описаннаго Пакэ въ Journal de Physique (t. II, p. 226—228, Mai 1883) и указаннаго въ принципѣ еще Бартоли въ Nuovo Cimento (t. X, p. 14—19, an. 1873).

ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ VI.

СОДЕРЖАНІЕ:

ОДЕССА.
ТИПОГРАФІЯ «ОДЕССКАГО ВѢСТНИКА», КРАСНЫЙ ПЕРЕУЛОКЪ, Д. № 3.
1885.

Изданія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей въ Одессѣ:

Томъ I. Весь распроданъ. Осталось только второе приложеніе къ первому тому, заключающее статью *Э. Линдемана*: «Списокъ употребительнѣйшихъ растеній Херсонской флоры». 1872 г. Цѣна этого приложенія 30 к.

Томъ II. Вып. первый весь распроданъ.

Вып. второй. *Л. Ришави.* Къ исторіи развитія Porphyra leucosticta Thur. *И. Синцовъ.* Дополнительная замѣтка къ статьѣ геологическій очеркъ Саратовской губерніи. *Н. Гребницкій.* Предварительное сообщеніе о сродствѣ фауны Чернаго моря (съ одн. табл.). *Н. Гребницкій.* Матеріалы для фауны Новороссійскаго края: а) карцинологическія замѣтки о фаунѣ Чернаго моря и его бассейна (съ 3 табл.); b) о новомъ родѣ грегарины, живущей въ кишечномъ каналѣ Scolopendra cingulata (съ табл.); с) къ фаунѣ открытыхъ лимановъ; d) о новомъ фактѣ паразитизма (съ табл.). *В. Шманкевичъ.* О безпозвоночныхъ животныхъ лимановъ, находящихся вблизи Одессы (съ табл.). 1873 г. Цѣна 1 р. 50 к.

Вып. третій. *Л. Ришави.* Альгологическія изслѣдованія (съ 2-мя табл.). *Н. Срединскій.* Очеркъ растительности Ріонскаго бассейна. 1874 г. Цѣна 1 р. 20 к.

Томъ III. Вып. первый. *Р. Прендель.* Сарматскія образованія Севастополя и его окрестностей (съ 2-мя табл.). *И. Синцовъ.* Отчетъ о геологическихъ изслѣдованіяхъ въ Бессарабіи, въ 1873 г. *В. Репяховъ.* Отчетъ о зоологическихъ изслѣдованіяхъ въ Крыму лѣтомъ 1875 г. 1875 г. Цѣна 60 к.

Вып. второй. *И. Синцовъ.* Описаніе новыхъ и малоизслѣдованныхъ формъ раковинъ изъ третичныхъ образованій Новороссіи (съ 4-мя таблиц.). Двѣ статьи. *И. Шманкевичъ.* Нѣкоторыя ракообразныя солоно-озерныхъ и прѣсныхъ водъ и отношеніе ихъ къ средѣ (съ 5 табл.). 1875 г. Цѣна 2 р. 50 к.

Томъ IV. Вып. 1-й. *А. Тегартенъ.* О бензойныхъ смолахъ. *Р. Прендель.* Геологическій очеркъ мѣловой формаціи Крыма и слоевъ переходныхъ отъ этой формаціи къ эоценовымъ образованіямъ (съ 4 табл.). *В. Репяховъ.* Отчетъ объ экскурсіяхъ въ Архипелагѣ 1875 г. *И. Вильгельмъ.* Отчетъ объ антропологическихъ экскурсіяхъ, произведенныхъ лѣтомъ 1875 г. *И. Синцовъ.* Предварительное сообщеніе о новыхъ и малоизслѣдованныхъ формахъ раковинъ изъ третичныхъ образованій Новороссіи. *И. Синцовъ.* Нѣсколько словъ о Belemnites Zitteli. *Ил. Мечниковъ.* Изслѣдованіе о превращеніи аксолотовъ. *В. Шманкевичъ* Объ отношеніи рода Anisonema Dujard къ солоно-озерной Diselmis Dunalii Dujard. 1876 г. Цѣна 1 р. 20 к.

Вып. 2-й. *Н. Кеннель.* Thompsonia sinensis, новый видъ Сукторіи (съ 2-мя табл.). *В. Репяховъ.* Замѣтка о развитіи головнаго ганглія при безполовомъ размноженіи Олигохетъ. *Ил. Мечниковъ.* Изслѣдованія о губкахъ. *К. Бородинъ.* Альгологическая экскурсія въ окрестностяхъ г. Херсона и въ мѣстностяхъ, лежащихъ внизъ по Днѣпру отъ Херсона. 1877 г. Цѣна 80 к.

Томъ V. Вып. 1-й. *Ил. Мечниковъ.* О пищеварительныхъ органахъ прѣсноводныхъ турбелларій. *Его-же.* Изслѣдованіе о развитіи планарій. *И. Синцовъ.* Описаніе нѣкоторыхъ видовъ мезозойскихъ окаменѣлостей изъ Симбирской и Саратовской губ. *Его-же.* Описаніе новыхъ и малоизслѣдованныхъ формъ раковинъ изъ третичныхъ образованій Новороссіи. *Его-же.* Замѣтка по поводу статьи проф. Траутшольда: «Ueber Kreidefossilien Russlands». *Л. Ришави.* Къ вопросу о дыханіи растеній. *В. Репяховъ.* Взглядъ на современное состояніе вопроса о зародышевыхъ пластахъ. 1877 г. Цѣна 1 р. 50 к.

Вып. 2-й. *Е. Клименко.* Матеріалы для исторіи молочной и пировиноградной кислоты. *Р. Прендель.* Отчетъ о результатахъ экскурсіи, произведенной лѣтомъ 1877 г. въ Подольск. губ. *Л. Ришави.* Отчетъ объ экскурсіи въ Севастопольской бухтѣ въ 1878 г. *Р. Прендель.* Отчетъ о результатахъ экскурсіи, произвед. лѣтомъ 1878 г. по прибрежной полосѣ Абхазіи и Черноморскаго округа. 1879 г. Цѣна 75 к.

Томъ VI. Вып. 1-й. *И. Синцовъ.* О мѣловыхъ губкахъ Сарат. губ. (съ 6 табл.). *О. Мечникова.* О тазовой и плечевой дугѣ хрящевыхъ рыбъ. *Е. Клименко.* Матеріалы для исторіи молочной и пировиноградной кисл.

ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ VI.

ОДЕССА.
ТИПОГРАФІЯ «ОДЕССКАГО ВѢСТНИКА», КРАСНЫЙ ПЕРЕУЛОКЪ, Д. № 3.
1885.

Печатано по опредѣленію Совѣта Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.
Секретарь Общества *П. Бучинскій*.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Приложеніе.

Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія.

Н. Я. Сонина.

Въ статью г. Старкова «Къ вопросу о поверхности наименьшаго сопротивленія при движеніи въ несжимаемой жидкости», помѣщенную въ V томѣ Записокъ Математическаго Отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей, вошли двѣ неправильности, вслѣдствіе которыхъ не могутъ имѣть мѣста найденные авторомъ результаты. Одна неправильность вошла при аналитической постановкѣ задачи, другая заключается въ самомъ способѣ рѣшенія.

Задача состоитъ въ опредѣленіи меридіана тѣла вращенія, которое, имѣя данный объемъ, испытываетъ наименьшее сопротивленіе при своемъ движеніи въ жидкой средѣ параллельно оси вращенія.

Г. Старковъ говоритъ (стр. 7—8): «условіе, чтобы поверхность вращенія заключала данный объемъ, можетъ быть замѣнено *равнозначительнымъ* условіемъ, чтобы кривая вращенія образовала... съ осью вращенія... данную площадь,... именно, чтобы $\Pi=\int_{x_1}^{x_0} y dx$», гдѣ Π данное постоянное. Это положеніе очевидно невѣрно. Примѣръ: прямая длины a, параллельная оси и отстоящая отъ нея на длину h, будетъ ограничивать площадь ah и образуетъ цилиндръ, котораго объемъ равенъ $\pi a h^2$; другая прямая длины a' на разстояніи h' ограничитъ пло-

щадь $a'h'$ и образуетъ цилиндръ съ объемомъ $\pi a'h'^2$; здѣсь, очевидно, равенство площадей исключаетъ равенство объемовъ. Такимъ образомъ при правильной постановкѣ задачи слѣдуетъ принять, что не $\int_{x_0}^{x_1} y dx$, а интегралъ $\int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$ имѣетъ данную величину.

Другая неправильность состоитъ въ слѣдующемъ. Г. Старковъ съ полнымъ правомъ, хотя и не совсѣмъ удачно, выбираетъ за независимую перемѣнную дугу s искомой кривой. При этомъ выборѣ перемѣнной *безусловно-необходимо* разсматривать координаты x и y какъ двѣ неизвѣстныя функціи s, связанныя уравненіемъ

$$(1) \qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - 1 = 0,$$

и искать выраженія обѣихъ функцій. Однако уравненіе (1) въ анализѣ г. Старкова не играетъ никакой роли. Правда, онъ пользуется этимъ уравненіемъ для приведенія $\int_{x_0}^{x_1} y dx$ къ виду $\int_{s_0}^{s_1} y\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2} ds$; но и послѣ этого приведенія разсматриваемое уравненіе не перестаетъ существовать и отнюдь *не дѣлается излишнимъ*, такъ какъ для опредѣленія кривой *неизбѣжно* приходится опять къ нему обратиться. Опуская это уравненіе, г. Старковъ занимается въ сущности рѣшеніемъ слѣдующей задачи варіаціоннаго исчисленія: найти minimum интеграла $\int_{x_0}^{x_1} y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 dx$ при условіи, что $\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ имѣетъ данную величину, — задачи, которая не имѣетъ никакого отношенія къ той, которую г. Старковъ желалъ рѣшить (здѣсь я умышленно замѣнилъ букву s буквою x). Г. Старковъ не могъ считать повидимому исчерпаннымъ значеніе уравненія (1) только потому, что онъ воспользовался этимъ уравненіемъ для преобразованія интеграла $\int_{x_0}^{x_1} y dx$; на стр. 47 онъ самъ

замѣчаетъ, что полученная имъ кривая должна обратиться въ кривую Ньютона при $A=0$, но такъ какъ A служитъ множителемъ при только что написанномъ интегралѣ, то отсюда слѣдовало бы, что задачу Ньютона, т. е. опредѣленіе абсолютнаго минимума интеграла $\int_{s_0}^{s_1} y \left(\frac{dy}{ds}\right)^3 ds$, можно рѣшать безъ употребленія уравненія (1), выражающаго, что подъ s понимается дуга искомой кривой. Доставляетъ ли однако дѣйствительно кривая г. Старкова кривую Ньютона? На стр. 47 онъ это утверждаетъ; но на стр. 85 приведено дифференціальное уравненіе кривой Ньютона въ видѣ $y=C_1 \frac{(1+p^2)^2}{p^3}$, гдѣ $p=\frac{dy}{dx}$; а на слѣдующей страницѣ г. Старковъ выводитъ изъ своихъ формулъ при $A=0$ для той же кривой уравненіе $y=\frac{C_1}{2}\frac{1}{u^3}$, которое при посредствѣ равенства $p=u\sqrt{1+p^2}$ (стр. 9) обращается въ $y=\frac{C_1}{2}\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3}$: изъ сравненія двухъ этихъ уравненій г. Старковъ могъ бы убѣдиться въ невѣрности своего рѣшенія задачи; но онъ, повидимому, не дѣлаетъ повѣрокъ и на стр. 87 даетъ въ замкнутой формѣ конечное уравненіе кривой Ньютона, которое, однако, не удовлетворяетъ дифференціальному. Да и какъ можетъ сомкнутая кривая, которую старается найти г. Старковъ (стр. 6), обратиться въ разомкнутую Ньютона?

Чтобы мнѣ не сказали: la critique est aisée, mais l'art est difficile, я считаю нужнымъ представить правильное рѣшеніе поставленной г. Старковымъ задачи. Я долженъ впрочемъ оговориться, что, не наведя надлежащихъ справокъ, я не могу утверждать, что предлагаемое мною рѣшеніе не было опубликовано кѣмъ-нибудь ранѣе. Во всякомъ случаѣ я не склоненъ искать въ своемъ рѣшеніи указаній для формы подводныхъ судовъ, а предпочитаю относиться къ нему какъ къ хорошему упражненію въ варіаціонномъ исчисленіи.

Избирая дугу s искомой кривой за перемѣнную независимую, мы приводимъ вышепоставленную задачу къ опредѣленію относительнаго минимума интеграла $\int_{s_0}^{s_1} y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3 ds$ при условіяхъ, выражаемыхъ уравненіями (1) и

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx = \int_{s_0}^{s_1} y^2 \frac{dx}{ds} ds = \text{данной величинѣ.}$$

Если означимъ черезъ x' и y' производныя x и y по s, черезъ α неопредѣленное постоянное и черезъ λ неопредѣленную функцію s, то задача приведется къ отысканію абсолютнаго минимума интеграла $\int_{s_0}^{s_1} V ds$, гдѣ $V = yy'^3 + \alpha y^2 x' + \lambda(x'^2 + y'^2 - 1)$. Эта послѣдняя задача, какъ извѣстно, зависитъ отъ интеграціи дифференціальныхъ уравненій

$$(3) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{ds}\frac{\partial V}{\partial x'} = 0, \qquad (4) \qquad \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{ds}\frac{\partial V}{\partial y'} = 0,$$

которыя, не заключая явно s, имѣютъ интегралъ

$$(5) \qquad V - x'\frac{\partial V}{\partial x'} - y'\frac{\partial V}{\partial y'} = \text{пост. } K.$$

Такъ какъ въ выраженіе варіаціи $\int_{s_0}^{s_1} V ds$ входитъ членъ

$$\Big|_{s_0}^{s_1}\left(V - x'\frac{\partial V}{\partial x'} - y'\frac{\partial V}{\partial y'}\right)\delta s,$$

который, на основаніи (5), приводится къ $K\delta(s_1 - s_0)$, и такъ какъ длина дуги $s_1 - s_0$ искомой кривой не подлежитъ никакому ограниченію, то необходимо принять $K = 0$, послѣ чего уравненіе (5) доставитъ $\lambda = -yy'^3$. Кромѣ того, уравненіе (3), въ которомъ $\frac{dV}{dx} = 0$, интегрируется непосредственно и достав-

имѣетъ $ay^2+2\lambda x'=-c$, откуда, исключая λ, получимъ

(6) $$ay^2+c=2yx'y'^3.$$

Это уравненіе, въ соединеніи съ (1), опредѣляетъ искомую кривую. Ея обыкновенное дифференціальное уравненіе (между координатами) получится чрезъ исключеніе ds между (1) и (6), для чего достаточно въ этомъ послѣднемъ написать

$$x'y'^3=\frac{dx\,.\,dy^3}{ds^4}=\frac{dx\,.\,dy^3}{(dx^2+dy^2)^2}=\frac{p^3}{(1+p^2)^2},$$

гдѣ $p=\frac{dy}{dx}$. Послѣ этого искомое уравненіе кривой будетъ

(7) $$ay^2+c=\frac{2yp^3}{(1+p^2)^2}.$$

Замѣтимъ, что къ этому уравненію можно придти гораздо проще и непосредственно, принимая съ самаго начала координату x за независимую перемѣнную. Въ такомъ случаѣ $y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3ds$ превращается въ $\frac{ydy^3}{ds^2}=\frac{ydy^3}{dx^2+dy^2}=\frac{yp^3dx}{1+p^2}$ и задача приводится къ отысканію относительнаго минимума интеграла $\int_{x_0}^{x_1}\frac{yp^3dx}{1+p^2}$ при условіи (2), или абсолютнаго минимума интеграла $\int_{x_0}^{x_1}Udx$, гдѣ

$$U=\frac{yp^3}{1+p^2}+ay^2.$$

Означая черезъ y_0 и y_1, p_0 и p_1 предѣльныя значенія y и p, будемъ имѣть

(8) $$\delta\int_{x_0}^{x_1}Udx=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial U}{\partial p}\right)\delta y\,dx+$$

$$\left(U-p\frac{\partial U}{\partial p}\right)_1\delta x_1-\left(U-p\frac{\partial U}{\partial p}\right)_0\delta x_0+\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_1\delta y_1-\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_0\delta y_0,$$

отсюда получимъ дифференціальное уравненіе $\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial U}{\partial p}=0$, котораго первый интегралъ будетъ $U-p\frac{\partial U}{\partial p}=-c$, что совпадаетъ съ уравненіемъ (7). При посредствѣ этого интеграла варіація (8) обратится въ

$$(9)\quad \delta\int_{x_0}^{x_1}Udx=-c\delta(x_1-x_0)+\frac{2y_1p_1^2(3+p_1^2)}{(1+p_1^2)^2}\delta y_1-\frac{2y_0p_0^2(3+p_0^2)}{(1+p_0^2)^2}\delta y_0.$$

Изъ уравненія (7) находимъ

$$(10)\qquad ay=\frac{p^3\pm\sqrt{p^6-ac(1+p^2)^4}}{(1+p^2)^2},$$

и, называя черезъ h произвольную постоянную, будемъ имѣть

$$a(x-h)=\int\frac{ady}{p}=\frac{ay}{p}+\int\frac{ay\,dp}{p^2},$$

откуда

$$(11)\ a(x-h)=\frac{1}{2}\frac{p^2-1}{(1+p^2)^2}\pm\frac{\sqrt{p^6-ac(1+p^2)^4}}{p(1+p^2)^2}\pm\int\frac{\sqrt{p^6-ac(1+p^2)^4}}{(1+p^2)^2}\frac{dp}{p^2}.$$

Уравненія (10) и (11) опредѣляютъ координаты кривой, которой дифференціальное уравненіе есть (7). При $a=0$, какъ уравненіе (7), такъ и (10) и (11), при нижнемъ знакѣ радикала, доставятъ кривую Ньютона.

Чтобы видѣть при какихъ значеніяхъ параметровъ и какою своею частью найденная кривая будетъ дѣйствительно удовлетворять условію минимума, необходимо разсмотрѣть знакъ $\frac{\partial^2 U}{\partial p^2}$ и изслѣдовать совокупность значеній отношенія $\frac{\partial y}{\partial c}:\frac{\partial y}{\partial h}$. По поводу этого послѣдняго сдѣлаемъ слѣдующее общее замѣчаніе.

Если U не содержитъ x, то дифференціальное уравненіе

$U-p\frac{\partial U}{\partial p}=-c$ доставитъ $y=\varphi(p,c)$ и мы получимъ, какъ выше,

$$x-h=\frac{\varphi(p,c)}{p}+\int_{p_0}^{p}\frac{\varphi(p,c)dp}{p^2},$$

гдѣ p_0 произвольная величина. Въ конечной формѣ уравненіе кривой, очевидно, будетъ имѣть видъ $y=\Phi(x-h,\ c)$, откуда $\frac{\partial y}{\partial h}=-\frac{\partial y}{\partial x}=-p$. Далѣе получимъ $\frac{\partial y}{\partial c}=\frac{\partial\varphi}{\partial c}+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial c}$, гдѣ $\frac{\partial p}{\partial c}$ должна быть вычислена изъ выраженія $x-h$, которое доставляетъ

$$0=\frac{1}{p}\frac{\partial\varphi}{\partial c}+\frac{1}{p}\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial c}+\frac{\partial}{\partial c}\int_{p_0}^{p}\frac{\varphi(p,c)dp}{p^2}.$$

Отсюда найдемъ $\frac{\partial y}{\partial c}=-p\frac{\partial}{\partial c}\int_{p_0}^{p}\frac{\varphi(p,c)dp}{p^2}$ и слѣдовательно

$$\frac{\partial y}{\partial c}:\frac{\partial y}{\partial h}=\frac{\partial}{\partial c}\int_{p_0}^{p}\frac{\varphi(p,c)dp}{p^2}.$$

Замѣтимъ, что послѣдній интегралъ равенъ $x-h-\frac{y}{p}$ и представляетъ считаемую отъ точки $(x=h,\ y=0)$ абсциссу точки пересѣченія касательной къ кривой съ осью x; такъ что когда $\varphi(p,c)$ приводится къ произведенію $\sigma(c)\psi(p)$, какъ это имѣетъ мѣсто напримѣръ для цѣпной линіи и циклоиды, $\frac{\partial y}{\partial c}:\frac{\partial y}{\partial h}$ представляется произведеніемъ упомянутой абсциссы на постоянную величину, каковое обстоятельство позволяетъ представить въ наглядной геометрической формѣ условія существованія дѣйствительнаго минимума.

Возвращаясь къ нашей задачѣ, мы безъ труда найдемъ

$$\frac{\partial^2 U}{\partial p^2}=\frac{2yp(3-p^2)}{(1+p^2)^3},$$

откуда для минимума получимъ условіе (при положительной ординатѣ) $p(3-p^2)=p(\sqrt{3}+p)(\sqrt{3}-p)>0$,

(12) или $0<p<\sqrt{3}$, или $p<-\sqrt{3}$.

Далѣе

$$\frac{\partial y}{\partial c}:\frac{\partial y}{\partial h}=\mp\frac{1}{2}\int\frac{(1+p^2)^2}{\sqrt{p^6-ac(1+p^2)^2}}\,\frac{dp}{p^2},$$

и это выраженіе въ предѣлахъ измѣненія p не должно получать всѣхъ возможныхъ значеній отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Но съузимъ нашу задачу и ограничимся опредѣленіемъ кривой, которая можетъ описать сомкнутую поверхность. Такая кривая должна имѣть точки на оси вращенія x; а такъ какъ изъ уравненія (7) слѣдуетъ, что

$$ay+\frac{c}{y}=\frac{2p^3}{(1+p^2)^2},$$

и вторая часть никогда при дѣйствительномъ p не обращается въ безконечность, то мы приходимъ къ заключенію, что сомкнутая кривая можетъ получиться только при $c=0$. Въ этомъ предположеніи формулы (10) и (11) доставятъ (при верхнемъ знакѣ радикала)

(13) $$a(x-h)=\frac{p^2-1}{(1+p^2)^2},\quad ay=\frac{2p^3}{(1+p^2)^2}$$

и $$\frac{\partial y}{\partial c}:\frac{\partial y}{\partial h}=-\frac{1}{2}\int(1+p^2)^2\frac{dp}{p^5}.$$

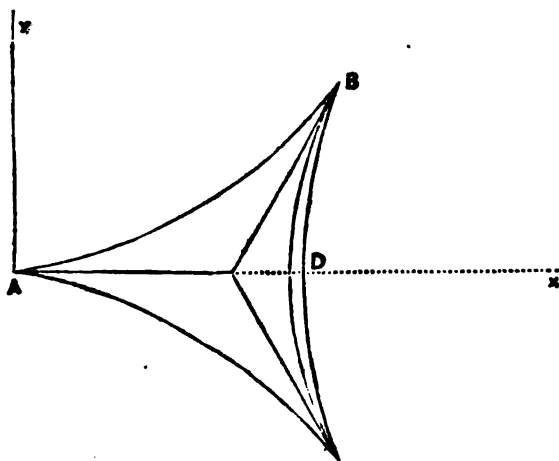
Формулы (13) представляютъ уникурсальную кривую четвертаго порядка. Мы получимъ полное представленіе объ ея формѣ, изучая гомотетичную кривую, соотвѣтствующую $a=1$, $h=1$, которой координаты будутъ

(14) $$x=\frac{p^2+3}{(1+p^2)^2}p^2,\quad y=\frac{2p^3}{(1+p^2)^2},$$

гдѣ, какъ прежде, $p=\frac{dy}{dx}$. Уравненіе разсматриваемой кривой будетъ

(15) $$4(x^2+y^2)^2-4x(x^2+9y^2)+27y^2=0$$

Она имѣетъ три точки возврата $(0,0)$, $\left(\frac{9}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$, $\left(\frac{9}{8}, -\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$, въ которыхъ касательныя суть ось x и двѣ прямыя, составляющія съ осью x уголъ въ 60^0 по обѣ ея стороны. Такимъ образомъ касательныя въ точкахъ возврата суть три луча,



составляющіе между собою углы въ 120^0, и на нихъ точки возврата лежатъ въ разстояніи $\frac{3}{4}$ отъ центра лучей. Если центръ лучей примемъ за полюсъ, то полярное уравненіе кривой будетъ

(16) $$r^4+2r^3.\cos 3\varphi+\frac{9}{8}r^2-\frac{27}{256}=0,$$

откуда видно, что три вѣтви кривой, заключенныя между лучами, тождественны между собою. Окружность, касающаяся къ кривой въ двухъ точкахъ возврата, имѣетъ радіусъ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ и пересѣкаетъ продолженіе третьяго луча на разстояніи $\frac{6-3\sqrt{3}}{4}$

отъ центра лучей, тогда какъ точка пересѣченія кривой лежитъ на разстояніи $\frac{1}{4}$ и радіусъ кривизны ея въ этой точкѣ равенъ 2. На фигурѣ за линейную единицу приняты 4 сантиметра и тонкимъ штрихомъ означена касательная окружность.

Обращаемся къ изслѣдованію минимума. Мы можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ положительныхъ значеній y и такъ какъ мы разсматриваемъ минимумъ абсолютной величины сопротивленія, то въ выраженіи элементарнаго сопротивленія должны принять $p>0$. При этомъ, какъ видно изъ выраженія (13), a будетъ положительно. Выраженіе $\frac{\partial y}{\partial c}:\frac{\partial y}{\partial h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4p^4}+\frac{1}{p^2}-\log p\right)$, убывая отъ $+\infty$ до $\frac{1}{2}\left(\frac{13}{36}-\frac{1}{2}\log 3\right)$, при измѣненіи p отъ 0 до $\sqrt{3}$, не получаетъ всѣхъ возможныхъ значеній, слѣдовательно минимумъ дѣйствительно имѣетъ мѣсто. Въ выраженіи (9) первый членъ исчезаетъ вслѣдствіе $c=0$ и варіація будетъ зависѣть только отъ измѣненія конечныхъ значеній y, такъ что если эти послѣднія даны, то варіація обратится въ нуль. На этомъ основаніи можемъ сказать, что *изъ всѣхъ кривыхъ, конечныя точки которыхъ лежатъ на двухъ данныхъ параллеляхъ оси вращенія* ($y=y_0$ *и* $y=y_1$), *поверхность, заключающую данный объемъ и испытывающую наименьшее сопротивленіе, опишетъ отрѣзокъ кривой, подобной вѣтви* AB. При тѣхъ же условіяхъ отрѣзокъ кривой, подобной вѣтви BD, опишетъ поверхность наибольшаго сопротивленія, такъ какъ вдоль $BD\ \frac{\partial^2 U}{\partial p^2}<0$.

Эти результаты относятся къ тому случаю, когда сравниваемыя тѣла вращенія ограничены одинаковыми кругами (πy_0^2 и πy_1^2) съ того и другаго конца. Если данный объемъ есть P, то, какъ легко найти, будемъ имѣть

$$(17)\quad P=\frac{\pi}{15a^3}\left\{p_1{}^8\frac{45+6p_1{}^2+p_1{}^4}{(1+p_1{}^2)^6}-p_0{}^8\frac{45+6p_0{}^2+p_0{}^4}{(1+p_0{}^2)^6}\right\},$$

$$(18)\qquad ay_1=\frac{2p_1^3}{(1+p_1^2)^2},\qquad ay_0=\frac{2p_0^3}{(1+p_0^2)^2},$$

и изъ трехъ этихъ уравненій нужно будетъ найти положительное a и (для минимума) положительныя же, непревосходящія $\sqrt{3}$ значенія p_0 и p_1.

Если примемъ, что даны не самыя площади конечныхъ сѣченій, а только ихъ отношеніе, такъ что $y_1=yk_0$, то въ этомъ случаѣ къ тремъ написаннымъ уравненіямъ прибавятся еще два, именно $y_1=ky_0$ и получающееся изъ уравненія (9), необходимое для исчезанія варіаціи,

$$(19)\qquad \frac{p_1^2(3+p_1^2)}{(1+p_1^2)^2}k^2-\frac{p_0^2(3+p_0^2)}{(1+p_0^2)^2}=0.$$

Уравненія (18) доставятъ

$$(20)\qquad k\frac{p_0^3}{(1+p_0^2)^2}=\frac{p_1^3}{(1+p_1^2)^2}.$$

Изъ уравненій (19) и (20) опредѣлятся p_0 и p_1, послѣ чего (17) доставитъ a, а (18) y_0 и y_1.

Оканчиваю замѣчаніемъ, что если бы данную величину имѣлъ не интегралъ $\int_{x_0}^{x_1} y^2dx$, а какой нибудь другой $\int_{x_0}^{x_1} f(y)dx$, то диффеpенціальное уравненіе кривой получилось бы изъ (7) чрезъ замѣну y^2 на $f(y)$. Отсюда, въ случаѣ данной площади сѣченія, т. е. $f(y)=y$, легко было бы заключить, что только круглый конусъ можетъ быть сомкнутою поверхностью, испытывающею наименьшее сопротивленіе.

Варшава, 3 марта 1884.

Объ одномъ линейномъ дифференціальномъ уравненіи 3-го порядка.

А. Старкова.

Господинъ Goursat въ 20 нумерѣ Comptes rendus [1]) за текущій 1884 г. въ статьѣ: «Sur une équation linéaire» приводитъ изслѣдованіе интеграла линейнаго дифференціальнаго уравненія третьяго порядка, аналогичнаго уравненію Ламе, именно уравненія [2]).

$$\frac{d^3y}{dx^2} - \frac{Ax+B(x-1)}{x(x-1)}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Cx(x-1)+Dx+E(1-x)}{x^2(x-1)^2}\frac{dy}{dx} -$$

$$- \frac{Fx^2(x-1)+hx(x-1)+Hx+K(x-1)}{x^3(x-1)^3}y=0,$$

гдѣ значенія A, B и т. д. опредѣляются условіями

$$A=n+n_1+n_2-2$$

$$B=m+m_1+m_2-2$$

$$C=pp_1+pp_2+p_1p_2+2p+\frac{5p_1}{3}+\frac{4p_2}{3}+\frac{20}{9}$$

$$D=nn_1+nn_2+n_1n_2-\frac{n_1}{3}-\frac{2n_2}{3}+\frac{2}{9}$$

---

[1]) Comptes rendus de l'Acad. de Paris, tom. XCVIII p. 1248 etc.

[2]) Въ коеффиціентъ при $\frac{dy}{dx}$ въ Comptes rendus встрѣтилась опечатка именно, вмѣсто $Cx(x-1)$, какъ здѣсь приведено, тамъ напечатано $Cx(x+1)$.

$$E = mm_1 + mm_2 + m_1 m_2 - \frac{m_1}{3} - \frac{2m_2}{3} + \frac{2}{9}$$

$$F = -p\left(p_1 + \frac{1}{3}\right)\left(p_2 + \frac{2}{3}\right)$$

$$H = n\left(n_1 + \frac{1}{3}\right)\left(n_2 + \frac{2}{3}\right)$$

$$K = m\left(m_1 + \frac{1}{2}\right)\left(m_2 + \frac{2}{3}\right)$$

притомъ всѣ n, m и p должны быть цѣлыми числами, а сумма ихъ должна быть равна нулю. Въ той же статьѣ г. Goursat даетъ въ конечномъ видѣ интегралъ для частнаго случая разсматриваемаго уравненія, именно, интегралъ

$$y = C_1 e^{\sqrt[3]{h}\int\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}} + C_2 e^{\alpha\sqrt[3]{h}\int\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}} + C_3 e^{\alpha^2\sqrt[3]{h}\int\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}}$$

для уравненія

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{4x-2}{x(x-1)}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{3}\,\frac{10x^2-10x+1}{x^2(x-1)^2}\frac{dx}{dx} - \frac{h}{x^2(x-1)^2}y = 0,$$

опредѣляемаго положеніемъ всѣхъ n, m и p равными нулю.

Въ настоящей замѣткѣ я имѣю въ виду показать помощію изложеннаго еще въ 1877 году много способа[3]), при какихъ условіяхъ для разсматриваемаго уравненія получается интегралъ конечнаго вида.

Означимъ вообще уравненіе третьяго порядка чрезъ

$$\frac{d^3y}{dx^3} + P_1\frac{d^2y}{dx^2} + P_2\frac{dy}{dx} + P_3 y = 0; \qquad (1)$$

---

[3]) Моя статья: Общій способъ интегрированія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій n-го порядка съ перемѣнными коэффиціентами. Одесса 1877. Записки Математ. Отдѣл. Новоросс. Общ. Естеств. Томъ I.

тогда конечный интегралъ его, обусловленный равенствомъ функцій Q, будетъ

$$y=C_1e^{a\int Qdx}+C_2e^{\alpha a\int Qdx}+C_3e^{\alpha^2 a\int Qdx} \tag{2}$$

гдѣ α есть корень уравненія $\alpha^3-1=0$ и a представляетъ постоянную величину, опредѣляемую условіемъ

$$a^3Q^3=-P_3 \tag{3}$$

Сама функція Q получается изъ уравненія

$$\frac{d^2Q}{dx^2}+P_1\frac{dQ}{dx}+P_2Q=0\,, \tag{4}$$

причемъ для даннаго случая это уравненіе должно удовлетворяться интеграломъ вида

$$Q=c_1q+c_2q\int qdx\,, \tag{5}$$

гдѣ q опредѣляется уравненіемъ

$$\frac{dq}{dx}+\frac{1}{3}P_1q=0 \tag{6}$$

Внеся полученное изъ этого уравненія значеніе q въ уравненіе (4), опредѣляющее Q, получимъ слѣдующее условіе, которымъ должны быть связаны коеффиціенты P_1 и P_2 для того, чтобы имѣлъ мѣсто интегралъ конечнаго вида, именно

$$\frac{dP_1}{dx}+\frac{2}{3}P_1{}^2-3P_2=0 \tag{7}$$

Второе условіе, связывающее коеффиціенты P_1 и P_3, опредѣляется уравненіемъ (3) и будетъ вида,

$$a^3 = -P_3 e^{\int P_1 dx} = \text{постоянному} \tag{8}$$

Примѣняя только что сказанное къ уравненію, данному г. Goursat, будемъ имѣть для опредѣленія q

$$\frac{dq}{dx} - \frac{1}{3}\frac{Ax+B(x-1)}{x(x-1)}q = 0,$$

откуда

$$q = (x-1)^{\frac{A}{3}} x^{\frac{B}{3}}$$

и интегралъ въ конечной формѣ выразится

$$y = C_1 e^{a\int (x-1)^{\frac{A}{3}} x^{\frac{B}{3}} dx} + C_2 e^{\alpha a\int (x-1)^{\frac{A}{3}} x^{\frac{B}{3}} dx} + \\ + C_3 e^{\alpha^2 a\int (x-1)^{\frac{A}{3}} x^{\frac{B}{3}} dx}, \tag{9}$$

причемъ должны выполниться условія (7) и (8). Первое изъ этихъ условій, по внесеніи вмѣсто P_1 и P_2 ихъ значеній для разсматриваемаго случая, обратится

$$\left[A+B+\frac{2}{3}(A+B)^2+3C\right]x^2-\left[2B+\frac{4}{3}AB+\frac{4}{3}B^2-3C+3D-3E\right]x+ \\ +B+\frac{2}{3}B^2-3E=0$$

Въ виду того, что равенство это должно существовать для всякихъ значеній x, коеффиціенты при различныхъ степеняхъ x должны быть равны въ отдѣльности нулю Такимъ образомъ получимъ три соотношенія между коеффиціентами A, B и т. д., именно

$$A+B+\frac{2}{3}(A+B)^2-3C=0$$

$$\frac{4}{3}AB-3C+3D+3E=0 \qquad (10)$$

$$B+\frac{2}{3}B^2-3E=0$$

Условіе (8) даетъ

$$a^3=\frac{Fx^2(x-1)+hx(x-1)+Hx+K(x-1)}{(x-1)^{A+3}x^{B+3}}= \text{постоянному}$$

откуда, какъ нетрудно видѣть, выполненіе этого условія возможно лишь въ четырехъ случаяхъ, именно

$$\begin{aligned} &1)\ A=-2,\ B=-1,\ h=0,\ H=0,\ K=0 \\ &2)\ A=-2,\ B=-2,\ F=0,\ H=0,\ K=0 \\ &3)\ A=-3,\ B=-2,\ F=0,\ h=0,\ K=0 \\ &4)\ A=-2,\ B=-3,\ F=0,\ h=0,\ H=0 \end{aligned} \qquad (11)$$

и только въ этихъ четырехъ случаяхъ возможно полученіе интеграла въ конечной формѣ. Внеся значенія системы (11) въ условія (10), опредѣлимъ остальные коеффиціенты C, D и E для каждаго случая, именно

$$1)\ C=1,\quad D=\frac{2}{9},\ E=-\frac{1}{9}$$

$$2)\ C=\frac{20}{9},\ D=\frac{2}{9},\ E=\frac{2}{9}$$

$$3)\ C=\frac{35}{9},\ D=1,\ E=\frac{2}{9}$$

$$4)\ C=\frac{35}{9},\ D=\frac{2}{9},\ E=1$$

При такихъ значеніяхъ коеффиціентовъ A, B и т. д. данное уравненіе принимаетъ слѣдующіе четыре вида

$$1)\ \frac{d^3y}{dx^3}+\frac{3x-1}{x(x-1)}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{9}\,\frac{9x^2-6x-1}{x^2(x-1)^2}\,\frac{dy}{dx}-\frac{F}{x(x-1)^2}y=0$$

$$2)\ \frac{d^3y}{dx^3}+\frac{4x-2}{x(x-1)}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{3}\,\frac{10x^2-10x+1}{x^2(x-1)^2}\,\frac{dy}{dx}-\frac{h}{x^2(x-1)^2}y=0$$

$$3)\ \frac{d^3y}{dx^3}+\frac{5x-2}{x(x-1)}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{9}\,\frac{35x^2-28x+2}{x^2(x-1)^2}\,\frac{dy}{dx}-\frac{H}{x^2(x-1)^3}y=0$$

$$4)\ \frac{d^3y}{dx^3}+\frac{5x-3}{x(x-1)}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{9}\,\frac{35x^2-42x+9}{x^2(x-1)^2}\,\frac{dy}{dx}-\frac{K}{x^3(x-1)^2}y=0$$

которые имѣютъ интегралы конечной формы, опредѣляемыя выраженіемъ (9), именно

$$1)\ y=C_1e^{\sqrt[3]{F}\int\frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}}+C_2e^{\alpha\sqrt[3]{F}\int\frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}}+C_3e^{\alpha^2\sqrt[3]{F}\int\frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}}$$

$$2)\ y=C_1e^{\sqrt[3]{h}\int\frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}}}+C_2e^{\alpha\sqrt[3]{h}\int\frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}}}+C_3e^{\alpha^2\sqrt[3]{h}\int\frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}}}$$

$$3)\ y=C_1e^{\sqrt[3]{H}\int\frac{dx}{(x-1)x^{\frac{2}{3}}}}+C_2e^{\alpha\sqrt[3]{H}\int\frac{dx}{(x-1)x^{\frac{2}{3}}}}+C_3e^{\alpha^2\sqrt[3]{H}\int\frac{dx}{(x-1)x^{\frac{2}{3}}}}$$

$$4)\ y=C_1e^{\sqrt[3]{K}\int\frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}x}}+C_2e^{\alpha\sqrt[3]{K}\int\frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}x}}+C_3e^{\alpha^2\sqrt[3]{K}\int\frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}x}}$$

Теперь посмотримъ, какіе изъ этихъ интеграловъ удовлетворяютъ условіямъ, поставленнымъ г. Goursat, именно, чтобы всѣ m, n и p были цѣлыми числами и сумма ихъ равнялась нулю.

Въ первомъ случаѣ на основаніи

$$H=0\,,\ K=0\,,\ A=-2\,,\ B=-1$$

имѣемъ

$$n=0\,,\ m=0\,,\ n_1+n_2=0\,,\ m_1+m_2+1=0\,,$$

присоединяя къ этимъ условіямъ еще слѣдующія

$$C=1\,,\ D=\frac{2}{9}\,,\ E=-\frac{1}{9}\,,$$

получимъ

$$n_1n_2-\frac{n_1}{3}-\frac{2}{3}n_2=0\,,\ m_1m_2-\frac{m_1}{3}-\frac{2}{3}m_2+\frac{1}{3}=0\,,$$

$$pp_1+pp_2+p_1p_2+2p+\frac{5p_1}{3}+\frac{4p_2}{3}+\frac{11}{9}=0\,;$$

далѣе

$$n_1\left(n_1-\frac{1}{3}\right)=0\,,\ m^2_2+\frac{4}{3}m_2-\frac{2}{3}=0\,,$$

$$p=-\frac{1}{9}\cdot\frac{9p_1p_2+15p_1+12p_2+11}{p_1+p_2+2}$$

откуда

$$n_1=0\,,\ n_1=\frac{1}{3}\ \text{ и }\ m_2=\frac{-2\pm\sqrt{10}}{3}\,;$$

слѣдовательно уже изъ этихъ выраженій видно, что нельзя выбрать для этого случая систему цѣлыхъ значеній для m_2 и m_1, а потому условія г. Goursat въ этомъ случаѣ не выполняются.

Кромѣ того выраженіе

$$p=-\frac{1}{9}\cdot\frac{9p_1p_2+15p_1+12p_2+11}{p_1+p_2+2}$$

при условіи цѣлыхъ значеній для p связано существованіемъ сравненія

$$9p_1p_2+15p_1+12p_2+11\equiv 0 \text{ (Mod. 9)},$$

которое очевидно не удовлетворяется никакими цѣлыми значеніями для p_1 и p_2. Слѣдовательно и значенія p, p_1 и p_2 въ этомъ случаѣ не могутъ быть цѣлыми.

Во второмъ случаѣ, на основаніи

$$F=0\,,\ H=0\,,\ K=0\,,\ A=-2\,,\ B=-2$$

имѣемъ

$$p=0\,,\ n=0\,,\ m=0\,,\ n_1+n_2=0\,,\ m_1+m_2=0$$

Далѣе

$$C=\frac{20}{9}\,,\ D=\frac{2}{9}\,,\ E=\frac{2}{9}$$

а потому

$$n_1n_2-\frac{n_1}{3}-\frac{2n_2}{3}=0\,,\ m_1m_2-\frac{m_1}{3}-\frac{2m_2}{3}=0$$

$$p_1p_2+\frac{5}{3}p_1+\frac{4}{3}p_2=0$$

Первыя два уравненія совмѣстно съ условіями $n_1+n_2=0$ и $m_1+m_2=0$ даютъ, какъ мы видѣли въ первомъ случаѣ, единственную систему цѣлыхъ значеній именно

$$n_1=0\,,\ n_2=0\,,\ m_1=0 \text{ и } m_2=0$$

Уравненіе

$$p_1p_2+\frac{5}{3}p_1+\frac{4}{3}p_2=0$$

какъ легко видѣть, допускаетъ слѣдующія пары цѣлыхъ значеній

$$p_2=0\,,\quad 5\,,\ -1\,,\ -2\,,\ -3\,,\ -5$$

$$p_1=0\,,\ -1\,,\quad 2\,,\ -8\,,\ -3\,,\ -2$$

изъ которыхъ только первая удовлетворяетъ второму условію,

поставленному г. Goursat, именно, чтобы сумма цѣлыхъ значеній всѣхъ n, m и p равнялась нулю.

Такимъ образомъ въ изслѣдуемомъ нами случаѣ имѣетъ мѣсто конечный интегралъ, удовлетворяющій условіямъ г. Goursat и опредѣляемый системою значеній

$$n=0\,,\ n_1=0\,,\ n_2=0\,,\ m=0\,,\ m_1=0\,,\ m_2=0\,,\ p=0\,,\ p=0\,,\ p_2=0$$

Въ третьемъ случаѣ на основаніи

$$F=0\,,\ K=0\,,\ A=-3\,,\ B=-2$$

имѣемъ

$$p=0\,,\ m=0\,,\ m_1+m_2=0\,,\ n+n_1+n_2+1=0$$

Затѣмъ

$$C=\frac{35}{9}\,,\ D=1\,,\ E=\frac{2}{9}$$

а потому

$$m_1m_2-\frac{m}{3}-\frac{2m_2}{3}=0\,,\ nn_1+nn_2+n_1n_2-\frac{n_1}{3}-\frac{2n_2}{3}-\frac{7}{9}=0$$

$$p_1p_2+\frac{5p_1}{3}+\frac{4p_2}{3}-\frac{5}{3}=0$$

откуда значенія m_1 и m_2 опредѣляются системою уравненій, одинаковыхъ съ указанною въ первомъ случаѣ, слѣдовательно $m_1=0$ и $m_2=0$.

Значенія n, n_1 и n_2 опредѣляются системою

$$n+n_1+n_2+1=0$$

$$nn_1+nn_2+n_1n_2-\frac{n_1}{3}-\frac{2n_2}{3}-\frac{7}{9}=0\,,$$

откуда, исключивъ n, получимъ

$$n_1^2+\left(n_2+\frac{4}{3}\right)n_1+\left(n_2^2+\frac{5}{3}n_2+\frac{7}{9}\right)=0$$

или

$$n_1=-\frac{1}{3}\pm\left(\frac{n_2}{2}+\frac{1}{3}\right)(-1\pm\sqrt{-3})$$

выраженіе, изъ котораго очевидно, что значенія n, n_1 и n_2 не могутъ быть цѣлыми. Такимъ образомъ для этого случая тоже условія г. Goursat не выполняются.

Четвертый случай приводится къ третьему, для чего необходимо лишь сдѣлать взаимную замѣну n на m и обратно. Слѣдовательно и для этого случая условія г. Goursat не выполняются.

Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что для одной только формы разсматриваемаго уравненія получается интегралъ въ конечномъ видѣ, удовлетворяющій условіямъ г. Goursat.

Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія

А. Старкова.

> Ciascuno sa che una regola non può essere nè vera, nè generale se non abbraccia tutti i casi compresi nella sua enunciazione.
>
> *Barbera.* I simplicii contemporanei ovvero critica del calcolo infinitesimale Bologna 1883. p. 482.

На мою статью: къ вопросу о поверхности наименьшаго сопротивленія при движеніи въ несжимаемой жидкости [1]), проф. Сонинъ сдѣлалъ два возраженія [2]), «вслѣдствіе которыхъ», по его мнѣнію, «найденные мною результаты не могутъ имѣть мѣста». Возраженія эти, приведенныя проф. Сонинымъ безъ доказательства, совершенно неправильны, а указанный имъ путь рѣшенія задачи давно извѣстенъ и уже оставленъ; поэтому статья проф. Сонина: «Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія» не можетъ имѣть никакого значенія.

---

[1]) Записки Новоросс. Общ. Естествоисп. Математ. Отдѣл. т. V, стр. 49.

[2]) Записки Новоросс. Общ. Естествоисп. Математич. Отдѣл. т. VI стр. 1. Статья проф. Сонина: «Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія». Всѣ ссылки на эту статью проф. Сонина, будутъ здѣсь обозначаться словомъ: Ibid. съ указаніемъ страницы, а всѣ взятыя изъ нея выраженія будутъ заключены въ ковычки вида « », причемъ эти ковычки приняты для обозначенія исключительно заимствованій изъ указанной статьи проф. Сонина.

Первое возраженіе проф. Сонина заключается въ томъ, что при опредѣленіи поверхности наименьшаго сопротивленія, содержащей данный объёмъ, нельзя обусловить minimum интеграла сопротивленія данною площадью меридіана.

Это возраженіе «очевидно не вѣрно».

Дѣйствительно, вводя ограничивающее условіе въ формѣ постоянства площади меридіана и называя его лишь *равнозначительнымъ*, а не тожественнымъ условію ограниченія объемомъ, я получилъ замкнутую поверхность, на которой интегралъ сопротивленія имѣетъ minimum. Форма этой поверхности опредѣляется параметромъ A, причемъ за единицу измѣренія принимается радіусъ наибольшаго кругового сѣченія (такъ называемаго мидельшпангоута). Для вмѣщенія даннаго, произвольно взятаго объёма въ полученную такимъ образомъ поверхность стоитъ только рѣшить относительно A уравненіе, приведенное на стр. 57 упомянутой выше моей статьи, выразивъ предварительно данный объёмъ въ соотвѣтствующихъ принятой единицахъ. Неопредѣленности при этомъ никакой не происходитъ, такъ какъ для каждаго даннаго объёма получается только одно значеніе площади меридіана и наоборотъ. Приведенный же проф. Сонинымъ въ подтвержденіе своего возраженія вмѣсто доказательства примѣръ, не имѣя ничего общаго ни съ поставленной мною задачей, ни съ сдѣланнымъ имъ возраженіемъ, къ дѣлу не относится.

Въ дополненіе къ сказанному здѣсь остается указать на то, что еще Эйлеръ [3]), рѣшая подобную задачу, въ качествѣ ограничивающаго условія ввелъ площадь меридіана и получилъ для образованія тѣла вращенія съ наименьшимъ сопротивленіемъ кривую, гипоциклоиду, тожественную съ найденной проф. Сонинымъ даже до размѣровъ чертежа.

---

[3]) *Leonardo Eulero* Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Losannae 1744 стр. 198 и слѣд. Ниже, на стр. 16, приведена подлинная постановка задачи Эйлеромъ.

Второе возраженіе проф. Сонина относится къ выбору мною независимой перемѣнной. По его мнѣнію принимать за независимую перемѣнную $u=\frac{dy}{ds}$ «нѣтъ необходимости», между тѣмъ какъ это только и дало возможность правильно поставить задачу и получить въ рѣшеніи поверхности, соотвѣтствующія дѣйствительности. При этомъ проф. Сонинъ считаетъ неправильнымъ то, что я, взявъ $u=\frac{dy}{ds}$ за независимую перемѣнную не ввелъ ограничивающаго условія

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-1=0 \qquad (1)$$

въ аналитическую постановку задачи и не пользовался имъ при ея рѣшеніи. Такое утвержденіе со стороны проф. Сонина, будучи, какъ мы увидимъ, совершенно неправильнымъ, могло бы еще имѣть какое либо значеніе лишь въ томъ случаѣ, если бы было подкрѣплено соотвѣтствующимъ доказательствомъ вмѣсто словъ, напечатанныхъ курсивомъ: *«безусловно-необходимо»*, *«не дѣлается излишнимъ»*, *«неизбѣжно»* и пр. Слова эти «отнюдь не дѣлаютъ излишнимъ» доказательство сдѣланному возраженію даже и при «умышленной замѣнѣ буквы s буквою x[1])». Точно также не можетъ замѣнить доказательства поставленному проф. Сонинымъ возраженію несовпаденіе

---

[1]) *Сонинъ.* Ibid. стр. 2. Нельзя не замѣтить, что произведенная проф. Сонинымъ замѣна буквы s буквою x оказалось «не совсѣмъ удачною», такъ какъ интегралы

$$\int y\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}ds \quad \text{и} \quad \int y\sqrt{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dy$$

имѣютъ столь существенное различіе, что сопоставленіе ихъ невозможно. Дѣйствительно, въ первомъ изъ нихъ подъинтегральная функція не принимаетъ мнимыхъ значеній, тогда какъ во второмъ мнимыя значенія возможны и ничѣмъ неограничены.

полученной мною предѣльной кривой съ кривою Ньютона, такъ какъ я вовсе и не имѣлъ въ виду получить эту послѣднюю, тѣмъ болѣе что полученная мною кривая признана еще Лежендромъ [5]) за соотвѣтствующую кривой Ньютона и имѣющую предъ ней то преимущество, что «elle donnera un minimum absolu pour la formule $\int \frac{y dy^3}{ds^2}$, тогда какъ на кривой Ньютона этого нѣтъ. Что же касается употребляемаго мною выраженія: Ньютоново рѣшеніе и пр., то это не есть Ньютонова кривая, а относится лишь къ тѣмъ условіямъ, которыя составляютъ частный случай изслѣдуемаго мною вопроса и которыя соотвѣтствуютъ принятымъ Ньютономъ для рѣшенія его задачи [6]).

---

[5]) *Legendre.* Memoire sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le calcul des variations. Histoire de l'Académie royale des ciences de Paris 1786 p. 21.

[6]) Здѣсь кстати считаю необходимымъ оговорить неточность, вкравшуюся на стр. 47 моей статьи: къ вопросу о поверхности наименьшаго сопротивленія и пр. Вмѣсто сказаннаго тамъ: въ случаѣ же $A=0$ представляетъ кривую, указанную Ньютономъ и пр., слѣдовало быть: въ случаѣ же $A=0$ представляетъ кривую, соотвѣтствующую указанной Ньютономъ и пр. Кромѣ того на стр. 87 встрѣчается неясность: первое изъ указанныхъ тамъ свойствъ относится къ кривой Ньютона, второе къ полученной мною кривой Лежендра. За исключеніемъ этихъ двухъ мѣстъ вездѣ соблюдается различіе между двумя кривыми и вопросъ проф. Сонина: «Доставляетъ ли однако дѣйствительно кривая г. Старкова кривую Ньютона»? а также все сказанное имъ дальше по этому поводу является излишнимъ.

Впрочемъ неточности и неясности встрѣчаются и въ изложеніи проф. Сонина, хотя я предпочитаю имъ значенія не давать и на нихъ не ссылаться, а тѣмъ болѣе не ставить по поводу нихъ недоумѣвающихъ вопросовъ, подобныхъ вышеприведенному. Для примѣра лишь укажу на 6 стран. статьи проф. Сонина, гдѣ сказано что «при $\alpha=0$ уравненія (10) и (11) доставляютъ кривую Ньютона», между тѣмъ какъ эти уравненія при $\alpha=0$ обращаются въ $0=0$.

Вмѣстѣ съ вышесказаннымъ здѣсь мною по поводу моей статьи считаю необходимымъ исправить также ошибку, находящуюся на послѣдней 88

Только что изложеннаго было бы вполнѣ достаточно привести по поводу второго возраженія проф. Сонина. Но я кромѣ того считаю умѣстнымъ указать здѣсь, почему съ одной стороны необходимо принять для общности и правильности рѣшенія за независимую перемѣнную $u=\frac{dy}{ds}$ и съ другой не слѣдуетъ вводить условія (1) въ той формѣ, въ какой сдѣлалъ это проф. Сонинъ.

Изъ краткой исторіи вопроса, изложенной здѣсь ниже, мы увидимъ, что еще Лежендръ [7]) указалъ на ту особенность существующаго рѣшенія задачи о поверхности наименьшаго сопротивленія, вслѣдствіе которой на кривой Ньютона интегралъ $\int y\frac{dy^3}{ds^2}$ не имѣетъ абсолютнаго minimum'а и что на нѣкоторой ломанной зигзагообразной линіи значеніе его можетъ быть сдѣлано ме́ньшимъ. Тоже самое показано Тодгёнтеромъ [8]) для задачи о поверхности наименьшаго сопротивленія, обусловленной постоянствомъ объёма и рѣшенной въ той-же самой формѣ, въ какой сдѣлалъ это проф. Сонинъ. Такимъ образомъ ломанная, зигзагообразная линія, на которой интегралъ сопротивленія имѣетъ ме́ньшее значеніе въ сравне́нія съ кривой Ньютона, а также и въ сравненіи съ кривой, найденной Эйлеромъ и

ей страницѣ, — а именно: приведенное тамъ въ другой формѣ существенное уравненіе полученной мною кривой должно быть представлено такъ

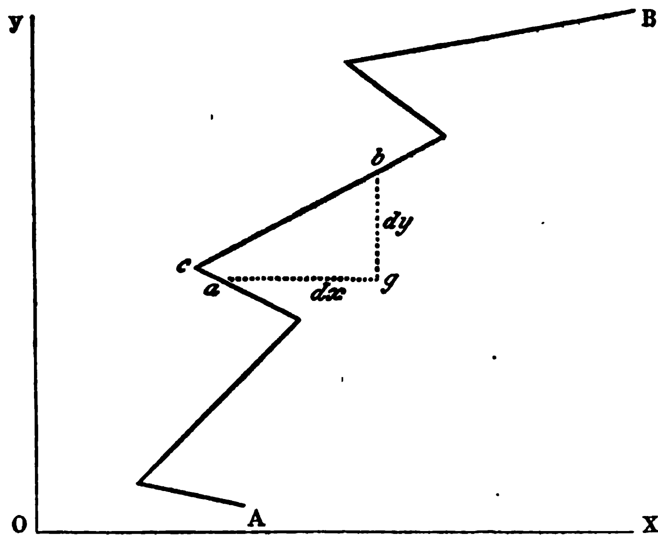
$$s=\frac{3}{4}a^2\left\{\frac{1}{\sin^4\tau}-1\right\}$$

гдѣ за постоянное направленіе принята ось вращенія. Затѣмъ вся фраза начинающаяся словами: „если за это опредѣленное направленіе и пр." оказывается невѣрною; кривая имѣетъ въ началѣ касательною ось Y—ковъ, т. е. перпендикулярна къ оси вращенія, и въ безконечности дѣлается параллельною оси вращенія.

[7]) *Legendre*. Mem. cit. p. 23 etc.

[8]) *Todhunter*. Researches in the calculus of variations. London, 1871. p. 200 etc.

указанной проф. Сонинымъ, не должна быть исключена изъ аналитическихъ условій задачи, если ставится цѣлію достиженіе наиболѣе общаго и правильнаго ея рѣшенія.



Черт. 1.

На зигзагообразной, ломанной линіи *AB* (черт. 1) мы имѣемъ ту особенность, что условіе

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dx}{ds}\right)^2-1=0 \qquad (1)$$

не имѣетъ мѣста, такъ какъ

$$bg^2+ag^2-(ac+cb)^2\neq 0 \text{ (не равно нулю)}$$

и $bg=dy$, $ag=dx$, $(ac+bc)=ds$, слѣдовательно

$$dy^2+dx^2-ds^2\neq 0 \text{ (не равно нулю)}$$

откуда

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^3+\left(\frac{dx}{ds}\right)^2-1\neq 0 \text{ (не равно нулю)}$$

что впрочемъ очевидно и непосредственно изъ четыреугольника $acbg$.

Поэтому для достиженія общаго и правильнаго рѣшенія задачи, не исключающаго ломанную зигзагообразную линію, необходимо избѣжать ограниченія ея условіемъ (1), такъ какъ съ одной стороны невведеніе этого условія не исключаетъ его выполненія въ предѣлѣ т. е. въ рѣшеніи получается кривая, съ другой—аналитическая постановка задачи при этомъ не стѣсняется никакими излишними ограниченіями. Точно также при рѣшеніи задачи не слѣдуетъ брать за независимую перемѣнную координату x, такъ какъ въ непрерывности измѣненій $p=\frac{dy}{dx}$ неявно входитъ само собою условіе (1) [9]), которымъ,

---

[9]) Объ этомъ см. у *Moigno*. Calcul des variations, Paris 1861, pag. 235 и слѣд., гдѣ подробно изслѣдуется вопросъ о введеніи условія (1) въ случаѣ принятія s за независимую перемѣнную. Указанный Moigno методъ такого введенія тожественно воспроизводится проф. Сонинымъ въ его статьѣ на стр. 4, 5 и 6, причемъ проф. Сонинъ, также какъ и Moigno, показываетъ, что введеніе условія (1) въ аналитическую постановку задачи равносильно принятію x за независимую перемѣнную.

Но еще въ 1877 году Barbera въ своемъ Nuovo metodo dei massimi e minimi delle funzioni primitive e integrali, Bologna 1877, приведя на стр. 112, 113 и 114 указанныя выше разсужденія Moigno по поводу введенія условія (1), замѣтилъ, что эти разсужденія недостаточно основательны и обладаютъ лишь случайной правильностію. Какъ примѣръ въ подтвержденіе своихъ соображеній Barbera приводитъ сказанное у Moigno относительно изслѣдованія интеграла $\int y ds$; причемъ невведеніе условія (1) приводитъ къ абсурдному уравненію $1=0$, которое, по словамъ Moigno, s'évanouit devant une analyse plus approfondie (стр. 236), заключающемся въ томъ, что не всѣ соотношенія между y и s геометрически возможны. Прилагая тѣже самыя разсужденія къ интегралу $\int y dx$, Barbera безъ труда получаетъ такое-же абсурдное уравненіе $1=0$, по поводу котораго онъ замѣчаетъ, что con una nuova analisi profonda avrebbe scoperta qualche altra relazione geometricamente impossibile tra x ed y (стр. 114).

Съ своей стороны мнѣ остается добавить къ этому, что непосредственное отысканіе maximum или minimum интеграла $\int y dx$ приводитъ, какъ указалъ Barbera, къ абсурдному уравненію $1=0$. Если же преобразуемъ этотъ интегралъ, принявъ за независимую перемѣнную s и введя въ аналитическую

какъ мы видѣли, неправильно съуживается аналитическая постановка задачи и изъ ея рѣшенія исключается ломанная линія.

Вотъ причина, заставившая меня избрать за независимую перемѣнную $u=\frac{dy}{ds}$, при которой изъ аналитической постановки задачи становится возможнымъ исключеніе условія (1) и вопросъ рѣшается въ наиболѣе общей и правильной формѣ. Полученная при этомъ кривая, составляющая предѣлъ для вводимыхъ одновременно въ изслѣдованіе ломанныхъ и кривыхъ линій отвѣчаетъ вполнѣ какъ теоретическимъ соображеніямъ, такъ и практическимъ выводамъ.

Послѣ сказаннаго здѣсь становится понятнымъ, почему еще Лежендръ указалъ, какъ выше приведено, что кривая

$$y=\frac{a(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{p^3}$$

т. е. одинаковая съ тою, которая получена мною для пре-

постановку задачи условіе (1), то помощію упомянутаго выше пріема Moigno получимъ въ рѣшеніи прямую линію $y=c$, параллельную оси x—овъ, т. е. совсѣмъ другое рѣшеніе чѣмъ въ томъ случаѣ, когда принято x за независимую перемѣнную, хотя и столь же неподходящее. Наконецъ, если по приведеніи къ независимой перемѣнной s будемъ рѣшать задачу безъ введенія въ аналитическую ея постановку условія (1), то получимъ правильное общеизвѣстное рѣшеніе—кругъ.

. Впрочемъ и самъ Moigno встрѣтилъ задачу (Problème XVI, pag. 299) представляющую относительно введенія условія (1) une particularité à laquelle il faut bien faire attention pour ne pas introduire des équations inutiles et étrangères à la question. Дѣйствительно, указанный имъ сложный пріёмъ рѣшенія этой задачи чрезвычайно упрощается, если совсѣмъ не вводить условія (1); получаемый притомъ результатъ гораздо яснѣе указываетъ свойство кривой, служащей отвѣтомъ на вопросъ.

Можно было бы указать и другіе примѣры, въ которыхъ, при взятой за независимую перемѣнную s или ея функціи, введеніе въ аналитическую постановку задачи условія (1) равносильно приведенію ея къ абсурду, но считаю изложеннаго здѣсь достаточнымъ для поясненія сказаннаго въ текстѣ.

дѣльныхъ условій $\Delta=0$, donnera un minimum absolu pour la formule $\int y\frac{dy^3}{ds^2}$, чего нельзя сказать относительно кривой Ньютона [10]). Дѣло въ томъ, что кривая Лежендра легко получается изъ тѣхъ же самыхъ положеній и тѣмъ же самымъ путемъ, какъ и кривая Ньютона съ тою лишь разницею, что выводъ ея не сопровождается ограниченіемъ явно или неявно условіемъ (1), какъ это имѣетъ мѣсто для вывода кривой Ньютона [11]).

При изложеніи своего рѣшенія поставленной мною задачи проф. Сонинъ «съ полнымъ правомъ, хотя и не совсѣмъ удачно, выбираетъ за независимую перемѣнную» координату x, чѣмъ «*неизбѣжно*» вводитъ [12]) неявно «*излишнее*» ограниченіе задачи условіемъ (1), т. е. исключаетъ изъ аналитической ея постановки ломанную линію. Получивъ вслѣдствіе этого результаты, противорѣчащіе дѣйствительности, проф. Сонинъ предпочитаетъ заявить, что онъ «не склоненъ искать въ своемъ рѣшеніи указаній для формы подводныхъ судовъ [13])», чѣмъ усумниться въ правильности этого рѣшенія или хотя бы «навести надлежащія справки». «Изъ сравненія» того, что̀ сдѣлано по

---

[10]) Тоже, хотя и недостаточно ясно, утверждается и Тодгёнтеромъ op. cit. на стр. 189, гдѣ онъ говоритъ: We may however be sure that there must now be some solid of *least* (курсивъ въ подлинникѣ) resistance.

[11]) Изъ этого также слѣдуетъ въ отвѣтъ на сомнѣніе проф. Сонина, что «задачу Ньютона т. е. опредѣленіе абсолютнаго минимума интеграла $\int y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3 ds$» не только «можно», но даже должно «рѣшать безъ употребленія уравненія (1)» въ качествѣ ограничивающаго условія. Подробно объ этомъ см. мое сообщеніе въ засѣданіи Математ. Отдѣл. Новоросс. Общ. Естеств. 2 ноября 1881 г. подъ заглавіемъ: о нѣкоторыхъ особенностяхъ въ постановкѣ задачи о поверхности наименьшаго сопротивленія. Одесса 1884 г.

[12]) Впрочемъ первоначально условіе (1) введено проф. Сонинымъ явно (стр. 4 его статьи).

[13]) *Сонинъ* Ibid. стр. 3.

этому предмету, проф. Сонинъ «могъ бы убѣдиться въ невѣрности своего рѣшенія задачи; но онъ, повидимому, не дѣлаетъ повѣрокъ» своимъ выводамъ и, «не наведя надлежащихъ справокъ», «даетъ» въ своей статьѣ приложеніе способа Якоби къ разсматриваемой задачѣ въ той формѣ, въ которой, «однако», неприложимость его доказана Вейерштрассомъ. «Да и какъ можетъ» давно извѣстное и уже оставленное рѣшеніе, «которое старается (sic!) найти» проф. Сонинъ, считаться правильнымъ, когда, какъ говоритъ Barbera, ciascuno sa che una regola no può essere nè vera, nè generale se non abbraccia tutti i casi compresi nella sua enunciazione [14])?

---

[14]) Свое второе возраженіе проф. Сонинъ оканчиваетъ двумя неимѣющими основанія фразами, именно: указавъ, что полученная мною кривая отличается отъ приведенной Ньютономъ, онъ заключаетъ, что мною дано «въ замкнутой формѣ уравненіе кривой Ньютона, которое, однако, не удовлетворяетъ дифференціальному» (стр. 3 его статьи). Такого рода заключеніе со стороны проф. Сонина является совершенно произвольнымъ, такъ какъ во всей моей статьѣ нигдѣ не утверждается, что полученное мною уравненіе кривой Лежандра въ конечномъ видѣ есть уравненіе кривой Ньютона въ замкнутой формѣ. Затѣмъ, что̀ собственно желалъ выразить проф. Сонинъ второй половиной приведенной его фразы, опредѣлить трудно, такъ какъ при упомянутомъ несовпаденіи кривыхъ Ньютона и Лежендра каждая изъ нихъ можетъ удовлетворять только *своему* дифференціальному уравненію.

Далѣе проф. Сонинъ продолжаетъ: «Да и какъ можетъ сомкнутая кривая, которую старается (sic!) найти г. Старковъ (ссылка на 6 страницу моей статьи) обратиться въ разомкнутую Ньютона»?

Что̀ дало проф. Сонину поводъ и право приписать мнѣ ничѣмъ мною не обнаруженное «стараніе» (sic!) отыскивать сомкнутую кривую, рѣшить не берусь, такъ какъ не только на указанной имъ 6-й стр., но и во всей моей статьѣ нѣтъ и рѣчи о сомкнутой кривой, а вездѣ имѣется въ виду кривая не смыкающаяся, имѣющая двѣ точки на оси вращенія. На цѣлой же 6-й страницѣ моей статьи, на которую ссылается проф. Сонинъ, не только ничего не сказано о замкнутой кривой, но даже вовсе нѣтъ и слова *кривая*?!... Что же касается отыскиваемой мною замкнутой поверхности, то она въ качествѣ поверхности вращенія получается, какъ извѣстно, отъ всякой *разомкнутой* кривой, имѣющей двѣ точки на оси вращенія. «Да и какъ могъ» поставить указанный выше вопросъ проф. Сонинъ послѣ того, что̀ сказано мною

Впрочемъ, я считаю необходимымъ нѣсколько подробнѣе разсмотрѣть предлагаемое проф. Сонинымъ рѣшеніе поставленной мною задачи.

Изложивъ указанныя выше возраженія, проф. Сонинъ начинаетъ свое рѣшеніе такъ [15]):

«Чтобы мнѣ не сказали: La critique est aisée, mais l'art est difficile, я считаю нужнымъ представить *правильное*(!) рѣшеніе поставленной г. Старковымъ задачи. Я долженъ впрочемъ оговориться, что, *не наведя надлежащихъ справокъ*, я не могу утверждать, что предлагаемое мною рѣшеніе не было опубликовано кѣмъ нибудь ранѣе. Во всякомъ случаѣ *я не склоненъ искать въ своемъ рѣшеніи указаній для формы подводныхъ лодокъ*, а предпочитаю относиться къ нему какъ къ *хорошему* упражненію въ варіаціонномъ исчисленіи».

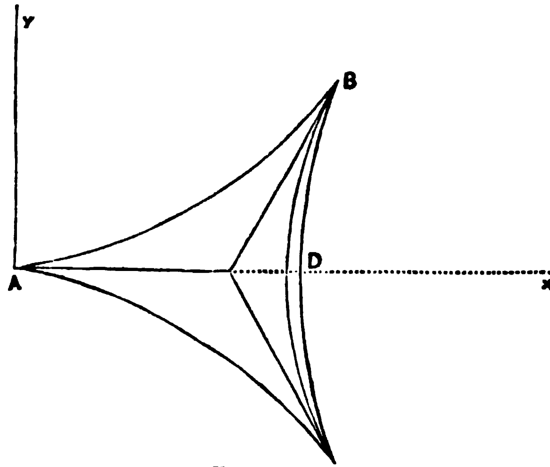
Затѣмъ слѣдуетъ изложеніе самаго рѣшенія, которое отличается отъ даннаго мною во первыхъ тѣмъ, что проф. Сонинъ вмѣсто принятаго у меня условія $\int y dx =$ пост. беретъ $\int y^2 dx =$ пост. и во вторыхъ тѣмъ, что ограничиваетъ аналитическую постановку задачи излишнимъ введеніемъ условія (1), иначе сказать исключаетъ изъ нея ломанную линію. Относительно перваго т. е. измѣненія условія $\int y dx =$ пост. на $\int y^2 dx =$ пост. мнѣ остается повторить вышеизложенное, именно, что и въ моемъ рѣшеніи получаются поверхности, въ которыя можно вмѣстить данный объёмъ, несмотря на то, что этого

въ § IV моей статьи, гдѣ такъ подробно изслѣдована полученная мною кривая?

Въ своемъ рѣшеніи одинаковаго съ поставленнымъ мною вопроса проф. Сонинъ дѣйствительно получилъ замкнутую кривую-гипоциклоиду съ радіусомъ катящагося круга равнымъ одной трети радіуса неподвижнаго и въ тоже время утверждаетъ, что изъ этого рѣшенія получается разомкнутая кривая Ньютона. Поэтому приведенный здѣсь вопросъ проф. Сонина съ большимъ основаніемъ можетъ быть поставленъ по отношенію къ его рѣшенію, дающему сомкнутую кривую, но уже никакъ не къ моему, опредѣляющему кривую разомкнутую.

[15]) *Сонинъ* Ibid. стр. 3.

недопускаетъ проф. Сонинъ. Второе же измѣненіе, заключающееся въ излишнемъ введеніи условія (1), является, какъ выше мы видѣли, совершенно неправильнымъ.



Черт. 2

При такой постановкѣ задачи проф. Сонинъ получаетъ въ рѣшеніи «уникурсальную кривую четвертаго порядка» вида, приведеннаго на черт. 2, уравненіе которой въ частномъ случаѣ онъ даетъ слѣдующее [16])

$$(15) \qquad 2(x^2+y^2)-x(x^2+9y^2)+27y^2=0$$

Затѣмъ проф. Сонинъ, не придавая никакого значенія изслѣдованіямъ Вейерштрасса, выводитъ по способу Якоби условія minimum'a интеграла, въ то время какъ неприложимость этого способа къ задачѣ въ разсматриваемой имъ формѣ Вейерштрассомъ установлена.

Предлагая свое рѣшеніе, проф. Сонинъ дѣйствительно напрасно «не навелъ надлежащихъ справокъ», которыя предохранили бы его отъ труда рѣшать сложнымъ пріемомъ задачу рѣшенную гораздо проще еще въ первой половинѣ XVIII столѣтія Эйлеромъ [17]), причемъ достойно вниманія то обстоятельство, что Эйлеръ ограничивая, какъ уже выше было упомянуто, значеніе minimum интеграла сопротивленія условіемъ постоянства площади меридіанальнаго сѣченія т. е. тѣмъ-же, ка-

[16]) *Сонинъ.* Ibid. стр. 9.

[17]) *Leonardo Eulero* Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes etc. стр. 198 etc.

кое принято у меня, получаетъ въ результатѣ кривую, тожественную съ найденной проф. Сонинымъ. Затѣмъ Тодгёнтеръ въ 1867 году [18]) рѣшаетъ туже самую задачу и наконецъ въ въ 1871 году [19]) онъ даетъ самое полное и самое обстоятельное изслѣдованіе вопроса, причемъ указываетъ также наиболѣе общую форму задачи. Изъ изслѣдованій Тодгёнтера проф. Сонинъ увидѣлъ бы, что найденные имъ результаты могутъ быть выведены крайне просто непосредственно и что полученная имъ «уникурсальная кривая четвертаго порядка» есть нечто иное, какъ гипоциклоида, въ которой радіусъ движущагося круга равенъ одной трети радіуса неподвижнаго,—кривая крайне извѣстная и не требующая не только какого либо изслѣдованія по гомотетичной, но даже и чертежа. Кромѣ того, познакомившись съ изслѣдованіями Тодгёнтера, проф. Сонинъ поколебался бы приводить свое «правильное рѣшеніе», такъ какъ по поводу этого рѣшенія Тотгёнтеръ говоритъ [20]): We must not say that we have obtained the solid of *least* [21]) resistance, for by using a zigzag boundary we could make the resistance as small as we please for any given volume.

Что касается практической стороны приводимаго проф. Сонинымъ рѣшенія, то на ней я останавливаться не буду, такъ какъ проф. Сонинъ «не склоненъ искать въ своемъ рѣшеніи указаній для формы подводныхъ судовъ». Считаю необходимымъ лишь указать на то, что опытныя изслѣдованія законовъ сопротивленія привели между прочимъ къ тому заключенію, что вполнѣ погруженная поверхность вращенія, обладающая наименьшимъ сопротивленіемъ, не должна спереди оканчиваться остріёмъ и не можетъ быть вогнута снаружи въ передней своей части. Если же съ этимъ сопоставить то, что

---

[18]) Philosophical Magazine, November 1867.

[19]) *Todhunter*. Researches in the calculus of variations. London 1871. pag. 199—219.

[20]) *Todhunter* Op. cit. p. 200.

[21]) Курсивъ въ подлинникѣ.

обыкновенная теорія сопротивленія даетъ формулу, близко отвѣчающую практическимъ результатамъ, а также то, что полученное проф. Сонинымъ рѣшеніе даетъ поверхность, оканчивающуюся остріёмъ и вездѣ снаружи вогнутую, то въ правильности рѣшенія должно было бы возникнуть сомнѣненіе, такъ какъ посылка, близкая къ дѣйствительности, даетъ совершенно противоположный ей выводъ.

Впрочемъ проф. Сонинъ «предпочитаетъ относиться къ своему рѣшенію, какъ къ *хорошему* упражненію въ варіаціонномъ исчисленіи».

Уже приведенное выше то обстоятельство, что указанное проф. Сонинымъ рѣшеніе, будучи выведено изъ согласныхъ съ опытами положеній, даетъ результаты, совершенно имъ противоположные, достаточно было бы для того, чтобы усумниться въ доброкачественности этого рѣшенія, какъ упражненія на варіаціонное исчисленіе. Но помимо этого я считаю необходимымъ привести здѣсь другія соображенія, вслѣдствіе которыхъ разсматриваемую задачу въ той формѣ, какъ рѣшилъ её проф. Сонинъ, слѣдуетъ поставить въ числѣ *нехорошихъ* упражненій на варіаціонное исчисленіе. Для этой цѣли обратимся къ исторіи вопроса [22]).

Какъ извѣстно, вопросъ о поверхности, наименьшаго сопротивленія первоначально былъ поставленъ и рѣшенъ Ньютономъ въ его знаменитыхъ Principia [23]). Это была первая задача, относящаяся къ варіаціонному исчисленію, поставленная и рѣшенная, правда, синтетическимъ методомъ. Вторая половина XVII столѣтія и въ особенности его конецъ характеризуются какъ время вопросовъ на maximum и minimum, на

---

[22]) Первоначальная исторія вопроса была изложена въ моей статьѣ: къ вопросу о поверхности наименьшаго сопротивленія и пр. § VI. Для цѣльности очерка я здѣсь её воспроизвожу съ измѣненіями и добавленіями.

[23]) *Newtoni* Philosophiae naturalis principia mathematica. Cantabridgiae 1686. Lib. II Prop. XXXIV, Sch.

которые особенно было обращено вниманіе математиковъ того времени. Въ 1699 году, 13 лѣтъ спустя послѣ выхода въ свѣтъ перваго изданія Principia, швейцарскій посланникъ въ Лондонѣ, Fatio de Duiller предложилъ свое рѣшеніе Ньютоновой задачи [24]), которое отличается такою сложностію, что маркизъ de l'Hopital предпочелъ, недочитавъ полученную брошюру Fatio, самъ искать рѣшеніе задачи. Въ томъ-же 1699 году маркизъ l'Hôpital нашелъ это рѣшеніе и помѣстилъ его въ мемуарахъ только что получившей правительственную санкцію Парижской Академіи [25]). Рѣшеніе это отличается бо́льшею простотою и носитъ на себѣ явно аналитическій характеръ, а также даетъ возможность легко построить самую кривую. Также точно не удовлетворенный рѣшеніемъ Fatio Іоаннъ Бернулли [26]) предложилъ [27]) свое рѣшеніе разсматриваемой задачи, близкое къ рѣшенію маркиза de l'Hôpital'я. Послѣ этого и самъ Fatio

---

[24]) *Fatio de Duiller.* De murorum inclinatione, fructiferas ad arbores sustinendas, benigniorique Soli ostendendas aptissima. London 1699.

А также его статья: Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex cui addita est investigatio geometrica solidi rotundi in quod minima fiat resistentia. London 1699.

[25]) *Marquis de l'Hôpital.* Methode facile pour trouver un solide rond, qui étant mu dans un fluide en repos parallelement à son axe, rencontre moins de resistance que tout autre solide. Mem. de l'Acad. de Paris 1699.

[26]) Accepi duas plagulas priores libelli a Dn. Fatio Duillerio editi (относительно второй его статьи), & non potui satis mirari modum scribendi, quo usus est... Problema *Curvae solidi minimae resistentiae* (курсивъ въ подлинникѣ) vocat magis arduae disquisitionis, quam Problema *celerrimi descensus* (курсивъ въ подлинникѣ); sed tale fuit Duillerio forte, qui genuinam solvendi methodum non habebat. Hoc enim Problema tantae facilitatis deprehendo, ut ad ejus solutionem nullo prorsus calculo fuerit mihi opus; nam charta et calamo destitutus, *& in lecto decumbens*, solius imaginationis ope plenarie id solvi. *Joan. Bernoulli.* Acta Eruditorum Lips. 1699 Nov. pag. 513 etc. Также: Opera, Losannae 1742. T. I p. 307 et 308.

[27]) *Ioann. Bernoulli.* De solido rotundo minime resistentiae. Acta Eruditorum 1699. Aug. pag. 354, Nov. pag. 513, 1700 Mai, pag. 208. А также: Opera Losannae 1742. Tom. I pag. 307 etc.

далъ [28]) полное и обстоятельное изслѣдованіе вопроса, вслѣдъ за которымъ разсматриваемая задача можетъ считаться вполнѣ рѣшенною наиболѣе цѣлесообразнымъ для своего времени методомъ и въ послѣдующее время начинаетъ приводиться уже въ числѣ примѣровъ[29]). Такого характера, именно—какъ примѣръ, рѣшеніе Ньютоновой задачи, упрощенное до того, что и въ настоящее время приводится въ малоизмѣненной формѣ, указано въ цитированномъ не-разъ выше извѣстномъ сочиненіи Эйлера: Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, на стр. 51. Но въ томъ же сочиненіи, вышедшемъ въ 1744 году, на стр. 198, 199 и 200 (Fig. 17 et 18) находимъ рѣшенною слѣдующую задачу:

Exemplum VIII. 48. *Inter omnes curvas per puncta A et C transeuntes quae omnes aequales areas ABC comprehendant definire eam quae in fluido secundum directionem axis AB mota minimam patiatur resistentiam.*

Positis abscissa $AP=x$, applicata $PM=y$, proprietas communis est $\int ydx$ etc., т. е. рѣшеніе задачи, какъ уже и выше упомянуто, произведено при ограниченіи условіемъ постоянства площади меридіана. При этомъ полученный Эйлеромъ результатъ даетъ уравненіе кривой

$$4(tt+uu)^2=4bt^3+36btu^2-27b^2u^2$$

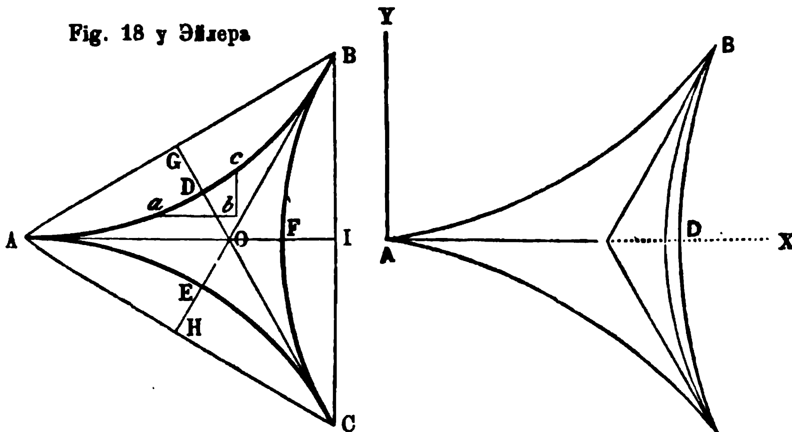
гдѣ b постоянная величина. Положивъ $b=1$, получимъ выше-

[28]) *Fatio de Duiller.* Solidi rotundi minime resistentis investigatio ex Fermatii doctrina refractionum. Acta Eruditorum 1701, pag. 135.

А также: De inveniendo solido rotundo seu tereti in quod minima fiat resistentia, Philosophical Transactions 1713. Epistola ad Joh. Chist. Fatium его брату, извѣстному совершеніемъ древнѣйшаго измѣренія высоты Монблана.

[29]) Въ дополненіе къ сказанному необходимо указать на интересное видоизмѣненіе разсматриваемой задачи, сдѣланное Bouger именно: Une base qui est exposée au choc d'un fluide étant donnée, trouver l'espace de conoïde dont il faut la couvrir, pour que l'impulsion soit la moindre qu'il est possible. *Bouger.* Memoire de l'Academie de Sciences de Paris 1733 pag. 85, а также въ его Traité du Navire liv III, sect. 5.

приведенное здѣсь (на стр. 12) данное проф. Сонинымъ уравненіе (15). Вслѣдствіе этого и чертежи, какъ указанный въ



Черт. 3. Черт. 2.

сочиненіи Эйлера (Fig. 18, здѣсь черт. 3), такъ и находящійся въ статьѣ проф. Сонина (на стр. 9, здѣсь черт. 2) представляютъ тожественную кривую — гипоциклоиду [30]) съ радіусомъ катящагося круга, равнымъ одной трети радіуса неподвижнаго.

Такимъ образомъ 140 лѣтъ тому назадъ найдено было рѣшеніе задачи, рѣшенной теперь проф. Сонинымъ.

По поводу своего рѣшенія Эйлеръ заключаетъ: Hujus jam curvae quaecunque portio *abc* rectis *ab* & *bc* parallelis ipsis *AI* & *BI* & arcu curvae *ac* comprehensa, ita erit comparata, ut arcus *ac* inter omnes alios puncta *a* & *c* jungentes, & aequalem aream *abc* continentes, in fluido secundum directionem *ba* mota minimam patiatur resistentiam (стр. 200), т. е. полученная имъ кривая, тожественная съ найденной проф. Сонинымъ, даетъ при вращеніи тѣло съ наименьшимъ сопротивленіемъ въ сравненіи со всякимъ другимъ, имѣющимъ *одинаковую съ нимъ площадь меридіанальнаго сѣченія.*

[30]) Притомъ замѣчательно то, что оба чертежа, какъ данный въ сочиненіи Эйлера, такъ и предложенный проф. Сонинымъ одинаковы по размѣрамъ и тождественны по принятому масштабу.

Съ открытіемъ Лагранжемъ варіаціоннаго исчисленія въ началѣ второй половины XVIII столѣтія [31]) одна изъ первыхъ задачъ, къ которымъ сдѣлали его приложеніе, была задача Ньютона о поверхности наименьшаго сопротивленія. Въ рѣшеніи ея не встрѣчалось ни малѣйшаго затрудненія до тѣхъ поръ, пока Лежендромъ не былъ поднятъ вопросъ о различеніи maximum и minimum интеграловъ, — вопросъ, который раньше обыкновенно рѣшался характеромъ самой задачи. Въ 1786 г. Лежендръ въ своемъ упомянутомъ здѣсь выше знаменитомъ мемуарѣ: Sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le calcul des variations [32]) указалъ для этого способъ, носящій его имя, который и до сихъ поръ еще далеко не потерялъ своего значенія, не смотря на способъ Якоби и на нѣкоторые другіе, предложенные позднѣйшими изслѣдователями. Между примѣрами, къ которымъ Лежендръ прилагаетъ свой способъ, первымъ стоитъ задача: Sur le solide de la moindre resistance, относительно которой онъ говоритъ (стр. 22): La matière n'est pas neuve; cependant, on verra qu'il restoit quelques observations à faire sur la nature de ce problème et sur la nature dont le calcul y satisfait. Далѣе (стр. 23) Лежандръ первый показываетъ, что на зигзагообразной ломанной линіи значеніе интеграла сопротивленія можетъ быть сдѣлано ме́ньшимъ, чѣмъ на кривой Ньютона; вслѣдствіе этого онъ заключаетъ, что (стр. 24) les minimum et les maximun obtenus dans quelques cas particuliers de notre problème ne sont que relatifs ou accidentels и затѣмъ тутъ же приводитъ, какъ и выше было указано, что la courbe construite d'après l'équation

---

[31]) Три мемуара Lagrange'a: 1759 г. Recherches sur la methode de maximis et minimis (Misc. Soc. Taur. I). 1762 г. Essai sur une nouvelle methode pour determiner les maxima et minima des formules intégrales indéfinie (Ibid. II) и 1766 г. Sur la methode des variations (Ibid. IV).

[32]) Memoires de l'Academie roylale des Sciences de Paris 1786 p. 9 etc. А также: Addition au memoire précédent Ibid. 1787 p. 348 etc.

$$y=\frac{a(1+pp)^{3/2}}{p^3}$$

... donnera un minimum absolu pour la formule $\int\frac{ydy^3}{ds^2}$

Вотъ эта кривая и получилась у меня при предѣльныхъ условіяхъ, какъ кривая, соотвѣтствующая Ньютоновой.

Только что приведенное указаніе Лежендра отразилось самымъ роковымъ образомъ на послѣдующей исторіи разсматриваемой нами задачи: съ этого времени стало чувствоваться къ ней замѣтное охлажденіе, дошедшее до ошибочной крайности. Момсенъ въ первой половинѣ текущаго столѣтія неправильно утверждалъ, что кривая Ньютона даетъ тѣло съ наибольшимъ сопротивленіемъ и что hinc igitur satis perspicitur ex hac quaestione, quae in omnibus fere libris de hoc argumento conscriptis occurrere solet, soluta parum sane emolumenti ad societatem humanam redundare [33]). Вообще же разсматриваемая задача послѣ указаній Лежендра стала приводиться лишь какъ примѣръ, да и то кратко, съ осторожностію, какъ бы противъ желанія безъ всякихъ подробныхъ изслѣдованій, только въ силу ея громкой исторической извѣстности. Въ такой формѣ приводится она у Лакроа въ его пространномъ трактатѣ диференціальнаго и интегральнаго исчисленія [34]), причемъ Лакроа поясняетъ: problème resolu par Newton avant toute autre recherche du même genre. Но еще болѣе характерный примѣръ въ этомъ отношеніи представляетъ громадный курсъ Штрауха [35]), въ которомъ изъ 899 страницъ убористой печати in 4⁰, посвященныхъ примѣрамъ, удѣлена лишь одна и то не полная страница (399-я второго тома) задачѣ о поверхности наименьшаго сопротивленія, въ то

[33]) *Momsen.* Etementa calculi variationum ratione ad analysin infinitorum quam proxime accedente tractata. Altona 1833 p. 19.

[34]) *Lacroix.* Traité du calcul differentiel et du calcul integral, 2 étid. Paris 1810—1819. Tom II, pag. 691.

[35]) *Strauch.* Theorie und Anvendung des sogenannten variationscalculs Zürich 1849—1854.

время какъ изслѣдованія другихъ задачъ, далеко не отличающихся такимъ значеніемъ, какъ указанная, ни въ историческомъ, ни въ практическомъ отношеніи, занимаютъ десятки страницъ. При этомъ достойно вниманія то, что Штраухъ, изслѣдуя вообще весьма подробно вопросъ о различеніи maximum и minimum въ другихъ задачахъ, по отношенію къ этой не счелъ возможнымъ даже указать, даетъ ли получаемое рѣшеніе minimum интеграла или нѣтъ, замѣтивъ въ тоже время, что dieses Problem ist das erste unter denen, wo sogar die Curve selbst... gesucht wird [36]).

Въ началѣ второй половины текущаго столѣтія упомянутое выше охлажденіе, порожденное замѣчаніемъ Лежендра, дошло до того, что задача Ньютона о поверхности наименьшаго сопротивленія совсѣмъ изгоняется даже изъ учебниковъ. Столь полный и обстоятельный курсъ варіаціоннаго исчисленія Муаньо [37]), заключающій много разнообразныхъ, подробно изслѣдованныхъ примѣровъ, не содержитъ вовсе задачи о поверхности наименьшаго сопротивленія и понятно почему: эта задача была бы прямымъ противорѣчіемъ принятой Муаньо, изящно

[36]) Тотъ-же самый характеръ приведенія задачи Ньютона послѣ указаній Лежендра не трудно прослѣдить и въ механикѣ. Уже Пуассонъ (*Poisson*. Traité de mecanique. Paris, 1833. Tom. II, pag. 40) едва упоминаетъ объ этой задачѣ, сказавъ впрочемъ, что рѣшеніе ея не представляетъ никакихъ затрудненій. Въ примѣрахъ Вальтона (*Walton*. A collection of Problem in illustration of the principles of theoretical Hydrostatics and Hydrodynamics. Cambridge 1847) задача Ньютона приводится (pag. 209—211) почти также кратко, какъ и у Пуассона, занимаетъ лишь нѣсколько строкъ, въ то время какъ ея исторіи посвящена слишкомъ цѣлая страница. Въ той же самой формѣ, только съ болѣе подробнымъ изслѣдованіемъ полученной кривой, излагается задача Ньютона у Жульена (*Jullien*. Problèmes de mécanique rationnele Paris, 1855. Tom. II. pag. 504—509), который впрочемъ, какъ извѣстно, составилъ свой сборникъ преимущественно по Walton'у. При этомъ является не понятнымъ то, что какъ Walton, такъ и Jullien, указавъ обѣ крайне различныя вѣтви полученной кривой, не опредѣляютъ, будетъ ли интегралъ сопротивленія имѣть на нихъ minimum. Въ позднѣйшихъ сочиненіяхъ по механикѣ задача Ньютона обыкновенно вовсе не приводится.

[37]) *Moigno*. Calcul des variations. Paris 1861.

ихъ изложенной, теоріи Якоби для различенія maximum и minimum интеграла, такъ какъ всѣ условія Якоби выполняются, а интегралъ на полученной кривой согласно указанію еще Лежендра, minimum'а не представляетъ [38]).

Сказанное до сихъ поръ относится къ задачѣ о поверхности наименьшаго сопротивленія въ формѣ, указанной Ньютономъ. Что же касается приведенной выше той же задачи въ формѣ, данной Эйлеромъ, то она вообще не встрѣчается, что̀ впрочемъ и слѣдовало ожидать, такъ какъ полученная Эйлеромъ въ рѣшеніи кривая—гипоциклоида помимо указаній Лежендра, которыя безъ труда могутъ быть распространены и на неё, еще *очевидно* противорѣчитъ дѣйствительности.

Въ такомъ положеніи находился разсматриваемый вопросъ до тѣхъ поръ, пока практика слишкомъ настоятельно не потребовала его изслѣдованія, т. е. пока скорость плаванія не зависѣла главнымъ образомъ отъ формы судна и возможно цѣлесообразной затраты движущей силы, а также пока стрѣляли пулями и ядрами почти исключительно шарообразной формы. Въ шестидесятыхъ годахъ текущаго столѣтія, когда опредѣлилась вся важность только-что указанныхъ практическихъ требованій, снова обратили бо́льшее вниманіе на задачу о поверхности наименьшаго сопротивленія первоначально въ Англіи, какъ странѣ наиболѣе заинтересованной въ ея изслѣдованіи. Сначала B. L. Ellis, а затѣмъ Тодгёнтеръ [39]) изслѣдовали нѣкоторые частности, относящіеся къ этой задачѣ. Въ 1871 году вышло въ Лондонѣ извѣстное цитируемое выше сочиненіе Тодгёнтера Researches in the calcutus of variations, удостоенное преміи Адамса и сдѣлавшееся уже библіографической рѣд-

---

[38]) Точно также въ послѣднее время задача Ньютона, не смотря на свою характерную простоту рѣшенія, не приводится и въ сборникахъ примѣровъ въ числѣ упражненій на варіаціонное исчисленіе. Ея нѣтъ напр. у *Frenet*. Recuil d'exercices sur le calcul infinetesimal. Paris 1882 и др.

[39]) Quartely Journal of Mathematics v. г. X, а также, какъ и выше указано Philosophical Magazine Nowember 1867.

костію,—сочиненіе, въ которомъ Тодгёнтеръ весьма подробно изслѣдуетъ задачу о поверхности наименьшаго сопротивленія, посвящая ей двѣ главы [40]). Первая глава, означенная: solid of minimum resistance, содержитъ крайне обстоятельное изслѣдованіе задачи Ньютона. Приведя въ началѣ общеизвѣстный, не встрѣчающій никакого затрудненія пріемъ ея рѣшенія, Тодгёнтеръ дѣлаетъ заключеніе: Thus theoretically all is satisfactory. But there are some important remarks to make on the solution.

187. We must be careful not to speak of our solution as giving the solid of *least* [41]) resistance (стр. 169) и затѣмъ приводитъ упомянутое выше замѣчаніе Лежандра, что полученная кривая не даетъ minimum интеграла, который на ломанной зигзагообразной линіи получаетъ меньшее значеніе. Дальнѣйшая часть главы посвящается изслѣдованію этого обстоятельства, а также нѣкоторыхъ видоизмѣненій задачи.

Вторая глава имѣетъ предметомъ: Solid of minimum risistance with hiven volume и начинается крайне простымъ выводомъ уравненія, тожественнаго съ найденнымъ проф. Сонинымъ, причемъ Тодгёнтеръ показываетъ, что полученная кривая есть гипоциклоида съ радіусомъ катящагося круга, равнымъ одной трети радіуса неподвижнаго. Выведя затѣмъ условія для минимума интеграла, Тодгёнтеръ замѣчаетъ, какъ выше приведено: We must not say, that we have obtained the solid of *least* (курсивъ въ подлинникѣ) resistance (стр. 200) и далѣе излагаетъ изслѣдованія, связанныя съ этимъ замѣчаніемъ. Въ заключеніе Тодгёнтеръ указываетъ наиболѣе общую аналитическую постановку вопроса (стр. 214—219).

---

[40]) Главы IX и X, занимающія 53 страницы, съ 167 по 219 включительно. Не безъинтересно при этомъ то обстоятельство, что въ другомъ сочиненіи, написанномъ по поводу того же поставленнаго въ 1869 году на премію Адамса вопроса,—сочиненіи: *Wilkinson*. Of false discontinuity, Cambridge 1871, при множествѣ разобранныхъ примѣровъ о задачѣ Ньютона даже и не упомянуто. Сочиненію Wilkinson'а премія не присуждена.

[41]) Курсивъ въ подлинникѣ.

Разобравъ подробно обѣ формы задачи о поверхности наименьшаго сопротивленія какъ поставленную Ньютономъ, такъ и обусловленную постоянствомъ объёма, Тодгёнтеръ тѣмъ не мерѣе не указываетъ дѣйствительнаго источника встрѣчаемыхъ противорѣчій и по прежнему къ получаемымъ результатамъ примѣняетъ условія Якоби для различенія maximum и minimum интеграла. Только въ послѣднее время, нѣсколько лѣтъ тому назадъ, Вейерштрассъ далъ [42]) полное объясненіе встрѣтившемуся затрудненію,—объясненіе, заключающееся въ томъ, что извѣстныя условія Якоби для различенія maximum и minimum интеграла недостаточны [43]). Какъ примѣръ въ подтвержденіе и уясненіе своихъ относящихся къ этому теоретическихъ соображеній Вейерштрассъ приводитъ рѣшеніе задачи о поверхности наименьшаго сопротивленія въ формѣ, данной Ньютономъ, для которой онъ и показываетъ, что хотя условія Якоби и выполняются, тѣмъ не менѣе интегралъ на полученной кривой минимума не имѣетъ.

Такова исторія вопроса: она достаточно выясняетъ, можно ли считать задачу о поверхности наименьшаго сопротивленія въ приводимой проф. Сонинымъ формѣ «хорошимъ упражненіемъ въ варіаціонномъ исчисленіи», считать въ то время, какъ задача, будучи давно извѣстною, перестала входить въ курсы какъ примѣръ; въ то время какъ въ рѣшеніи ея получаются результаты, противорѣчащіе дѣйствительности; наконецъ и теоретически можно показать, что найденная проф. Сонинымъ поверхность не представляетъ поверхности наименьшаго сопротивленія. А по отношенію къ приложенію способа Якоби для

---

[42]) Сравн. мою статью: «О формахъ артиллерійскихъ снарядовъ», въ № 2727 газеты «Новоросс. Телеграфъ» отъ 29 Марта 1884 г.

[43]) Нельзя не привести здѣсь глубоко справедливаго замѣчанія Лежандра, которое онъ высказалъ въ 1786 году, оканчивая свой знаменитый, цитированный выше неоднократно, мемуаръ о различеніи maximum и minimum въ варіаціонномъ исчисленіи: La question de distinguer un maximum d'un minimum n'est pas aussi simple qu'elle pouvoit paraître au premier coup d'oeil.

различенія maximum и minimum интеграла означенная задача съ точки зрѣнія, принятой проф. Сонинымъ въ его статьѣ, становится *нехорошимъ* упражненіемъ, такъ какъ всѣ условія для minimum'а интеграла выполняются и въ тоже время интегралъ, вопреки утвержденію проф. Сонина, minimum'а не представляетъ. *Такое* «хорошее упражненіе» скорѣе подтверждаетъ слѣдующее мнѣніе Barbera [44]): Sarebbe difficile di trovare in tutta l'aritmetica sia pura, sia applicata un altro problema [45]), per risolvere il quale gli analisti abbiano mostrato maggiore imperìcia nel farne l'analisi, più grande confusione d'idee, e tanta cura nell' occultarne i difetti.

Резюмируя вышеизложенное, я считаю возможнымъ утверждать, что сдѣланныя проф. Сонинымъ возраженія на мою статью не имѣютъ никакого значенія, не только, какъ приведенныя имъ безъ всякаго доказательства, но и вслѣдствіе указанной здѣсь ихъ неправильности; что изслѣдованія проф. Сонина о поверхности наименьшаго сопротивленія являются излишними не только потому, что, какъ здѣсь указано, они давно были сдѣланы и всѣмъ извѣстны, но также и потому, что они произведены пріемами, неприложимость которыхъ была установлена гораздо раньше появленія статьи проф. Сонина, а еще потому, что полученные проф. Сонинымъ изъ основаній, согласныхъ съ дѣйствительностію, выводы ей противорѣчатъ; что, наконецъ, статья проф. Сонина, написанная безъ «наведенія надлежащихъ справокъ», можетъ служить «хорошимъ» подтвержденіемъ приведенной имъ пословицѣ: «La critique est aisée, mais l'art est difficile»..

---

[44]) *Barbera.* I simplicii contemporanei ovvero critica del calcolo infinitesimale. Bologna 1883 p. 465.

[45]) Для ясности фразы, взятой изъ средины разсужденія, необходимо добавить: come il problema del calcolo delle variazioni.

О нѣкоторыхъ особенностяхъ въ постановкѣ задачи Ньютона о поверхности наименьшаго сопротивленія.

(Изъ сообщенія, сдѣланнаго въ засѣданіи Математическаго Отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей 2-го Ноября 1884 г.).

А. Старкова.

Общепринятый путь рѣшенія задачи Ньютона о поверхности вращенія съ наименьшимъ сопротивленіемъ заключается въ приравненіи нулю первой варіаціи интеграла

$$\int y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3 ds$$

по предварительномъ его приведеніи къ независимой перемѣнной x помощію формулъ

$$p=\frac{dy}{dx} \qquad dy=pdx \quad \text{и} \quad \frac{dy}{ds}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

на основаніи которыхъ получимъ

$$\delta\int y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3 ds=\delta\int y\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 dy=\delta\int y\frac{p^3}{1+p^2}\,dx=0,$$

откуда, совершивъ показанное дѣйствіе, безъ труда найдемъ уравненіе кривой вида

$$y=c_1\frac{(1+p^2)^2}{p^3}\ ,\quad x=c_1\left\{\frac{3}{4}\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^2}+\mathrm{Log}\,p\right\}+c_2$$

Полученная при этомъ кривая имѣетъ двѣ вѣтви, изъ которыхъ на одной, на *AB* (см. прилагаемый чертежъ), по условіямъ Якоби, интегралъ сопротивленія имѣетъ minimum и на другой, на *AC*, — maximum. Такимъ образомъ всѣ теоретическія требованія легко выполняются[1]) и задача представляется крайне несложною. Тѣмъ не менѣе эта кажущаяся простота исчезаетъ при болѣе подробномъ изслѣдованіи вопроса.

Еще Лежендръ въ 1786 году въ своемъ знаменитомъ мемуарѣ: sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le calcul des variations[2]) показалъ, что въ кривой Ньютона интегралъ сопротивленія minimum'а не имѣетъ и что нѣкоторая ломанная линія даетъ поверхность съ мéньшимъ сопротивленіемъ. Тоже самое было указано и нѣкоторыми другими авторами въ особенности подробно Тодгёнтеромъ въ цитированномъ выше его извѣстномъ сочиненіи Researches in the calculus of variations. Но эта ломанная линія не заключается въ аналитической постановкѣ задачи послѣ указаннаго выше преобразованія интеграла сопротивленія, а потому не оказываетъ вліянія и на рѣшеніе. Здѣсь имѣется въ виду указать возможность введенія ломанной линіи въ аналитическія условія задачи, чѣмъ достигается и рѣшеніе въ болѣе общей формѣ.

Ломанная линія въ сравненіи съ кривою имѣетъ ту особенность, что въ то время какъ для кривой выполняются условія

---

[1]) Или по выраженію *Todhunter*'a Researches in the calculus of variations. London 1871 стр. 169: Thus theoretically all is satisfactory. But...

[2]) Memoire de L'Academie de Paris 1786. Болѣе подробная исторія этой задачи изложена мною въ статьѣ: Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія. Записки Новоросс. Общ. Естествоисп. Мат. Отд. Томъ VI, ст. 3.

$$dx^2+dy^2-ds^2=0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-1=0$$

для ломанной они вообще не имѣютъ мѣста [3]). Поэтому введеніе условія

$$x_1^2+y_1^2-1=0, \tag{1}$$

гдѣ для краткости обозначено

$$x_1=\frac{dx}{ds} \quad \text{и} \quad y_1=\frac{dy}{ds} \tag{2}$$

въ аналитическую постановку задачи влечетъ за собою ограниченіе ея принятіемъ въ разсчетъ лишь кривыхъ линій, для которыхъ условіе (1) имѣетъ мѣсто, и исключеніемъ ломанныхъ, для которыхъ оно не выполняется. Невведеніе же условія (1) равносильно постановкѣ задачи въ наиболѣе общей формѣ и даетъ рѣшеніе, обнимающее какъ кривыя, такъ и ломанныя линіи.

Въ приведенной выше общеизвѣстной формѣ рѣшенія Ньютоновой задачи принимается за независимую перемѣнную x, вслѣдствіе чего условіе (1) вводится неявно въ аналитическую постановку задачи и заключается въ непрерывности измѣненій p. Поэтому такая форма рѣшенія имѣетъ въ виду только кривыя линіи и исключаетъ ломанныя, для введенія которыхъ необходимо изъ нея исключить условіе (1). Этого можно достигнуть такимъ образомъ.

Если-бы съ самаго начала было поставлено цѣлію рѣшить задачу Ньютона, не приводя интегралъ сопротивленія предварительно къ независимой перемѣнной x, то, какъ извѣстно[4]), было-бы необходимо взять варіацію отъ выраженія

---

[3]) Подробно объ этомъ см. въ моей статьѣ, указанной въ выноскѣ ([2]).

[4]) *Moigno*. Calcul des variations Paris 1861. pag. 235 etc.

$$\delta\int\left\{yy_1^3+\lambda(x_1^2+y_1^2-1)\right\}ds=0, \qquad (3)$$

гдѣ значенія x_1 и y_1 опредѣляются условіями (2).

Дѣйствительно, получаемыя обыкновеннымъ пріемомъ изъ выраженія (3) два диφференціальныя уравненія

$$\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial x_1}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial V}{\partial y}-\frac{d}{dy}\frac{\partial V}{\partial y_1}=0 \qquad (4)$$

имѣютъ интеграломъ

$$V=x_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+y_1\frac{\partial V}{\partial y_1} \quad \text{или} \quad \lambda+yy_1^3=0. \qquad (5)$$

Съ другой стороны изъ уравненія

$$\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial x_1}=0$$

такъ какъ V не содержитъ x и $\frac{\partial V}{\partial x}=0$, получимъ

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}=-2c_1 \quad \text{или} \quad x_1\lambda+c_1=0,$$

откуда значеніе λ опредѣлится

$$\lambda=-\frac{c_1}{x_1}$$

Вносят это значеніе λ въ выраженіе интеграла (5), будемъ имѣть

$$yx_1y_1^3=c_1$$

откуда, замѣнивъ x_1 и y_1 ихъ величинами

$$x_1=\frac{dx}{ds}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{и} \quad y_1=\frac{dy}{ds}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{гдѣ} \quad p=\frac{dy}{dx}$$

найдемъ

$$y = c_1 \frac{(1+p^2)^2}{p^3}$$

уравненіе той-же самой кривой, которую получили первоначально, принимая x за независимую перемѣнную, какъ впрочемъ и слѣдовало ожидать вслѣдствіе тожественности приведенныхъ здѣсь обоихъ пріёмовъ.

Но только что указанный второй изъ этихъ пріёмовъ имѣетъ то преимущество въ сравненіи съ первымъ, что при немъ условіе (1) входитъ явно и исключеніе этого условія изъ аналитической постановки задачи не представляетъ никакого затрудненія: стоитъ только взять варіацію не отъ выраженія

$$\delta \int \left\{ y y_1{}^3 + \lambda (x_1{}^2 + y_1{}^2 - 1) \right\} ds$$

а отъ интеграла

$$\delta \int y y_1{}^3 ds$$

принимая за независимую перемѣнную s. Приэтомъ ломанная линія не исключается изъ аналитической постановки задачи и мы имѣемъ

$$\delta \int y y_1{}^3 ds = 0$$

откуда

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{ds}\frac{\partial V}{\partial y_1} = 0 \quad \text{или} \quad y_1\left(y_1{}^2 + 3y\frac{dy_1}{ds}\right) = 0$$

которое распадается на два уравненія

$$y_1 = \frac{dy}{ds} = 0 \quad \text{и} \quad y_1{}^2 + 3y\frac{dy_1}{ds} = 0,$$

изъ нихъ первое принадлежитъ оси вращенія или всякой ей параллельной прямой, а второе послѣ раздѣленія перемѣнныхъ и замѣны ds чрезъ

$$ds=\frac{dy}{y_1} \quad \text{изъ} \quad y_1=\frac{dy}{ds}$$

даетъ

$$\frac{dy}{y}+3\frac{dy_1}{y_1}=0 \quad \text{или} \quad yy_1^3=c_1$$

откуда

$$y=\frac{c_1}{y_1^3} \quad \text{или} \quad y=c_1\frac{(1+p^2)^{3/2}}{p^3} \tag{6}$$

уравненіе кривой, относительно которой еще Лежендръ замѣтилъ [5]), что на ней интегралъ сопротивленія имѣетъ абсолютный minimum, чего нѣтъ на кривой Ньютона.

Для опредѣленія x мы имѣемъ

$$\frac{dx}{ds}=\sqrt{1-y_1^2} \quad \text{или} \quad dx=\sqrt{1-y_1^2}\,\frac{dy}{y_1} \quad \text{и} \quad dy=-\frac{3c_1}{y_1^4}dy_1$$

а потому

$$x=-3c_1\int\frac{\sqrt{1-y_1^2}}{y_1^5}dy_1+c_2=$$

$$=-3c_1\int\frac{dy_1}{y_1^5\sqrt{1-y_1^2}}+3c_1\int\frac{dy_1}{y_1^3\sqrt{1-y_1^2}}+c_2$$

Совершивъ здѣсь показанное интегрированіе [6]), найдемъ

$$x=\frac{3}{9}c_1\left\{\frac{2-y_1^2}{y_1^4}\sqrt{1-y_1^2}+\mathrm{Log}\frac{1-\sqrt{1-y_1^2}}{y_1}\right\}+c^2$$

[5]) *Legendre*. Mem. cit: pag. 24.

[6]) *Bertrand*. Calcul integral. Paris 1870 p. 52.

или внося сюда значеніе y_1 изъ перваго уравненія (6), а также положивъ для краткости

$$\sqrt[3]{c_1}=a \quad \text{и} \quad -\frac{1}{8}c_1\mathrm{Log}c_1+c_2=b$$

получимъ уравненіе кривой въ конечномъ видѣ

$$x=\frac{3}{8}\frac{1}{a}\left\{(2y-a^3y^{1/3})\sqrt{y^{2/3}-a^2}+a^4\mathrm{Log}(y^{1/3}-\sqrt{y^{2/3}-a^2})\right\}+b$$

помощію котораго весьма легко построить самую кривую.

Изъ перваго уравненія (6), представивъ его

$$\frac{dy}{ds}=\frac{a}{y^{1/3}} \quad \text{или} \quad y^{1/3}dy=ads$$

получимъ длину дуги кривой

$$\frac{3}{4}y^{4/3}=as+c_3 \quad \text{или} \quad s=\frac{3}{4}\frac{1}{a}(y^{4/3}-a^4)$$

такъ какъ при $y=a^3$, дуга s должна равняться нулю.

Съ другой стороны длина касательной T отъ точки касанія до пересѣченія съ осью вращенія (осью X-овъ) есть

$$T=y\frac{ds}{dy}=\frac{y^{4/3}}{a} \; ;$$

изъ выраженія для длины дуги мы имѣемъ

$$\frac{y^{4/3}}{a}=\frac{4}{3}s+a^3$$

а потому

$$T=\frac{4}{3}s+a^3 \quad \text{и} \quad \frac{dT}{ds}=\frac{4}{3}=\text{постоянному.}$$

Слѣдовательно длина дуги будетъ

$$s = \frac{3}{4}(T - a^3)$$

выраженіе весьма удобное для графическаго выпрямленія дуги, —стоитъ только изъ длины касательной T вычесть разстояніе начала кривой отъ начала координатъ и взять три четверти полученной разности.

Кромѣ того извѣстно, что $y_1 = \frac{dy}{ds} = \sin\varphi$, гдѣ φ есть уголъ, составляемый касательною съ осью X-овъ, въ данномъ случаѣ съ осью вращенія, а также изъ перваго уравненія (6) имѣемъ

$$\sin\varphi = \frac{a}{y^{1/3}} \quad \text{или} \quad y^{1/3} = \frac{a}{\sin\varphi};$$

поэтому существенное уравненіе кривой[7]) представится въ такомъ видѣ

$$s = \frac{3}{4}a^3\left\{\frac{1}{\sin^4\varphi} - 1\right\} \quad \text{или} \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \frac{4}{3}\frac{s}{a^3}}}$$

уравненіе, изъ котораго очевидно, что кривая имѣетъ въ началѣ ординату y касательною и что кривизна ея постепенно уменьшается съ увеличеніемъ дуги φ, дѣлаясь въ безконечности равной нулю.

Тоже самое подтверждается и значеніемъ радіуса кривизны разсматриваемой кривой

$$\rho = \frac{dx}{ds} : \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{3}{a^2}y^{4/3}\sqrt{y^{2/3} - a^2} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt[4]{3}}\left(4\frac{s}{a} + 3a^2\right)\sqrt{\sqrt{4\frac{s}{a} + 3a^2} - \sqrt{3}}$$

[7]) *Boole*. A treatise on differential equations Fourth ed. London 1877 p. 264 etc.

выраженіе, представляющее въ другой формѣ существенное уравненіе кривой, изъ котораго слѣдуетъ, что длина радіуса кривизны увеличиваетя вмѣстѣ съ возрастаніемъ дуги.

Кромѣ того изъ выраженія

$$\rho=\frac{3y^{4/3}}{a^2}\sqrt{y^{2/3}-a^2}=3\frac{y^{1/3}}{a}\cdot\frac{\sqrt{y^{2/3}-a^2}}{a}=\frac{3T}{\operatorname{tang}\varphi}=\frac{3T}{p}$$

легко построить длину радіуса кривизны ρ во всякой точкѣ кривой,—стоитъ только утроить длину касательной и провести чрезъ найденную точку прямую параллельную оси Y-ковъ; разстояніе отъ точки пересѣченія этой параллельной съ продолженіемъ нормали до точки, взятой на кривой, считаемое по направленію продолженной нормали, представитъ длину радіуса кривизны ρ.

Не трудно видѣть, что знакъ второй варіаціи будетъ зависѣть отъ выраженія

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y_1{}^2}=6yy_1$$

которое всегда положительно, такъ какъ y и y_1 связаны уравненіемъ $yy_1{}^3=c_1$. Поэтому на всей кривой интегралъ сопротивленія имѣетъ minimum.

Точно также не трудно видѣть, что при одинаковой длинѣ дугъ интегралъ сопротивленія имѣетъ мéньшее значеніе на указанной здѣсь кривой Лежендра въ сравненіи съ значеніемъ его на кривой Ньютона. Дѣйствительно на первой кривой, опредѣляемой уравненіемъ

$$y=c_1\frac{(1+p^2)^{3/2}}{p^3}$$

имѣемъ значеніе интеграла сопротивленія вида

$$k\int yy_1{}^3ds=k\int c_1\frac{(1+p^2)^{3/2}}{p^3}\cdot\frac{p^3}{(1+p^2)^{3/2}}ds=kc_1\int ds=kc_1S_1$$

На кривой же Ньютона, опредѣляемой уравненіемъ

$$y=c_1\frac{(1+p^2)^2}{p^3},$$

интегралъ сопротивленія получаетъ значеніе

$$k\int yy_1{}^3ds=k\int c_1\frac{(1+p^2)^2}{p^3}\cdot\frac{p^3}{(1+p^2)^{3/2}}ds=$$

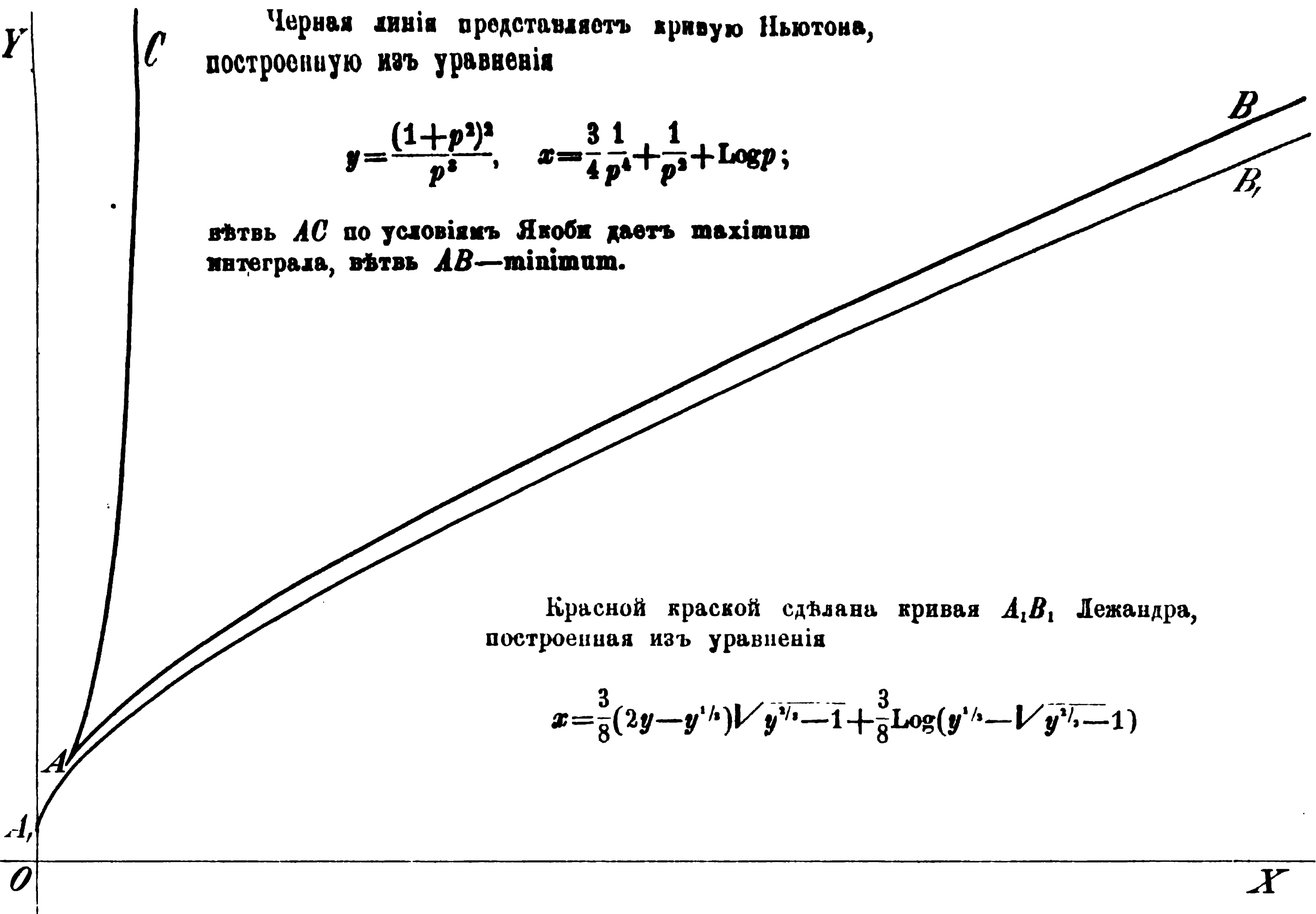
$$=kc_1\int\sqrt{1+p^2}ds=kc_1\int\frac{ds}{dx}ds$$

или, развернувъ $\sqrt{1+p^2}$ въ рядъ, найдемъ

$$kc_1\int\sqrt{1+p^2}\,ds=kc_1\int ds+kc_1\int zds=kc_1S_1+kc_1\omega$$

что̀ и требовалось показать.

Въ заключеніе остается упомянуть о томъ, что если бы интегралъ сопротивленія былъ ограниченъ какимъ либо условіемъ (minimum relativa), то помощію указаннаго здѣсь пріёма получаются замкнутыя, наружу выпуклыя поверхности, которыя своей формой напоминаютъ рыбъ, соотвѣтствующихъ по характеру образованія поверхностямъ вращенія.


Черная линія представляетъ кривую Ньютона, построенную изъ уравненія
$y=\frac{(1+p^2)^2}{p^3}, \quad x=\frac{3}{4}\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^2}+\mathrm{Log}p;$
вѣтвь AC по условіямъ Якоби даетъ maximum интеграла, вѣтвь AB—minimum.
Красной краской сдѣлана кривая A_1B_1 Лежандра, построенная изъ уравненія
$x=\frac{3}{8}(2y-y^{1/3})\sqrt{y^{2/3}-1}+\frac{3}{8}\mathrm{Log}(y^{1/3}-\sqrt{y^{2/3}-1})$
Y
C
B
B_1
A
A_1
O
X

Геометрическое значеніе интеграловъ Френеля.

Н. Умова.

Настоящая статья имѣетъ цѣлью представить возможно наглядно свойства интеграловъ Френеля:

$$A=\int_0^z \cos\frac{\pi}{2}z^2dz,\quad B=\int_0^z \sin\frac{\pi}{2}z^2dz.$$

Возьмемъ на плоскости систему прямоугольныхъ координатъ: абсциссъ v и ординатъ z, и начертимъ параболу

$$\frac{\pi}{2}z^2=v, \qquad \text{(I)}$$

принимая произвольную длину за единицу длины (черт. 1).

Представимъ себѣ далѣе круглый цилиндръ (черт. 2), радіусъ котораго равняется выбранной нами единицѣ длины. Ось цилиндра примемъ за ось z-овъ системы прямоугольныхъ координатъ въ пространствѣ. Двѣ другія оси означимъ черезъ x и y. Навернемъ на этотъ цилиндръ плоскость съ начерченной параболой такимъ образомъ, чтобы ось параболы совпадала съ кругомъ пересѣченія цилиндра и плоскости xy, а вершина параболы совпала съ точкою пересѣченія цилиндрической поверхности и оси x. Парабола, обвивая цилиндръ, образуетъ двѣ винтовыя линіи, изъ коихъ одна направляется въ

сторону положительныхъ z-овъ, другая въ сторону отрицательныхъ. Для нашей цѣли достаточно разсмотрѣть только первую изъ этихъ двухъ линій $O'BCDE$..... Будемъ ее проэктировать на координатныя плоскости zx и zy. Кривую на плоскости zx назовемъ черезъ ξ, на плоскости zy черезъ η. Координаты z нашихъ проэкцій будутъ представляться ординатами параболы:

$$z = GK = HL = MB = \sqrt{\frac{2}{\pi} v},$$

а координаты x y будутъ:
для кривой ξ въ плоскости zx,

$$x = OK = \cos v, \ y = o;$$

для кривой η въ плоскости zy:

$$y = OL = \sin v, \ x = o.$$

Кривая ξ пересѣкаетъ ось z въ точкахъ, для которыхъ

$$x = \cos v = o, \text{ т. е. } v = (2h+1)\frac{\pi}{2}, \ h = 0, 1, 2, \ldots$$

и ординаты точекъ пересѣченія:

$$\bar{z}_\xi = \sqrt{2h+1}.$$

Кривая η пересѣкаетъ ось z въ точкахъ, для которыхъ

$$y = \sin v = o, \text{ т. е. } v = 2h\frac{\pi}{2} \text{ и } \bar{z}_\eta = \sqrt{2h}, \ h = 0, 1, 2 \ldots$$

Будемъ откладывать на оси z длины, равныя корнямъ квадратнымъ изъ чиселъ натуральнаго ряда, такъ, чтобы одна оконечность наносимыхъ линій совпадала съ началомъ коорди-

натъ; другая оконечность представитъ собою одну изъ разсмотрѣнныхъ выше точекъ пересѣченія. Означая черезъ n цѣлое число, выраженіе

$$\bar{z}=\sqrt{n},\ n=0,1,2,3....$$

для n четнаго даетъ $\bar{z}_\eta$, для нечетнаго $\bar{z}_\xi$. Эти самыя ординаты соотвѣтствуютъ точкамъ пересѣченія съ плоскостями координатъ zx и zy — параболы, навернутой на цилиндръ. Дуги v соотвѣтствующія этимъ точкамъ даются выраженіемъ

$$v=h\frac{\pi}{2},\ h=0,\ 1,\ 2,....$$

гдѣ h есть цѣлое число. Дугу параболы, коей оконечностямъ соотвѣтствуютъ значенія $h-1$ и h, мы будемъ означать какъ лежащую въ h-ой четверти. Мы скажемъ также, что соотвѣтствующія дуги кривыхъ ξ и η лежатъ въ h-ой четверти.

Пусть α есть уголъ касательной линіи въ точкѣ кривой ξ съ осью x, и β уголъ касательной въ точкѣ кривой η съ осью y; имѣемъ

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{dz}{dx}=-\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{v}\sin v}$$

$$\operatorname{tang}\beta=\frac{dz}{dy}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{v}\cos v}$$

Мы видимъ, что

$\operatorname{tang}\alpha=\infty$ при $\sin v=0$ т. е. при $x=\pm1$

$\operatorname{tang}\beta=\infty$ при $\cos v=0$ т. е. при $y=\pm1$.

Слѣдовательно касательныя параллельны оси z въ тѣхъ точкахъ кривыхъ, которыя лежатъ на прямыхъ пересѣченія цилиндра съ плоскостями zx и zy. Координаты z этихъ точекъ для кривой ξ будутъ равны $\bar{z}_\eta$, а для кривой η равны $\bar{z}_\xi$.

Замѣтимъ, что $\tang\beta$ безконечно великъ еще при значеніи $v=o$, т. е. въ точкѣ кривой η совпадающей съ началомъ координатъ.

Въ точкахъ пересѣченія съ осью z:

$$\tang\alpha=\mp\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2h+1}},\quad \tang\beta=\pm\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2h}}$$

По мѣрѣ возрастанія v, касательныя линіи въ этихъ точкахъ кривыхъ ξ и η, все болѣе приближаются къ параллелизму съ осью x или съ осью y.

Кривыя ξ и η имѣютъ точки перегиба. Они опредѣляются значеніями v, для которыхъ $\tang\alpha$ или $\tang\beta$ принимаютъ наименьшія значенія. Эти значенія v опредѣляются для кривой ξ уравненіемъ

$$\tang v_1=-2v_1$$

а для кривой η:

$$\tang v_2=\frac{1}{2v_2}$$

Эти выраженія показываютъ намъ, что точки перегиба кривой ξ соотвѣтствуютъ значеніямъ v, лежащимъ въ четныхъ четвертяхъ окружности. По мѣрѣ возрастанія v, $\tang v_1$ приближается къ $-\infty$, слѣдовательно точка перегиба приближается къ точкамъ пересѣченія кривой ξ съ осью z. Для кривой η значенія v_2 лежатъ въ нечетныхъ четвертяхъ окружности, и съ увеличеніемъ v_2, $\tang v_2$ приближается къ нулю, слѣдовательно точки перегиба также приближаются къ точкамъ пересѣченія кривой η съ осью z.

Указанныя свойства кривыхъ ξ и η даютъ возможность представить ихъ на чертежѣ (черт. 3) и (черт. 4). Линіи AA, BB, CC..... отграничиваютъ на плоскостяхъ zx и zy части, на которыхъ проэктируются дуги параболы, соотвѣтствующія 1-ой, 2-ой, 3-ей и т. д. четвертямъ.

Легко отыскать эти дуги на параболѣ (черт. 1). Откладывая на оси абсциссъ v величины $\frac{\pi}{2}$, π, $3\frac{\pi}{2}$ и т. д., дуги $O'a$, ab, bc и пр. проэктируются на плоскости zx кривыми $O'A$, Ab, bC, Cd...., а на плоскости zy кривыми Oa, aB, Bc, cD.....

Найдемъ теперь выраженіе площади, ограниченной кривою ξ, осью z и двумя ординатами $x=OO'$ и $x=ff'$. Элементъ площади есть xdz, слѣдовательно площадь будетъ

$$\int_0^{z=of} xdz,$$

или вставляя $x=\cos v=\cos\frac{\pi}{2}z^2$, находимъ для выраженія площади интегралъ Френеля

$$A=\int_0^z \cos\frac{\pi}{2}z^2dz$$

Если верхній предѣлъ z падаетъ во вторую четверть, напр. $z=Of_1$, то интегралъ A представляетъ собою разность двухъ площадей $O'OA$ и Af_1f_1', такъ какъ значенія x для послѣдней площади отрицательны. Отсюда ясно, что если всѣ площади, отсѣкаемыя вѣтьвями кривой ξ отъ плоскости zx на сторонѣ положительной оси x, мы будемъ считать положительными, а отсѣкаемыя отъ плоскости zx на сторонѣ содержащей отрицательную ось x—отрицательными, то интегралъ A для произвольнаго значенія верхняго предѣла будетъ равенъ алгебраической суммѣ площадей ограниченныхъ кривой ξ, осью z, ординатой OO' и затѣмъ ординатой, соотвѣтствующей значенію верхняго предѣла z.

Означая площади $O'OA$, ABb, bBC и пр. для краткости отрѣзками OA, AB, BC, CD, DE,....., знаки послѣдовательныхъ площадей представятся рядомъ:

$$\overset{+}{\overline{OA}}, \overset{-}{\overline{AB}}, \overset{-}{\overline{BC}}, \overset{+}{\overline{CD}}, \overset{+}{\overline{DE}}, \overset{-}{\overline{EF}}, \overset{-}{\overline{FG}}....$$

т. е. площади, ограниченныя проэкціями дугъ параболы, лежащихъ въ 1-ой, 4-ой, 5-ой... четвертяхъ, будутъ положительны; между тѣмъ площади, ограниченныя проэкціями дугъ параболы, лежащими во 2-ой, 3-ей, 6-ой, 7-ой.... четвертяхъ отрицательны. Мы видимъ отсюда, что интегралъ A долженъ имѣть maximum'ы и minimum'ы. $A=\overset{+}{\overline{OA}}$, будетъ maximum; $A=\overset{+}{\overline{OA}}+\overline{AB}+\overline{BC}$ будетъ minimum, и т. д. Слѣдовательно maximum'ы будутъ представляться алгебраической суммой площадей, соотвѣтствующихъ ряду:

$$+--++.......--++$$

а minimum'ы ряду:

$$+--++.......++--.$$

Такимъ образомъ maximum'амъ интеграла A соотвѣт. значенія

$$v=\frac{\pi}{2},\ 5\frac{\pi}{2},\ 9\frac{\pi}{2},.....(4h+1)\frac{\pi}{2}......$$

и верхніе предѣлы

$$s=\sqrt{1},\ \sqrt{5},\ \sqrt{9},.....\ \sqrt{4h+1}.$$

Minimum'амъ соотвѣтствуютъ значенія

$$v=3\frac{\pi}{2},\ 7\frac{\pi}{2},\ 11\frac{\pi}{2},.....(4h-1)\frac{\pi}{2}....$$

и верхніе предѣлы

$$z = \sqrt{3},\ \sqrt{7}, \ldots\ \sqrt{4h+3}.$$

Эти результаты получаются и отыскивая непосредственно условія maximum'а и minimum'а интеграла

$$A = \int_0^z \cos\frac{\pi z^2}{2} dz;$$

условіе состоитъ въ томъ, чтобы

$$\cos\frac{\pi z^2}{2} \text{ или } \cos v = 0;$$

для maximum'а $\sin v$ долженъ быть положителенъ, а для minimum'а отрицателенъ, что и выполняютъ приведенныя выше значенія v и z.

Подобными же разсужденіями убѣдимся, что интегралъ

$$B = \int_0^z \sin\frac{\pi}{2} z^2 dz$$

представляетъ алгебраическую сумму площадей, лежащихъ на плоскости zy между кривою η, осью z, ординатою $y=0$ и ординатою y, соотвѣтствующею верхнему предѣлу z; при этомъ, площади лежащія по ту сторону оси z, которая соотвѣтствуетъ положительной оси y, принимаются положительными, а лежащія по другую сторону—отрицательными.

Порядокъ положительныхъ и отрицательныхъ площадей представится рядомъ отрѣзковъ:

$$\overset{+}{OA},\ \overset{+}{AB},\ \overset{-}{BC},\ \overset{-}{CD},\ \overset{+}{DE},\ \overset{+}{EF} \ldots\ldots$$

т. е. площади, ограниченныя на плоскости zy проэкціями частей

параболы, лежащими въ 1-ой и 2-ой, 5-ой и 6-ой, 9-ой и 10-ой.... вообще $1+4h$ и $2+4h$ четвертяхъ будутъ положительны; ограниченныя же проэкціями частей параболы, лежащими въ 3-ей и 4-ой, 7-ой и 8-ой..... вообще $3+4h$-ой и $4+4h$-ой будутъ отрицательными.

Maximum'ы и minimum'ы интеграла B даются очевидно такими комбинаціями площадей:

maximum'ы: $++, ++--++, \ldots ++--\ldots ++$

minimum'ы: $++--, ++--++--, \ldots ++--\ldots --$

Maximum'амъ соотвѣтствуютъ значенія

$$v=\pi,\ 3\pi,\ 5\pi \ldots (2h+1).2\frac{\pi}{2}$$

$$z=\sqrt{2},\ \sqrt{6}, \ldots \sqrt{2(2h+1)}$$

minimum'амъ:

$$v=2\pi, 4\pi, \ldots 4h\frac{\pi}{2}$$

$$z=\sqrt{4},\ \sqrt{8}, \ldots \sqrt{4h}$$

Эти результаты очевидны и изъ условія maximum'а и minimum'а интеграла B, дающаго

$$\sin v=o$$

при чемъ для maximum'овъ $\cos v$ долженъ быть отрицателенъ, а для minimum'овъ положителенъ.

Мы можемъ представить на плоскости тѣ части цилиндрической поверхности, проэкціями коихъ будутъ разсмотрѣнныя нами выше площади. Они изображены на черт. 1, причемъ площади пунктированныя горизонтально проэктируются на пло-

скости zx, а пунктированныя вертикально проэктируются на плоскости zy; знаки площадей проэкцій обозначены на соотвѣтственныхъ частяхъ.

Благодаря тому обстоятельству, что кривыя проэкцій касаются образующихъ цилиндра, лежащихъ въ плоскостяхъ zx и zy, легко вычислять поправки въ величинахъ интеграловъ, данныхъ Френелемъ, для предѣловъ близкихъ къ значеніямъ z этихъ точекъ соприкосновенія. Въ данномъ случаѣ, алгебраически прибавляемая площадь весьма близка къ прямоугольнику, основаніе коего есть единица, а высота разность предѣла для котораго ищется интегралъ и значенія z для ближайшей точки прикосновенія. Такъ напримѣръ B имѣетъ maximum для $z=\sqrt{2}=1,4142$; по Френелю же для $z=1,4$. Для этого значенія интегралъ A, вычисленный Френелемъ, будетъ 0,5439. Мы можемъ отыскать истинную его величину; въ самомъ дѣлѣ, площадь, вычисленная Френелемъ, есть алгебраическая сумма площадей

$$A=O'OA-qAq \qquad \text{(черт. 3)}$$

гдѣ $oq=1,4$ меньше $oB=1,4142$; разность $OB-oq=0,0142$ представляетъ площадь прямоугольника $bqqB$, которая должна быть прибавлена къ предъидущему значенію A съ знакомъ—; такимъ образомъ получаемъ

$$\int_0^{\sqrt{2}} \cos\frac{\pi}{2}z^2dz=0,5439-0,0142=0,5297$$

Поправки въ значеніяхъ A и B, соотвѣтствующихъ maximum'амъ и minimum'амъ менѣе значительны, что видно изъ формы кривыхъ проэкцій, такъ какъ они соотвѣтствуютъ точкамъ пересѣченія кривыхъ съ осью z.

По таблицѣ Френеля первый minimum интеграла A будетъ для $z=1,70$, причемъ величина этого интеграла опредѣляется равной 0,3245. Такъ какъ $z=op=1,70$ меньше

$z = \theta C = \sqrt{3} = 1{,}7321$, то истинное значеніе A, соотвѣтствующее minimum'у будетъ

$$A = 0{,}3245 \text{—площадь } pCp \quad (\text{черт. } 3).$$

Но площадь pCp по малости $Cp = 0{,}0321$ можетъ быть разсматриваема какъ площадь прямоугольнаго треугольника, въ коемъ сторона pC совпадаетъ съ касательной проведенной въ точкѣ C. По формулѣ найденной выше

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\pi\sqrt{3}},$$

слѣдовательно

$$pCp = \frac{1}{2}\frac{\overline{pC}^2}{\operatorname{tang}\alpha} = \frac{\pi}{2}(0{,}0321)^2\sqrt{3} = 0{,}0028,$$

и истинный minimum A будетъ

$$\int_0^{1{,}7321}\cos\frac{\pi}{2}z^2dz = 0{,}3245 - 0{,}0028 = 0{,}3217$$

Мы можемъ установить приближенную формулу для вычисленія интеграловъ Френеля. Соединимъ двѣ точки параболы (I) (черт. 5) хордою CD и введемъ обозначенія:

$$CA = z_0,\ BD = z_1,\ E'F = z,\ EF = \zeta,\ AB = a,\ AO' = v_0,\ FO' = v.$$

Получимъ

$$\zeta = \frac{z_1 - z_0}{a}(v - v_0) + z_0,\ d\zeta = \frac{z_1 - z_0}{a}dv$$

Если точки C и D достаточно близки, какъ увидимъ ниже въ примѣненіяхъ отыскиваемыхъ нами формулъ, то въ интегралахъ

A и B можно будетъ замѣнить величину dz черезъ $d\zeta$; получимъ:

$$A_{z_0}^{z}=\int_{z_0}^{z}\cos\frac{\pi}{2}z^2dz=\int_{v_0}^{v}\cos v d\zeta=\frac{z_1-z_0}{a}\int_{v_0}^{v}\cos v dv$$

и отсюда

$$A_{z_0}^{z}=\frac{z_1-z_0}{a}\left[\sin\frac{\pi}{2}z^2-\sin\frac{\pi}{2}z_0^2\right]$$

Подобнымъ же образомъ: (α)

$$B_{z_0}^{z}=-\frac{z_1-z_0}{a}\left[\cos\frac{\pi}{2}z^2-\cos\frac{\pi}{2}z_0^2\right]$$

Такъ какъ $a=\frac{\pi}{2}(z_1^2-z_0^2)$, то получимъ:

$$A_{z_0}^{z}=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\frac{\pi}{2}z^2-\sin\frac{\pi}{2}z_0^2}{z_1+z_0}$$

$$B_{z_0}^{z}=-\frac{2}{\pi}\frac{\cos\frac{\pi}{2}z^2-\cos\frac{\pi}{2}z_0^2}{z_1+z_0} \qquad (\alpha_1)$$

Формулы, данныя Abria представляютъ частный случай здѣсь приведенныхъ (Verdet, Oeuvres, T. V p. 330).

Простѣйшее употребленіе этихъ формулъ будетъ имѣть цѣлью отысканіе интеграловъ A_0^z и B_0^z, если извѣстны интегралы $A_0^{z_0}$, $B_0^{z_0}$ коихъ предѣлъ $z_0<z$ и мало разнится отъ z. Въ этомъ случаѣ, полагая $z=z_1$, находимъ:

$$A_0^{z_1}=A_0^{z_0}+\frac{2}{\pi}\frac{\sin\frac{\pi}{2}z_1^2-\sin\frac{\pi}{2}z_0^2}{z_1+z_0} \qquad (\beta)$$

$$B_0^{z_1}=B_0^{z_0}-\frac{2}{\pi}\frac{\cos\frac{\pi}{2}z_1^2-\cos\frac{\pi}{2}z_0^2}{z_1+z_0}.$$

Если $z_0>z_1$ то знаки дробей въ правыхъ частяхъ приведенныхъ выраженій будутъ противуположные. Такъ напримѣръ Френель даетъ:

$$A_0^{1,2}=0,7161 \text{ и } A_0^{1,3}=0,6393$$

второй интегралъ получается изъ перваго, какъ извѣстно, приближенной формулой Френеля. Примѣнимъ найденное выше выраженіе для той же цѣли. Имѣемъ

$$\sin\frac{\pi}{2}(1,3)^2=\sin 152^\circ,1=\sin 27^\circ,9=0,4679$$

$$\sin\frac{\pi}{2}(1,2)^2=\sin 129^\circ,6=\sin 50^\circ,4=0,7705$$

$$\frac{2}{\pi}=0,6366;\ z_1+z_0=2,5.$$

Подставляя въ первую изъ формулъ β, находимъ:

$$A_0^{1,3}=0,7161-0,0771=0,6390,$$

величину, разнящуюся отъ данной Френелемъ на 0,0003.

Мы воспользуемся также формулами β для отысканія maximum'овъ и minimum'овъ напряженія свѣта въ диффракціонномъ явленіи, производимымъ экраномъ съ безпредѣльнымъ прямолинейнымъ краемъ. Напряженіе свѣта въ части пространства, лежащей внѣ геометрической тѣни, пропорціонально, какъ извѣстно, выраженію:

$$I=\left(\frac{1}{2}+A_0^{z}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+B_0^{z}\right)^2.$$

предѣлъ z соотвѣтствующій max. и min. I означимъ черезъ z_1, и положимъ $\varphi=\frac{\pi}{2}z_1^2$. Диффеpенцируя I по z и приравнивая результатъ нулю, получаемъ условіе max. или min.:

$$\left(\frac{1}{2}+A_0^{z_1}\right)\cos\varphi+\left(\frac{1}{2}+B_0^{z_1}\right)\sin\varphi=0.$$

Если мы означимъ черезъ z_0 величину близкую къ z_1, то получимъ, пользуясь формулой (β):

$$\left(\frac{1}{2}+A_0^{z_0}+\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\varphi-\sin\frac{\pi}{2}z_0^2}{z_1+z_0}\right)\cos\varphi+$$

$$+\left(\frac{1}{2}+B_0^{z_0}-\frac{2}{\pi}\,\frac{\cos\varphi-\cos\frac{\pi}{2}z_0^2}{z_1+z_0}\right)\sin\varphi=0.$$

Члены, содержащіе $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ внутри скобокъ взаимно уничтожаются, и мы находимъ:

$$\operatorname{tang}\varphi=-\frac{\frac{1}{2}+A_0^{z_1}}{\frac{1}{2}+B_0^{z_1}}=-\frac{\frac{1}{2}+A_0^{z_0}-\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\frac{\pi}{2}z_0^2}{z_1+z_0}}{\frac{1}{2}+B_0^{z_0}+\frac{2}{\pi}\,\frac{\cos\frac{\pi}{2}z_0^2}{z_1+z_0}} \qquad (\gamma)$$

Покажемъ какимъ образомъ эта формула даетъ возможность весьма просто вычислять величину z_1. Замѣтимъ прежде всего, что такъ какъ $A_0^{z_1}$ и $B_0^{z_1}$ всегда положительны, то $\operatorname{tang}\varphi$ отрицателенъ, слѣдовательно φ лежитъ всегда въ четныхъ

четвертяхъ, почему $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ имѣютъ противоположные знаки; означая ихъ абсолютныя величины черезъ c и s, мы можемъ написать условіе max. и min. въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left(\frac{1}{2}+A_0^{z_1}\right)c=\left(\frac{1}{2}+B_0^{z_1}\right)s.$$

Такъ какъ въ каждой четверти интегралы A и B измѣняются внутри близкихъ между собою предѣловъ, какъ это показываютъ таблицы Френеля, и притомъ съ возрастаніемъ верхняго предѣла приближаются все болѣе и болѣе къ $\frac{1}{2}$, т. е. къ равенству, то $\tan g\,\varphi$ долженъ быть близокъ къ -1; слѣдовательно c и s также близки къ равенству. Мы заключаемъ отсюда, что

$$\frac{1}{2}+A_0^{z_1} \text{ близко къ равенству съ } \frac{1}{2}+B_0^{z_1}$$

или

$$A_0^{z_1} \text{ близко къ равенству съ } B_0^{z_1}.$$

Положимъ.

$$z'<z_1<z'';$$

тогда, по непрерывности функцій A и B, должны имѣть:

$$\text{если } A_0^{z'} \gtrless B_0^{z'}$$

$$\text{то } A_0^{z''} \lesseqgtr B_0^{z''}$$

Такимъ образомъ намъ достаточно отыскать въ таблицахъ Френеля два возможно близкихъ между собою значенія z' и z'', для которыхъ выполнялись бы предъидущія неравенства, чтобы быть увѣренными въ томъ, что искомое z_1 близко къ одному

изъ найденныхъ нами значеній. Такъ въ таблицѣ Френеля (Oeuvres, T. I, p. 319) находимъ:

z	A	B	z	A	B	z	A	B	z	A	B
1,2	0,7161	0,6229	1,8	0,3342	0,4509	2,3	0,6271	0,5528	2,7	0,3929	0,4528
1,3	0,6393	0,6859	1,9	0,3949	0,3732	2,4	0,5556	0,6194	2,8	0,4678	0,3913

и т. д.

Мы видимъ отсюда, что искомыя значенія z_1 лежатъ близко къ значеніямъ 1, 2; 1, 8; 2, 3; 2, 7 и т. д. Отыскавъ эти послѣднія и назвавъ ихъ черезъ z_0, мы приступаемъ къ рѣшенію выраженія (γ) по приближенію. Зная, что z_1 мало отличается отъ z_0, мы полагаемъ въ правой части, въ дроби $\frac{1}{z_1+z_0}$, величину $z_1=z_0$; получаемъ изъ нашей формулы одинаковую по виду съ извѣстной приближенной (Verdet, Oeuvres, T. V p. 347):

$$\operatorname{tang}\varphi=\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}z_1^2=-\frac{\frac{1}{2}+A_0^{z_0}-\frac{1}{\pi z_0}\sin\frac{\pi}{2}z_0^2}{\frac{1}{2}+B_0^{z_0}+\frac{1}{\pi z_0}\cos\frac{\pi}{2}z_0^2} \qquad (\delta)$$

Найдя отсюда приближенное значеніе для z_1, подставляемъ его въ дробь $\frac{1}{z_1+z_0}$, и снова производимъ вычисленіе. Но уже первое приближеніе, т. е. формула (δ), даетъ съ достаточною точностью значенія z_1, какъ показываютъ приводимые ниже примѣры:

1-й *maximum*. $z_0=1,2$; $\operatorname{tang}\varphi=-\frac{1,2161-0,2653.\ 0,7705}{1,1229-0,2653.\ 0,6374}$

$$\text{отсюда } \operatorname{tang}\varphi=-1,0607=-\operatorname{tang} 46^0,\ 68,$$

$$\varphi=180^0-46^0,68=133^0,\ 32=90^0.\ z_1^2$$

$$\log z_1 = \frac{1}{2}\left\{\log\ 133{,}32 - \log\ 90\right\} = 0{,}0853264$$

$$z_1 = 1{,}2171$$

По Френелю $z_1 = 1{,}2172$ (Oeuvres, T. I p. 322):

Второе приближеніе даетъ:

$$\text{tang}\,\varphi = -1{,}0609 = -\text{tang}\ 46^\circ,\ 687;$$

$$\frac{\pi}{2} z_1^2 = 133^\circ,\ 313;\ z_1 = 1{,}21707.$$

1-ый minimum. $z_0 = 1{,}8$; $\text{tang}\,\varphi = -\frac{0{,}8342 + 0{,}1768.\ 0{,}9298}{0{,}9509 + 0{,}1768.\ 0.3681}$

отсюда $\text{tang}\,\varphi = -0{,}9829 = -\text{tang}\ 44^\circ,\ 51$

$$\varphi = 360^\circ - 44^\circ{,}51 = 315^\circ{,}49 = 90^\circ\ z_1^2$$

отсюда $z_1 = 1{,}8723$,

по Френелю $z_1 = 1{,}8726$.

Второе приближеніе даетъ:

$$\text{tang}\,\varphi = -0{,}9810 = -\text{tang}\ 44^\circ,\ 43$$

$$\varphi = 360^\circ - 44^\circ{,}43 = 315^\circ 57 = 90^\circ\ z_1^2$$

и $z_1 = 1{,}8725$,

по Френелю $z_1 = 1{,}8726$.

и т. д.

Ближайшею нашею задачею будетъ болѣе подробное знакомство съ кривыми ξ и η. Мы постараемся съ этою цѣлью отыскать возможно простыя кривыя и комбинаціи кривыхъ, близко подходящія къ линіямъ ξ и η. Въ первой четверти начальная абсцисса кривой ξ (черт. 3) равна единицѣ и конечная ордината тоже равна единицѣ. Величина отграничиваемой ею площади $A_0^1=0,7803$ очень мало отличается отъ площади четверти круга, описаннаго радіусомъ равнымъ 1, равной $\frac{\pi}{4}=0,7854$.

Если въ первой четверти мы опишемъ дугу круга CO' (черт. 6), радіусомъ равнымъ единицѣ, и проведемъ ломанную линію $O'AB$ такъ, чтобы

$$O'A=0,6;\ OB=0,95,$$

то средняя ариѳметическая изъ площадей, отграничиваемыхъ этими линіями и прямою проведенною на высотѣ z, представитъ довольно близко соотвѣтственный интегралъ A_0^z. Такъ напримѣръ:

$$A_0^{O'N}=\frac{1}{2}\left\{\text{площ.}\,ODMO'+\ \text{площ.}\ ODNO'\right\}$$

Поэтому интегралъ A будетъ довольно близко изображаться слѣдующими значеніями:

1) $o<z<0.6.$

$$A_0^z=\frac{1}{4}\left[\text{arc}\sin z+z\sqrt{1-z^2}\right]+\frac{1}{2}z$$

2) $0,6<z<0,95$

$$A_0^z=\frac{1}{4}\left[\text{arc}\sin z+z\sqrt{1-z^2}\right]+0,3+\frac{1,3-z}{1,4}(z-0,6)$$

3) $0,95<z<1$

$$A=\frac{1}{4}\left[\text{arc sin } z+z\sqrt{1-z^2}\right]+0,3875.$$

Въ слѣдующей таблицѣ приведены значенія интеграловъ, вычисленныхъ по этимъ формуламъ и данныхъ Френелемъ.

z	формулы	френель	dif.
0,1	0,0999	0,0999	0,0000
0,2	0,1971	0,1999	0,0028
0,3	0,2977	0,2993	0,0016
0,4	0,3945	0,3974	0,0029
0,5	0,4892	0,4923	0,0031
0,6	0,5804	0,5811	0,0007
0,7	0,6615	0,6597	—0,0018
0,8	0,7231	0,7230	—0,0001
0,9	0,7638	0,7651	0,0013
1,0	0,7802	0,7803	0,0001

Болѣе удачно и болѣе просто можно представить интегралы B въ первой четверти. Замѣтимъ прежде всего (черт. 4), что кривая η въ первой четверти имѣетъ точку перегиба. Соотвѣтственное v есть корень приведеннаго выше трансцендентнаго уравненія; это v_2 лежитъ между 37^0 и $37^040'$. Приблизительно для точки перегиба абсцисса $y=0,609$, а ордината $z=0,645$. Начертимъ (черт. 7) въ 1-ой четверти на плоскости zy параболу $y=\frac{\pi}{2}z^2$. Точку $A(z=0,5)$ этой параболы соединяемъ прямою съ точкою $B\,(y=1\,;z=0,92)$. Ломанная

линія *OABD* будетъ довольно близка къ кривой η въ первой четверти.

1) $0<z<0{,}5$; уравненіе параболы есть $y=\frac{\pi}{2}z^2$, слѣд.

$$B=\int y dz=\frac{\pi}{2}\int z^2 dz=0{,}5236 z^3.$$

2) $0{,}5<z<0{,}92$; такъ какъ $OC=\frac{\pi}{8}=0{,}3927$ то

$$B=0{,}0654+[0{,}723z+0{,}0312](z-0{,}5)$$

3) $0{,}92<z<1$;

$$B=z-0{,}5621.$$

Приводимъ таблицу, составленную подобно предъидущей.

z	формулы	френель	dif.
0,1	0,0005	0,0006	0,0001
0,2	0,0042	0,0042	0,0000
0,3	0,0141	0,0140	—0,0001
0,4	0,0335	0,0332	—0,0003
0,5	0,0654	0,0644	—0,0010
0,6	0,1119	0,1101	—0,0018
0,7	0,1730	0,1716	—0,0014
0,8	0,2483	0,2487	0,0004
0,9	0,3382	0,3391	0,0009
1,0	0,4379	0,4376	—0,0003

Перейдемъ теперь къ изслѣдованію кривой ξ въ другихъ четвертяхъ. Дуги этой кривой, лежащія во 2-ой, 3-ей и 4-ой четвертяхъ, я замѣняю въ каждой четверти параболами и прямыми, опредѣленными слѣдующими условіями:

1) Вершина параболы лежитъ въ точкѣ соприкосновенія кривой ξ съ образующей цилиндра.

2) Ось параболы параллельна оси x.

3) Касательная къ кривой ξ, проведенная въ точкѣ ея пересѣченія съ осью цилиндра и опредѣляемая выше данной формулой (стр. 60).

$$\operatorname{tang} \alpha = \mp \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2h+1}},$$

есть въ тоже время и касательная къ параболѣ. Часть этой касательной, лежащая между точкою пересѣченія кривой ξ съ осью z и точкою касанія съ параболою, и идущая отъ этой точки дуга параболы до вершины, представляютъ кривую ξ.

Для слѣдующихъ четвертей, дуги параболы (I) (черт. 1) соотвѣтствующія дугамъ ξ, лежащимъ въ этихъ четвертяхъ, замѣняемъ стягивающими ихъ хордами. Вслѣдствіе этого къ вычисленію интеграла A примѣняются формулы (α). Мы имѣемъ здѣсь $\alpha = \frac{\pi}{2}$, и если рѣчь идетъо h-ой четверти, то $v_0 = h\frac{\pi}{2}$, $z_0 = \sqrt{h}$, $z_1 = \sqrt{h+1}$. Полагая $d = \sqrt{h+1} - \sqrt{h}$, находимъ

$$A_0^z = A_0^{\sqrt{h}} + \frac{2d}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{2}z^2 - \sin h\frac{\pi}{2}\right].$$

Пользуясь указанными здѣсь пріемами вычислены въ приводимой ниже таблицѣ значенія Φ_A интеграловъ A. Тѣже

интегралы, вычисленные Френелемъ, обозначены черезъ F_A. Зная уклоненія тѣхъ и другихъ значеній, можно извлечь изъ приводимой ниже таблицы величины интеграловъ A, соотвѣтствующія ихъ наибольшимъ (M) и наименьшимъ (m) значеніямъ. Такъ напр. на границѣ XV-ой и XVI четвертей лежитъ minimum интеграла A, значеніе котораго по таблицѣ Френеля приходится для $z=3,9$ и равно 0,4226, т. е. падаетъ уже въ XVI-ую четверть. По нашимъ формуламъ получается minimum для $z=\sqrt{15}$, равный 0,4169. Разность этой цифры и предъидущей равна 0,0057, величинѣ гораздо большей чѣмъ возможныя уклоненія значеній Φ_A и F_A. Прибавляя къ цифрѣ 0,4169 поправку 0,0013, получаемъ для minimum'a интеграла A величину 0,4182, болѣе близкую къ истинѣ чѣмъ та, которая извлекается изъ таблицъ Френеля.

Четв.	Z	Φ_A	F_A	Δ
II	1,1	0,7645	0,7643	—0,0002
	1,2	0,7177	0,7161	—0,0016
	1,3	0,6398	0,6393	—0,0005
	1,4	0,5443	0,5439	—0,0004
	$\sqrt{2}$	0,5301		
III	1,5	0,4465	0,4461	—0,0004
	1,6	0,3664	0,3662	—0,0002
	1,7	0,3233	0,3245	0,0012
	$\sqrt{3}$	0,3205	m.	
IV	1,8	0,3330	0,3342	0,0012
	1,9	0,3962	0,3949	—0,0013
	$\sqrt{4}$	0,4901	0,4886	—0,0015
V	2,1	0,5803	0,5819	0,0016
	2,2	0,6356	0,6367	0,0011
	$\sqrt{5}$	0,6404	M.	

Четв.	Z	Φ_A	F_A	Δ
VI	2,3 2,4 $\sqrt{6}$	0,6265 0,5546 0,5046	0,6271 0,5556	0,0006 0,0010
VII	2,5 2,6 $\sqrt{7}$	0,4568 0,3885 0,3797	0,4581 0,3895 m.	0,0013 0,0010
VIII	2,7 2,8 $\sqrt{8}$	0,3916 0,4671 0,4961	0,3929 0,4678	0,0013 0,0007
IX	2,9 $\sqrt{9}$	0,5616 0,6053	0,5627 0,6061 M.	0,0011 0,0008
X	3,1 $\sqrt{10}$	0,5615 0,5020	0,5621	0,0006
XI	3,2 3,3 $\sqrt{11}$	0,4659 0,4053 0,4037	0,4668 0,4061 m.	0,0009 0,0008
XII	3,4 $\sqrt{12}$	0,4377 0,4976	0,4388	0,0011
XIII	3,5 3,6 $\sqrt{13}$	0,5319 0,5870 0,5872	0,5328 0,5883 M.	0,0009 0,0013
XIV	3,7 $\sqrt{14}$	0,5411 0,5005	0,5424	0,0013
XV	3,8 $\sqrt{15}$	0,4472 0,4169	0,4485 m.	0,0013

Четв.	Z	Φ_A	F_A	Δ
XVI	3,9	0,4212	0,4226	0,0014
	$\sqrt{16}$	0,4980	0,4986	0,0006

Что касается кривой η, то во второй четверти она можетъ быть представлена параболой, вершина коей лежитъ въ точкѣ соприкосновенія кривой η съ цилиндрическою поверхностью, ось параллельна оси y, и парабола проходитъ черезъ точку пересѣченія кривой η съ осью z. Насколько близко такое построеніе воспроизводитъ кривую η во 2-ой четверти, показываетъ слѣдующая таблица, въ коей Φ_B и F_B означаютъ интегралы B, вычисленные по этому построенію и данные Френелемъ.

	Z	Φ_B	F_B	Δ
II-я четверть.	1,1	0,5357	0,5359	0,0002
	1,2	0,6221	0,6229	0,0008
	1,3	0,6852	0,6859	0,0007
	1,4	0,7133	0,7132	—0,0001
	$\sqrt{2}$	0,7137	M.	

Полагая

$$1-y=\eta,\quad z-1=\zeta,$$

ур—іе параболы будетъ

$$\zeta^2=2p\eta, 2p=\left\{\sqrt{2}-1\right\}^2=0{,}1716,$$

и

$$B_0^z=B_0^1+\zeta\left(1-\frac{\zeta^2}{6p}\right).$$

Построеніе для 3-й четверти производится по правилу,

указанному для кривой ξ въ той же четверти. Для слѣдующихъ четвертей соотвѣтственныя дуги параболы (черт. 1) навернутой на цилиндрѣ, замѣняются хордами, такъ что для нихъ получаемъ изъ формулъ (α):

$$B_0^z = B_0^{\sqrt{k}} - \frac{2d}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{2}z^2 - \cosh\frac{\pi}{2}\right]$$

Согласіе этихъ построеній для кривой η столь же удовлетворительно какъ и для кривой ξ, исключая III-й четверти, содержащей точку перегиба.

Четв.	Z	Фв	Fв	Δ
III	1,5	0,6973	0,6973	0,0000
	1,6	0,6377	0,6388	0,0011
	1,7	0,5468	0,5492	0,0024
	$\sqrt{3}$	0,5148		
IV	1,8	0,4517	0,4509	—0,0008
	1,9	0,3748	0,3732	—0,0016
	$\sqrt{4}$	0,3437	0,3432 m.	—0,0005
V	2,1	0,3734	0,3739	0,0005
	2,2	0,4566	0,4553	—0,0013
	$\sqrt{5}$	0,4940		
VI	2,3	0,5538	0,5528	—0,0010
	2,4	0,6203	0,6194	—0,0009
	$\sqrt{6}$	0,6298	M.	
VII	2,5	0,6203	0,6190	—0,0013
	2,6	0,5512	0,5499	—0,0003
	$\sqrt{7}$	0,5049		

Четв.	Z	Φ_B	F_B	Δ
VIII	2,7	0,4536	0,4528	—0,0008
	2,8	0,3922	0,3913	—0,0009
	$\sqrt{8}$	0,3885	m.	
IX	2,9	0,4104	0,4098	—0,0006
	$\sqrt{9}$	0,4977	0,4959	—0,0018
X	$\sqrt{10}$	0,6010	M.	
XI	3,2	0,5941	0,5931	—0,0010
	3,3	0,5197	0,5191	—0,0006
	$\sqrt{11}$	0,5027		
XII	$\sqrt{12}$	0,4088	m.	
XIII	3,5	0,4156	0,4144	—0,0012
	3,6	0,4927	0,4919	—0,0008
	$\sqrt{13}$	0,4984		
XIV	$\sqrt{14}$	0,5851	M.	
XV	3,8	0,5661	0,5654	—0,0007
	$\sqrt{15}$	0,5015		
XVI	3,9	0,4752	0,4750	—0,0002
	$\sqrt{16}$	0,4204	0,4202	—0,0002
			m.	

Вычисленіе интеграловъ при замѣнѣ кривыхъ ξ и η параболой и касательной производилось по слѣдующимъ формуламъ. Положимъ (фиг. 8), что, въ пл—ти zx, кривая ξ, лежащая въ h-ой четверти, замѣняется параболой CD и касательной DA, проведенной въ точкѣ A пересѣченія кривой ξ съ осью z. Точки A и B суть оконечности ординатъ $\sqrt{h}$

и $\sqrt{h+1}$. Разность ихъ AB означимъ черезъ l. Вводимъ систему координатъ ξ и ζ, означенныхъ на чертежѣ, и въ этой системѣ называемъ черезъ ζ_0 и ξ_0 координаты точки D касанія параболы и прямой AD, дѣлающей съ осью x уголъ α, tang коего вычисляется по приведенной выше формулѣ. Изображая ур—іе параболы въ видѣ:

$$\zeta^2=2p\xi,$$

имѣемъ, по свойству параболы:

$$\zeta_0=2\xi_0\tang\alpha, p=\zeta_0\tang\alpha.$$

Кромѣ того

$$l-\zeta_0=(1-\xi_0)\tang\alpha,\ \text{откуда}\ \xi_0=\frac{l}{\tang\alpha}-1, \zeta_0=2(l-\tang\alpha)$$

Для $Aa<AE$, площадь Aab даетъ интегралъ Френеля

$$-A_{\sqrt{h}}^{z}=\frac{1}{2}\frac{(Aa)^2}{\tang\alpha}=\frac{(z-\sqrt{h})^2}{2\tang\alpha}$$

Для $A\beta>AE$, площадь $ADв\beta$ опредѣляетъ интегралъ Френеля $A_{\sqrt{h}}^{z}$. Если координаты точки в означимъ черезъ ξ, ζ, и всю площадь $CDAB$ черезъ P, то

$$-A_{\sqrt{h}}^{\beta}=P-\frac{2}{3}\xi\zeta-\zeta(1-\xi)=P-\zeta\left(1-\frac{\zeta^2}{6p}\right)$$

При этомъ $\zeta=\sqrt{h+1}-z$ и

$$P=-A_{\sqrt{h}}^{\sqrt{h+1}}=\frac{2}{3}\xi_0\zeta_0+\frac{l+\zeta_0}{2}(1-\xi_0)$$

Если парабола обращена своею выпуклостью въ обратную сторону, т. е. въ сторону положительной оси z, и лежитъ со стороны отрицательныхъ x, то точка A будетъ оконечностью ординаты $\sqrt{h+1}$, а точка B оконечностью ординаты $\sqrt{h}$. Поэтому если $z<\sqrt{h}+\zeta_0$,

$$-A_{\sqrt{h}}^{z}=\zeta\left(1-\frac{\zeta^2}{6\rho}\right), \quad \zeta=z-\sqrt{h}.$$

Если же $z>\sqrt{h}+\zeta_0$ то

$$-A_{\sqrt{h}}^{z}=P-\frac{(\sqrt{h+1}-z)^2}{2\tan g\alpha}.$$

Постоянныя, входящія въ эти формулы для различныхъ четвертей, имѣютъ слѣдующія значенія:

кривыя	tangα	ρ	ξ_0	ζ_0	z_0	P
въ II-ой четверти	$\frac{1}{\pi}=0,3183$	0,0610	0,3013	0,1918	1,2224	0,2502
въ III-ей четверти	$\frac{1}{\pi\sqrt{3}}=0,1838$	0,0482	0,7296	0,2682	1,6824	0,2096
въ IV-ой четверти	$\frac{1}{\pi\sqrt{3}}=0,1838$	0,0309	0,4575	0,1682	1,8318	0,1696
въ III-ей четверти	$\frac{1}{\pi\sqrt{2}}=0,2251$	0,0418	0,4123	0,1856	1,5465	0,1989

Приведенныя формулы могутъ быть полезны для вычисленія интеграловъ Френеля въ тѣхъ случаяхъ, когда не требуется очень большой точности.

Представимъ себѣ два одинаковыхъ круглыхъ цилиндра A и B (фиг. 9), вращающихся около двухъ горизонтальныхъ

осей и трущихся другъ о друга своими поверхностями. Ес[ли] мы назовемъ черезъ v уголъ между осями и черезъ s пу[ть] описываемый точкою цилиндра B при его вращеніи, то п[уть] проходимый точкою цилиндра A будетъ $\sigma = s\cos v$. При п[ово]ротѣ цилиндра B около вертикальной оси z, проходящей че[резъ] точку касанія обѣихъ цилиндровъ, нижній не будетъ прив[еденъ] во вращательное движеніе. Предположимъ, что оконечност[и] цилиндра B покоятся въ рамѣ M, свободно надѣтой на о[сь]. На оси цилиндра находится такого же діаметра круж[окъ], по ободу котораго и ободкамъ блочковъ N проходитъ б[ез]конечная нить. По одному изъ стержней двигается у[каза]тель G, соединённый съ правою нитью F. На оси z н[е]движно укрѣпленъ круглый барабанъ H, на поверхности к[отораго] начерчена парабола $\frac{\pi}{2}z^2 = v$, принимая за единицу р[адіусъ] барабана. Если вертикальная плоскость zx, прох[одящая] черезъ вершину L параболы, содержитъ ось цилиндра A, [то,] вращая раму такъ, чтобы указатель G двигался по на[черчен]ной параболѣ, путь σ пройденный нулевымъ дѣленіемъ цилиндра A и выраженный въ доляхъ принятой единицы, [пред]ставитъ собою очевидно интегралъ Френеля:

$$\sigma = \int_0^z \cos v dz.$$

Этотъ интегралъ будетъ возрастать при движеніи у[каза]теля въ первой четверти, когда цилиндръ A вращается [въ] сторону указанную на чертежѣ стрѣлкой. Во 2-ой четве[рти] изъ пройденнаго пути σ будутъ вычитаться новые проход[имые] нулевою точкою пути, потому что движеніе цилиндра бу[детъ] совершаться въ противную сторону. Такимъ образомъ пол[оже]ніе нуля на цилиндрѣ A дастъ алгебраическую сумму пр[ой]денныхъ имъ путей, т. е. опять интегралъ Френеля, соотв[ѣт]ствующій значеніямъ z, лежащимъ въ II-ой четверти, и т. д.

Если ось цилиндра A при помощи раздѣленнаго круга C будетъ поставлена перпендикулярно къ плоскости zx, то путь проходимый нулевою точкою цилиндра A будетъ представлять интегралъ Френеля B:

$$\sigma=\int_0^z \sin v dz$$

Вообще если на барабанѣ начерчена

кривая $$v=f(z),$$

то отсчеты на цилиндрѣ A даютъ намъ или

$$\sigma=\int \cos\left[f(z)\right]dz \text{ или } \sigma=\int \sin\left[f(z)\right]dz.$$

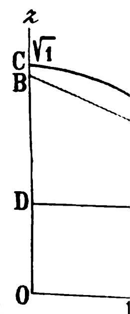
Приборъ, схематически изображенный на ф. 9, можетъ служить также и для отыскапія значеній z, соотвѣтствующихъ maxim. или min. напряженія свѣта въ дифракціонномъ явленіи, обусловливаемымъ ширмою съ безпредѣльнымъ прямолинейнымъ краемъ. Данную выше формулу (стр. 69) для соотвѣтственныхъ max. и min. величины J, мы можемъ представить въ такомъ видѣ;

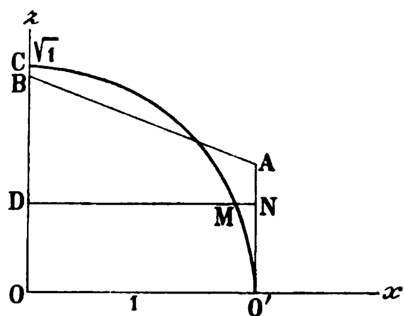
$$\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{2}+\int_0^z \cos(v-\varphi)dz=o$$

Повернемъ ось цилиндра A изъ плоскости zx на произвольный уголъ φ большій 90°. Затѣмъ при помощи ноніуса e ставимъ раму на 270°. Ведя указатель G отъ нижняго края барабана вертикально вверхъ на высоту, равную $\frac{1}{2}$, нулевое дѣленіе цилиндра A пройдетъ путь $\frac{\sin\varphi}{2}$ въ направленіи, которое я обозначу стрѣлкой <—. Затѣмъ поставивъ цилиндръ

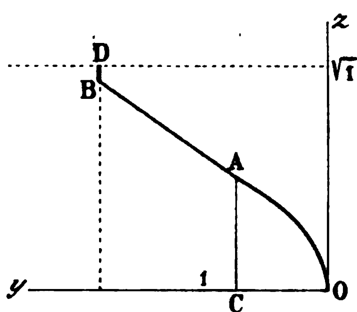
B, т. е. ноніусъ *e* на 0° кружка *C*, и *опуска*
съ прежней его высоты внизъ до края бараб
линдра *A* пройдетъ въ противуположную сторону—
гдѣ подъ $\cos\varphi$ разумѣется его абсолютная вел
образомъ путь, пройденный нулемъ цилиндра *A*
$\frac{-\cos\varphi+\sin\varphi}{2}$, и этотъ путь пройденъ въ
если $\cos\varphi > \sin\varphi$. Не измѣняя положенія нуля н
и не измѣняя положенія цилиндра *B*, поведем
по параболѣ отъ точки *L* до *z*, соотвѣтствующаго
цилиндра *A* опишетъ путь равный интегралу $\int$
въ сторону стрѣлки ←. Если въ результатѣ э
нуль цилиндра *A* вернется въ свое начальное по
φ и соотвѣтственное *z* будутъ искомыми велич
творяющими условію max. или min. выраженія

Въ описанномъ интеграторѣ, имѣющимъ ин
теоретическій, нижній цилиндръ *A* можетъ быть
нейкой, движущейся на колесикахъ по рельсамъ
нымъ къ кружку *C*. Перемѣщенія нуля линейки
интегралы *A* и *B*; отысканіе max. и min. ве
чиняется тому же правилу какъ и въ случаѣ двух

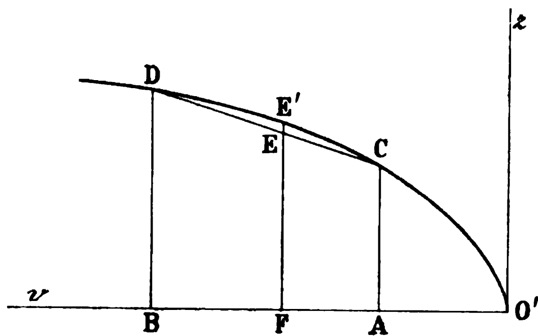




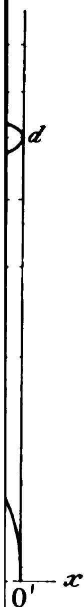
Ф. 6.

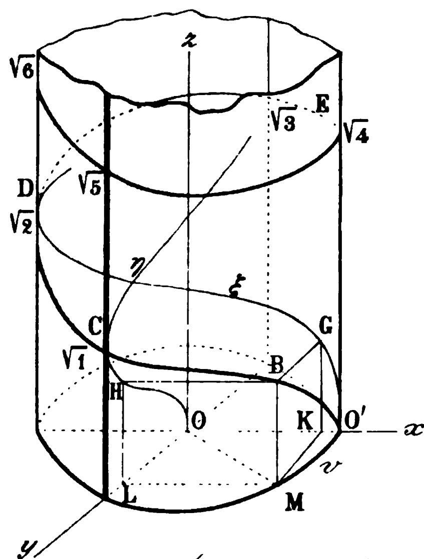


Ф. 7.



Ф. 5.





Ф. 2. (1 = 2 сант.)

№ 86 Г-ръ Ильинъ

Интегрированіе раціональной дроби съ мнимыми корнями въ знаменателѣ.

А. Старкова.

Настоящая замѣтка имѣетъ цѣлію изложить съ небольшимъ измѣненіемъ пріёмъ, указанный въ курсѣ Жордана[1]) для интегрированія раціональной дроби съ мнимыми корнями въ знаменателѣ, а также привести значенія коеффиціентовъ, входящихъ въ составъ интеграла, что̀ обыкновѐнно въ курсахъ не дѣлается.

Извѣстно, что раціональная дробь всегда можетъ быть разложена на простыя вида

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n} \qquad (1)$$

Здѣсь имѣется въ виду исключительно правильная дробь, знаменатель которой имѣетъ всѣ корни неравные.

Взявъ интегралъ отъ обѣихъ частей выраженія (1), получимъ вообще

$$\int\frac{f(x)}{F(x)}dx=\sum_n^1\int\frac{A_m}{x-a_m}dx=\sum_n^1 A_m\log(x-a_m)+C \qquad (2)$$

гдѣ значеніе A_m опредѣляется выраженіемъ

$$A_m=\frac{f(a_m)}{F'(a_m)} \qquad (3)$$

---

[1]) *Jordan*. Cours d'Analyse de l'École Polytechnique. Paris 1883, p. 14 et 15.

Указанное значеніе (2) для интеграла раціональной дроби заключаетъ въ себѣ безразлично какъ случай, когда всѣ корни $a_1, a_2, \dots a_n$ многочлена $F(x)$ дѣйствительные, такъ и тотъ, когда корни $F(x)$ частію дѣйствительные, частію мнимыя. Но въ томъ случаѣ, когда корни $a_1, a_2, \dots a_n$ многочлена $F(x)$ дѣйствительные, формулы (2) и (3) являются окончательными. Если же нѣкоторые изъ корней $a_1, a_2, \dots a_n$ будутъ мнимы, то необходимо сдѣлать въ указанныхъ формулахъ (2) и (3) преобразованія, имѣющія цѣлію уничтожить входящій въ нихъ мнимый знакъ. Преобразованія эти заключаются въ слѣдующемъ.

Если предположимъ, что a_m имѣетъ мнимое значеніе вида

$$a_m=\alpha_m+\beta_m i$$

то, какъ извѣстно изъ теоріи уравненій, необходимо долженъ существовать другой корень a_r сопряженный первому, вида

$$a_r=\alpha_m-\beta_m i$$

Вносся эти значенія корней a_m и a_r въ указанныя выше формулы (2) и (3), будемъ имѣть

$$A_m\log[x-(\alpha_m+\beta_m i)]+A_r\log[x-(\alpha_m-\beta_m i)] \qquad (4)$$

а также

$$A_m=\frac{f(\alpha_m+\beta_m i)}{F'(\alpha_m+\beta_m i)} \quad \text{и} \quad A_r=\frac{f(\alpha_m-\beta_m i)}{F'(\alpha_m-\beta_m i)}$$

Найдя обыкновеннымъ пріёмомъ

$$f(\alpha_m+\beta_m i)=f(\alpha_m)+i\beta_m f'(\alpha_m)-\frac{\beta_m^2}{1.2}f''(\alpha_m)-i\frac{\beta_m^3}{1.2.3}f'''(\alpha_m)+\ldots=$$

$$=p_m+q_m i \qquad (5)$$

а также

$$F'(\alpha_m+\beta_m i)=P_m+Q_m i,\quad f(\alpha_m-\beta_m i)=p_m-q_m i,$$

$$F'(\alpha_m-\beta_m i)=P_m-Q_m i, \qquad (6)$$

гдѣ p_m, q_m, P_m и Q_m дѣйствительныя, по формуламъ дѣленія мнимыхъ величинъ получимъ

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{p_m+q_m i}{P_m+Q_m i} = \frac{P_m p_m + Q_m q_m}{P_m^2+Q_m^2} + i\frac{P_m q_m - Q_m p_m}{P_m^2+Q_m^2} = \mu+\nu i \\ A_r &= \frac{p_m-q_m i}{P_m-Q_m i} = \frac{P_m p_m + Q_m q_m}{P_m^2+Q_m^2} - i\frac{P_m q_m - Q_m p_m}{P_m^2+Q_m^2} = \mu-\nu i \end{aligned} \qquad (7)$$

Съ другой стороны значенія для логариѳмовъ мнимыхъ выраженій (4) будутъ [2])

$$\log[x-(a_m+\beta_m i)] = \log[(x-a_m)-\beta_m i] = \\ = \tfrac{1}{2}\log[(x-a_m)^2+\beta_m^2] - (2k\pi+\varphi)i$$

$$\log[x-(a_m-\beta_m i)] = \log[(x-a_m)+\beta_m i] = \\ = \tfrac{1}{2}\log[(x-a_m)^2+\beta^2{}_m] + (2k\pi+\varphi)i$$

гдѣ дуга φ есть

$$\varphi = arc\,\mathrm{tang}\frac{\beta_m}{x-a_m} = arc\,\mathrm{cotang}\frac{x-a_m}{\beta_m}$$

Внося эти значенія log въ выраженіе интеграла (4), получимъ

$$\tfrac{1}{2}(\mu+\nu i)\log[(x-a_m)^2+\beta_m^2] - (\mu+\nu i)(2k\pi+\varphi)i + \\ +\tfrac{1}{2}(\mu-\nu i)\log[(x-a_m)^2+\beta_m^2] + (\mu-\nu i)(2k\pi+\varphi)i$$

или сдѣлавъ указанное здѣсь перемноженіе, а также приведеніе, найдемъ

$$\mu\log[(x-a_m)^2+\beta_m^2] + 2\nu\varphi + 4k\pi\nu \qquad (8)$$

Но выше мы выдѣли, что

$$\varphi = arc\,\mathrm{ctang}\frac{x-a_m}{\beta_m} = \frac{\pi}{2} - arc\,\mathrm{tang}\frac{x-a_m}{\beta_m}$$

---

[2]) *Штурмъ*. Курсъ Анализа, пер. Синцова С.-Пб. 1868. Томъ 1, лекція 10.

а потому выраженіе (8) обратится въ

$$\mu \log\left[(x-a_m)^2+\beta_m^2\right]-2\nu\, arc\tang\frac{x-a_m}{\beta_m}+\nu(4k+1)\pi$$

Замѣнивъ здѣсь μ и ν ихъ значеніями, опредѣляемыми формулами (7), а также отнеся членъ $\nu(4k+1)\pi$, какъ независящій отъ перемѣнныхъ, въ составъ постояннаго произвольнаго, получимъ

$$\int\frac{f(x)}{F(x)}dx=C+\sum A_s\log(x-a_s)+ \tag{9}$$

$$+\sum\left\{\frac{P_m p_m+Q_m q_m}{P_m^2+Q_m^2}\log\left[(x-a_m)^2+\beta_m^2\right]+\frac{Q_m p_m-P_m q_m}{P_m^2+Q_m^2}arc\tang\frac{x-a_m}{\beta_m}\right\}$$

значеніе для интеграла правильной раціональной дроби, имѣющей частію дѣйствительные, частію мнимые корни въ знаменателѣ. Значенія A_s, P_m, Q_m, p_m и q_m опредѣляются выраженіями (3), (5) и (6).

Найденный выше результатъ (9) можно получить и такимъ образомъ.

Соединивъ въ одинъ два члена съ сопряженными мнимыми корнями въ разложеніи (1) раціональной дроби до совершенія интегрированія

$$\frac{A_m}{x-a_m}+\frac{A_r}{x-a_r}=\frac{\mu+i\nu}{x-(a_m+\beta_m i)}+\frac{\mu-i\nu}{x-(a_m-\beta_m i)}=\frac{2\mu(x-a_m)-2\nu\beta_m}{(x-a_m)^2+\beta_m^2}$$

получимъ выраженіе, свободное отъ мнимаго знака. Раздѣливши числителя и знаменателя этого выраженія на β_m^2 и положивъ въ немъ для краткости

$$\frac{\beta_m}{x-a_m}=w \tag{10}$$

получимъ

$$-\frac{2}{\beta_m}\cdot\frac{\nu-\mu w}{1+w^2}$$

Разложивъ въ этомъ послѣднемъ выраженіи помощію дѣленія въ рядъ второго множителя, найдемъ

$$\frac{\nu-\mu w}{1+w^2}=\nu-\mu w-\nu w^2+\mu w^3+\nu w^4-\ldots.$$

Такимъ образомъ, въ случаѣ сопряженныхъ мнимыхъ значеній для a_m и a_r, имѣемъ

$$\frac{A_m}{x-a_m}+\frac{A_r}{x-a_r}=-\frac{2}{\beta_m}\{\nu-\mu w-\nu w^2+\mu w^3+\nu w^4-\ldots\} \quad (11)$$

Съ другой стороны изъ выраженія (10) находимъ

$$dx=\beta_m dw \quad (12)$$

Перемноживъ первыя и вторыя части выраженій (11) и (12) и взявъ отъ нихъ интегралъ, получимъ

$$\int\frac{A_m dx}{x-a_m}+\int\frac{A_r dx}{x-a_r}=c-2\left\{\nu w-\frac{\mu}{2}w^2-\frac{\nu}{3}w^3+\frac{\mu}{4}w^4+\frac{\nu}{5}w^5-\ldots\right\}$$

или, представивъ вторую часть этого послѣдняго выраженія такъ

$$C+\mu\left\{(w^2)-\frac{(w^2)^2}{2}+\frac{(w^2)^3}{3}-\ldots\right\}-2\nu\left\{w-\frac{w^3}{3}+\frac{w^5}{5}-\ldots\right\}$$

Но извѣстно, что (3)

$$(w^2)-\frac{(w^2)^2}{2}+\frac{(w^2)^3}{3}-\frac{(w^2)^4}{4}+\frac{(w^2)^5}{5}-\ldots=\log(1+w^2)$$

и

$$w-\frac{w^3}{3}+\frac{w^5}{5}-\frac{w^7}{7}+\frac{w^9}{9}-\ldots=arc\operatorname{tang} w,$$

а потому

$$\int\frac{A_m dx}{x-a_m}+\int\frac{A_r dx}{x-a_m}=C+\mu\log(1+w^2)-2\nu\, arc\operatorname{tang} w$$

Внеся сюда значенія μ, ν и w, опредѣляемыя выраженіями (7) и (10), и введя затѣмъ членъ независящій отъ перемѣнныхъ

$$-\mu \log \beta^2_m$$

въ составъ постояннаго произвольнаго C, получимъ значеніе интеграла раціональной дроби съ мнимыми корнями въ знаменателѣ, одинаковое съ вышенайденнымъ.

Указанное выше разложеніе въ рядъ разсматриваемаго интеграла можетъ быть съ удобствомъ въ извѣстныхъ случаяхъ примѣнено къ вычисленію его численнаго значенія.

Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія.

(статья вторая*).

Н. Я. Сонина.

La raison finit toujours par avoir raison.

Въ V т. Записокъ Матем. Отд. Новорос. Общ. Естествоиспыт. была напечатана статья г. А. Старкова «Къ вопросу о поверхности наименьшаго сопротивленія при движеніи въ несжимаемой жидкости». Замѣтивъ крупныя неправильности въ постановкѣ и способѣ рѣшенія задачи, я счелъ нужнымъ, въ интересахъ науки и почтеннаго Общества Естествоиспытателей, сообщить этому послѣднему свои замѣчанія, присоединивъ къ нимъ и свое правильное рѣшеніе. Посвященная этому предмету замѣтка напечатана въ VI т. Записокъ подъ заглавіемъ «Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія». Указавъ, что г. А. Старковъ рѣшаетъ во 1-хъ не ту задачу, какую желаетъ рѣшить, и во 2-хъ не такъ какъ слѣдуетъ рѣшать, и присоединивъ свое полное и сжато, но обстоятельно изложенное рѣшеніе, я считалъ себя въ правѣ полагать, что всѣми свѣдущими людьми затронутый вопросъ будетъ считаться поконченнымъ.

---

*) Помѣщая настоящую статью, редакція Записокъ имѣетъ въ виду предоставить Н. Я. Сонину и А. П. Старкову возможность высказаться еще по одному разу по возбужденнымъ имъ вопросамъ, послѣ чего полемика въ Запискахъ будетъ считаться законченною.

При этомъ я упустилъ изъ виду чисто психологическій моментъ послѣдовательнаго развитія заблужденій въ индивидумѣ подъ вліяніемъ оскорбленнаго и, прибавлю, чрезмѣрнаго самолюбія. Въ отвѣтъ на мою замѣтку, съ одобренія и въ Запискахъ того же Общества, появилась новая статья г. А. Старкова «Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія», посвященная отчасти защитѣ полученныхъ имъ въ первой статьѣ результатовъ, отчасти нападкамъ на мою замѣтку. Хотя проводимыя въ этой новой статьѣ г. А. Старкова заблужденія и сдѣланныя имъ придирки къ результатамъ моей статьи такого элементарнаго свойства, что обнаруживать ихъ или отвѣчать на нихъ нѣтъ надобности по существу дѣла; тѣмъ не менѣе я рѣшаюсь принять на себя здѣсь этотъ неблагодарный трудъ изъ уваженія къ ученому Обществу, которое, надѣюсь, только по недоразумѣнію могло сдѣлаться проводникомъ ложныхъ идей. Я постараюсь быть краткимъ, хотя на 24 страницахъ статьи г. А. Старкова съ трудомъ можно встрѣтить хотя бы одну вѣрную мысль.

Начавъ 2 стр. невѣрною передачею сдѣланнаго мною возраженія, г. А. Старковъ заявляетъ, что условіе постоянства площади меридіана онъ считалъ не тождественнымъ, а лишь *равнозначительнымъ* условію постоянства объема. Что хочетъ этимъ сказать г. А. Старковъ и для чего это говорится—мнѣ остается неяснымъ. Я понимаю, что фунтъ винограда не тождественъ съ фунтовою гирькою, а лишь равнозначителенъ ей по вѣсу; но что касается числовыхъ выраженій, то я думаю, что тождествомъ и называется именно равенство двухъ равнозначительныхъ выраженій. Оставляя эту игру словъ, мы на той же 2 стр. встрѣчаемъ крупное заблужденіе въ утвержденіи, что «для вмѣщенія даннаго, произвольно взятаго объема въ полученную такимъ образомъ поверхность стоитъ только рѣшить относительно A уравненіе на стр. 57». Это невѣрно: постоянное A вошло только благодаря условію постоянства

площади меридіана и изъ этого условія оно вполнѣ опредѣляется (ср. любое руководство); что же касается объема, то онъ будетъ имѣть опредѣленную, отнюдь не произвольную величину. Конечно, быть можетъ, можно опредѣлить A такъ, чтобы объемъ имѣлъ данную величину; но тогда площадь меридіана не можетъ быть задана произвольно. Однимъ словомъ, нельзя располагать *однимъ* постояннымъ A для того чтобы удовлетворить *двумъ* различнымъ условіямъ. Впрочемъ дальнѣйшимъ утвержденіемъ на 2 стр., что для «каждаго даннаго объема получается только одно значеніе площади меридіана и на оборотъ» г. А. Старковъ именно опровергаетъ самого себя. Что касается приведеннаго мною примѣра, то онъ какъ нельзя болѣе относится къ дѣлу, обнаруживая нагляднымъ образомъ неравнозначительность условій постоянства площади меридіана и объема тѣла вращенія.

Наконецъ, что касается Эйлера, о которомъ упомянуто на той же 2 стр., то, дѣйствительно, онъ рѣшалъ *подобную* задачу; но ни съ какимъ меридіаномъ или тѣломъ вращенія дѣла не имѣлъ, какъ можно убѣдиться изъ приводимаго самимъ же г. А. Старковымъ подлиннаго текста (стр. 16 и 17). Какъ, въ виду подлиннаго текста, г. А. Старковъ можетъ говорить о тѣлѣ вращенія и меридіальномъ сѣченіи на стр. 17, для меня совершенно непонятно.

Перехожу къ 3-й стр. Г. А. Старковъ упрекаетъ меня будто, назвавъ условіе

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-1=0 \qquad (1)$$

безусловно-необходимымъ, я не доказалъ этого. Хотя было бы странно въ спеціальной статьѣ доказывать то, что можно найти въ любомъ самомъ элементарномъ учебникѣ дифференціальнаго исчисленія, тѣмъ не менѣе, имѣя въ виду своего противника, я намекнулъ, что этимъ условіемъ опредѣляется

значеніе перемѣннаго s, именно что s есть дуга искомой кривой (стр. 3). Принимая даже взглядъ, высказанный г. А. Старковымъ въ первой статьѣ (стр. 78), что «за насъ думаютъ символы», все таки трудно утверждать, что буква s можетъ понять самопроизвольно, что она представляетъ дугу, и намъ необходимо заставить её думать о себѣ такимъ образомъ. Съ этою цѣлью и вводится условіе 1). Безъ этого условія оба интеграла

$$\int y\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}ds \quad \text{и} \quad \int y\sqrt{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx,$$

цитируемые г. А. Старковымъ въ примѣчаніи на стр. 3, будутъ выражать совершенно одно и тоже, какъ я и заявилъ въ первой статьѣ. Г. А. Старковъ съ этимъ не согласенъ и поучаетъ, что въ первомъ интегралѣ «подъинтегральная функція не принимаетъ мнимыхъ значеній». Любопытно узнать, почему онъ такъ думаетъ, если онъ не хочетъ знать условія 1).

Что означаетъ названіе «предѣльная кривая», употребляемое г. А. Старковымъ на стр. 4, для меня непонятно, равно какъ непонятна и вся аргументація первой фразы этой страницы (о Лежандрѣ будетъ рѣчь ниже). Что касается второй фразы текста 4 стр. и примѣчанія къ ней, то здѣсь возбуждаетъ сомнѣніе значеніе слова «соотвѣтствующій». По внимательномъ обсужденіи дѣла, можно придти къ слѣдующему заключенію: при правильномъ рѣшеніи задачи, сдѣланномъ мною, изъ общихъ уравненій получаются, при частномъ предположеніи, уравненія кривой Ньютона; изъ «соотвѣтствующаго» же неправильнаго рѣшенія г. А. Старкова уравненія кривой Ньютона получены быть не могутъ. Эта невозможность полученія кривой Ньютона признана, впрочемъ, г. А. Старковымъ только въ разсматриваемой статьѣ, а въ первоначальной онъ прямо заявлялъ, что «въ случаѣ же $A = 0$ представляетъ кривую, указанную Ньютономъ», какъ онъ и самъ упоминаетъ въ при-

мѣчаніи на 4 стр. Послѣ этого мой вопросъ: «доставляетъ ли однако дѣйствительно кривая г. А. Старкова кривую Ньютона?» могъ быть признанъ, пожалуй, нескромнымъ, но отнюдь не лишнимъ, какъ сообщаетъ г. А. Старковъ въ томъ же примѣчаніи. Но далѣе, тамъ же, г. А. Старковъ отвергаетъ, чтобы изъ моихъ формулъ 10) и 11) можно было получить кривую Ньютона при $\alpha=0$, потому что «эти уравненія при $\alpha=0$ обращаются въ $0=0$». По этому предмету я долженъ порекомендовать моему критику обратиться къ главѣ дифференціальнаго исчисленія, гдѣ рѣчь идетъ объ опредѣленіи $\frac{0}{0}$.

Обращаюсь къ 5, 6 и 7 стр. статьи г. А. Старкова, оставляя разборъ указаній касательно Лежандра и Тодгёнтера до другаго мѣста настоящей статьи. Г. А. Старковъ замѣчаетъ, что для угловыхъ точекъ кривой условіе 1) не имѣетъ мѣста. Это совершенно вѣрно, хотя г. А. Старкову слѣдовало бы вмѣсто знака «$\neq$ (неравно)» опредѣлить точнѣе характеръ неравенства знакомъ $<$. Но заключенія, сдѣланныя отсюда г. А. Старковымъ касательно излишества условія 1), совершенно невѣрны. Кривая можетъ имѣть конечное число и даже, при извѣстной группировкѣ, безконечное число угловыхъ точекъ и тѣмъ не менѣе, если только она существуетъ, т. е. можетъ быть начерчена, условіе 1) должно быть принято во вниманіе при опредѣленіи этой кривой по какому нибудь свойству, общему всѣмъ ея точкамъ. Въ варіаціонномъ исчисленіи первая часть условія 1) вводится подъ знакомъ опредѣленнаго интеграла, величина котораго, какъ извѣстно, не измѣняется, если измѣнимъ, и притомъ совершенно произвольнымъ образомъ, значенія подъинтегральной функціи въ конечномъ, а при извѣстныхъ условіяхъ, даже безконечномъ числѣ точекъ. Въ силу этого, введеніе условія 1) отнюдь не предрѣшаетъ вопроса о существованіи угловыхъ точекъ. Наконецъ, чтобы покончить вопросъ относительно условія 1), мнѣ приходится напомнить, какъ это сдѣлано и въ первой статьѣ, что самъ г. А. Старковъ пользуется имъ во 1-хъ при преобразованіи интеграла $\int ydx$, во 2-хъ

при опредѣленіи координатъ; не доказываетъ ли это, что рѣшеніе вопроса помимо этого условія невозможно?

На тѣхъ же страницахъ, равно какъ на стр. 8 и въ примѣчаніи на стр. 7, г. А. Старковъ трактуетъ о выборѣ независимаго перемѣннаго. Несомнѣнно, что въ каждомъ вопросѣ выборъ перемѣнныхъ играетъ важную роль для большей или меньшей сложности постановки и рѣшенія. Но этимъ роль перемѣнныхъ и ограничивается. Вопросъ, рѣшаемый просто при одномъ выборѣ перемѣнныхъ, несомнѣнно можетъ быть рѣшенъ, хотя, можетъ быть, гораздо сложнѣе при всякомъ другомъ выборѣ. Г. А. Старковъ распространяется о достоинствѣ перемѣнной $u=\frac{dy}{ds}$; онъ съ полнымъ правомъ можетъ избрать эту перемѣнную, но, для полученія вѣрныхъ результатовъ, долженъ оперировать съ нею правильно. Я хочу сказать, что какія бы ни сдѣлать предположенія относительно кривой, всегда $u=\frac{dy}{ds}$ будетъ правильною дробью. Это обстоятельство и должно быть выражено аналитически неравенствомъ $-1<\frac{dy}{ds}<1$, которое можетъ быть замѣнено уравненіемъ въ различныхъ формахъ, именно

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+v^2=1,$$

или вообще

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^{2n}+v^{2m}=1,$$

гдѣ v будетъ вспомогательное перемѣнное, которое въ концѣ концовъ можетъ быть исключено. Простѣйшая первая форма есть ничто иное какъ условіе 1); но и при общей формѣ результаты получатся правильные. Однако дѣйствительно ли г. А. Старковъ пользуется перемѣнною u, достоинства которой онъ такъ восхваляетъ? Ни чуть не бывало: на страницѣ 11

и слѣд., 26 и слѣд. своей первой статьи вмѣсто u онъ вводитъ для выполненія вычисленій перемѣнную ω по формулѣ $u = Sin\ \omega$, или, что все равно, $p = \frac{dy}{dx} = tang\ \omega$. Позволительно ли послѣ этого упрекать меня, Муаньо и, позволю себѣ сказать, всѣхъ писателей по варіаціонному исчисленію въ излишнихъ предположеніяхъ относительно непрерывности p?

Обращаюсь къ примѣчанію на стр. 7 и 8. Прежде всего считаю нужнымъ заявить, что книгу гг. Линделэфа и Муаньо я считаю прекрасною какъ для своего, такъ и для настоящаго времени. Неясности и недоразумѣнія, могущія встрѣтиться при приложеніи рекомендованныхъ такъ пріемовъ, происходятъ большею частію отъ неумѣнья правильно прилагать эти пріемы. Представлю примѣръ. Заявивъ, въ разсматриваемомъ примѣчаніи, что отысканіе minimum интеграла $\int y dx$ приводитъ къ абсурдному уравненію $1 = 0$, г. А. Старковъ продолжаетъ: «Если же преобразуемъ этотъ интегралъ, принявъ за независимую перемѣнную s и введя въ аналитическую постановку задачи условіе 1), то помощію упомянутаго выше пріема Moigno получимъ въ рѣшеніи прямую линію $y = c$, параллельную оси x-овъ, т. е. совсѣмъ другое рѣшеніе чѣмъ въ томъ случаѣ, когда принято x за независимую перемѣнную, хотя и столь же не подходящее. Наконецъ, если по приведеніи къ независимой перемѣнной s будемъ рѣшать задачу безъ введенія въ аналитическую ея постановку условія 1), то получимъ правильное общеизвѣстное рѣшеніе—кругъ». Все это невѣрно, какъ легко убѣдиться изъ слѣдующаго рѣшенія задачи. Принимая s за независимое перемѣнное и обозначая $\frac{dx}{ds}$ чрезъ x', $\frac{dy}{ds}$ чрезъ y', приведемъ вопросъ къ отысканію абсолютнаго минимума интеграла $\int V.ds$, гдѣ

$$V = yx' + \lambda(x'^2 + y'^2 - 1)$$

и λ представляетъ функцію s. Дифференціальныя уравненія имѣютъ видъ

$$\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{d}{ds}\frac{\partial V}{\partial x'}=0 \text{ и } \frac{\partial V}{\partial y}-\frac{d}{ds}\frac{\partial V}{\partial y'}=0,$$

т. е.

$$-\frac{d}{ds}(y+2\lambda x')=0 \text{ и } x'-\frac{d}{ds}2\lambda y'=0,$$

или, послѣ интеграціи,

$$-y-2\lambda x'=a, \quad x-2\lambda y'=b$$

Кромѣ двухъ этихъ интегральныхъ уравненій существуетъ еще третье, которое, по Муаньо, будетъ

$$V-\frac{\partial V}{\partial x'}x'-\frac{\partial V}{\partial y'}y'=k,$$

или $-\lambda(x'^2+y'^2+1)=k$, что, на основаніи условія 1), дастъ $\lambda=-\frac{k}{2}$. Такимъ образомъ будетъ имѣть окончательно

2) $$-y+kx'=a, \quad x+ky'=b, \quad x'^2+y'^2=1.$$

Обращаясь къ условіямъ, которымъ удовлетворяютъ предѣльныя значенія, получимъ, по Муаньо,

$$\Big|_{s_1}^{s_2}\left\{\frac{\partial V}{\partial x'}\delta\xi+\frac{\partial V}{\partial y'}\delta\eta+\left(V-\frac{\partial V}{\partial x'}x'-\frac{\partial V}{\partial y'}y'\right)\delta s\right\}=0,$$

т. е.

3) $$\Big|_{s_1}^{s_2}\{-a\delta\xi+(\xi-b)\delta\eta\}+k.\delta(s_2-s_1)=0.$$

Остается разобрать это условіе. Если примемъ, что даны крайнія точки, но *длина дуги не дана*, то въ 3) $\delta\xi=0$, $\delta\eta=0$, $\delta(s_2-s_1)$ произвольно и потому $k=0$; уравненія 2) доставятъ въ этомъ случаѣ:

$$-y=a, \quad x=b, \quad 0=1,$$

т. е. тотъ же абсурдъ, какъ и ранѣе. Принимая, что *длина дуги* $s_2 - s_1$ *дана* вмѣстѣ съ крайними точками, мы обратимъ въ тождество условіе 3) и уравненія 2) доставятъ, по исключеніи x' и y',

$$(y-a)^2+(x-b)^2=k^2,$$

т. е. уравненіе круга. Очевидно, такимъ образомъ, что несовершенны не пріемы, рекомендованные руководствомъ Муаньо, а умѣнье ихъ прилагать, какъ мы будемъ имѣть поводъ замѣтить это еще разъ сейчасъ же.

Этотъ новый поводъ представляетъ намъ другая статья того же автора «о нѣкоторыхъ особенностяхъ въ постановкѣ задачи о поверхности наименьшаго сопротивленія», на которую онъ ссылается во второмъ примѣчаніи на стр. 9. На стр. 4 этой новой статьи авторъ разсматриваетъ варьяцію

$$\delta \int \{yy_1^3+\lambda(x_1^2+y_1^2-1\} \, ds$$

и пишетъ дифференціальныя уравненія

$$\frac{x\varrho}{\varDelta\varrho}-\frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial V}{\partial y}-\frac{d}{dy}\frac{\partial V}{\partial y_1}=0.$$

Вмѣсто dx и dy здѣсь должно быть ds: будемъ считать эту «особенность» опечаткою, встрѣчающеюся и еще разъ на той же страницѣ. Но вотъ что не опечатка: одинъ интегралъ этихъ уравненій г. А. Старковъ пишетъ въ видѣ

$$V=x_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+y_1\frac{\partial V}{\partial y_1}$$

безъ произвольнаго постояннаго, что отражается на всѣхъ послѣдующихъ выводахъ. Исправимъ эту ошибку по Муаньо и прибавимъ ко второй части $-2\,k$. Вмѣсто уравненія 5) будетъ имѣть

$$\lambda+yy_1^3=k,$$

кромѣ того, вѣрно найденное далѣе уравненіе

$$x_1\lambda+c_1=0$$

и еще уравненіе $x_1^2+y_1^2-1=0$.

Условіе для предѣльныхъ значеній будетъ имѣть видъ

$$\Big|_{s_1}^{s_2}\{-2c_1\delta\xi+(3\eta\eta_1^2+2\lambda\eta_1)\delta\eta\}-2k\delta(s_2-s_1)=0.$$

Если примемъ, что *длина дуги кривой не подлежитъ ограниченіямъ*, то необходимо принять $k=0$ и три предыдущія уравненія доставятъ кривую Ньютона. Если же примемъ теперь, что *длина дуги дана*, то членъ $2k\delta(s_1-s_2)$ исчезнетъ и останется

$$\Big|_{s_1}^{s_2}\{-2c_1\delta\xi+(3\eta\eta_1^2+2\lambda\eta_1)\delta\eta\}=0$$

Допустимъ, что даны крайнія ординаты (т. е. площади конечныхъ сѣченій тѣла вращенія); въ этомъ случаѣ заключимъ $\delta\eta=0$ и слѣд. $c_1=0$. Обращаясь къ общимъ уравненіямъ кривой, получимъ $\lambda=0$, $yy_1^3=k$, т. е. кривую Лежандра. Итакъ обѣ кривыя (Ньютона и Лежандра) получаются при правильномъ анализѣ, соотвѣтствуя различнымъ предположеніямъ; такъ что ставить ихъ въ какой то антагонизмъ, какъ дѣлаетъ это г. А. Старковъ, нѣтъ ни малѣйшаго основанія. Далѣе, тотъ же анализъ обнаруживаетъ, почему рѣшая неправильнымъ пріемомъ (т. е. не обращая вниманія на уравн. 1) задачу, г. А. Старковъ могъ все-таки получить въ результатѣ кривую Лежандра: дѣло въ томъ, что для этой кривой $\lambda=0$ и членъ $\lambda(x_1^2+y_1^2-1)$ исчезаетъ самъ собою подъ знакомъ интеграла; кривой же Ньютона, гдѣ λ не $=0$, г. А. Старковъ получить не могъ, не пользуясь условіемъ 1)

Обращаюсь къ стр. 9 статьи г. А. Старкова «объ одной задачѣ и т. д.», гдѣ онъ глумится, что я «не склоненъ искать въ своемъ рѣшеніи указаній для формы подводныхъ судовъ».

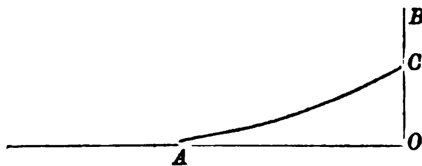
Такая моя скромность обусловливается тѣмъ, что по аналитической постановкѣ задачи безконечно-длинный цилиндръ при своемъ движеніи параллельно оси будетъ испытывать такое же сопротивленіе какъ и его основаніе. Получивъ изъ такого, очевидно несоотвѣтствующаго дѣйствительности, предположенія тѣло вращенія не похожее на рыбу (а впрочемъ, я не занимался изученіемъ рыбьихъ формъ), я не имѣлъ повода «усумниться» (вѣроятно, усомниться) въ правильности своего рѣшенія задачи варіаціоннаго исчисленія, какъ не сомнѣваюсь и теперь. Правда, на стр. 10, 12 и 23 г. А. Старковъ выставляетъ противъ меня даже г. Вейерштрасса, но едва ли не слѣдуетъ эту ссылку разсматривать какъ новое заблужденіе, такъ какъ точнаго указанія г. А. Старковъ не сообщаетъ (есть только указаніе на № 2727 Новороссійскаго Телеграфа!). Впрочемъ, все, что по этому предмету могло быть написано кѣмъ бы то ни было, будетъ относиться, очевидно, не только ко мнѣ, а и къ каждому другому автору по варіаціонному исчисленію, до г. А. Старкова включительно.

Въ примѣчаніи на стр. 10 г. А. Старковъ заявляетъ, что я произвольно заключилъ, что онъ далъ «въ замкнутой формѣ уравненіе кривой Ньютона, которое однако, не удовлетворяетъ дифференціальному». Это заключеніе непроизвольно, а сдѣлано мною на основаніи стр. 47, 85, 86 и 87 его первой статьи. На стр. 85 онъ разсматриваетъ кривую Ньютона и пишетъ (2-ая строка снизу): «Примѣнивъ же къ этому случаю пріемъ указанный выше въ первой главѣ, мы непосредственно получимъ одно уравненіе между y и x, опредѣляющее кривую. Дѣйствительно, выше было неоднократно указано, что *задача Ньютона* получится изъ разобранной, какъ частный случай, обусловленный положеніемъ $A=0$ и т. д.»; на стр. 87 выводятся два свойства *кривой Ньютона*, а на 47 стр. заявлено, что при $A=0$ получается *кривая Ньютона*. Кажется, я имѣлъ достаточно основаній для своего заключенія.

Точно также приписать г. А. Старкову стараніе отыскивать сомкнутую кривую я имѣлъ «право и поводъ» на основаніи стр. 6 его первой статьи, гдѣ онъ говоритъ, что «предлагаемое здѣсь рѣшеніе отличается отъ даннаго Ньютономъ тѣмъ, что получаются *замкнутыя* поверхности». Меридіанъ замкнутой поверхности несомнѣнно будетъ также сомкнутая кривая, тогда какъ для поверхности Ньютона онъ состоитъ изъ двухъ симметричныхъ, но разъединенныхъ вѣтвей. Не понимаю, какъ въ продолженіи того же примѣчанія на стр. 11 г. А. Старковъ находитъ возможнымъ обратить это возраженіе противъ меня. Я нахожу общее дифференціальное уравненіе 7) и его интегралъ, выражаемый уравненіями 10 и 11, и замѣчаю что при $\alpha=0$ получается отсюда рѣшеніе Ньютона; затѣмъ на стр. 8 изыскиваю условіе, при которомъ можетъ получиться сомкнутая кривая, т. е. при одномъ условіи я получаю кривую Ньютона, а при другомъ сомкнутую. Это оказалось возможнымъ потому, что при $\alpha=0$ координаты x и y представляются въ неопредѣленномъ видѣ $\frac{0}{0}$. Тодгёнтеръ не выводитъ общихъ интегральныхъ формулъ и прямо въ дифференціальномъ уравненіи принимаетъ $c=0$, получая такимъ образомъ то же рѣшеніе, которое дано мною. Это очень дурно съ его стороны, потому что лишило его возможности изслѣдовать надлежащимъ образомъ вопросъ о minimum по способу Якоби. Такимъ образомъ и послѣ Тодгёнтера въ моемъ изложеніи рѣшенія встрѣчается полезное дополненіе; а если принять во вниманіе указанную въ началѣ этой статьи цѣль, съ которою была написана моя первая статья, то и простое воспроизведеніе нѣкоторыхъ вычисленій Тодгёнтера могло бы быть признано полезнымъ. Вмѣсто того, чтобы выставлять Тодгёнтера противъ меня, не слѣдуетъ ли г. А. Старкову задуматься поглубже надъ своимъ рѣшеніемъ. Моя постановка задачи и рѣшеніе оказались согласными со сдѣланными Тодгёнтеромъ и я такимъ образомъ отхожу на задній планъ. Но теперь является вопросъ: кто

правильнѣе поставилъ и рѣшилъ задачу—получившій ли премію Тодгёнтеръ или г. А. Старковъ?

Не слѣдуетъ, впрочемъ, слишкомъ увлекаться книгою Тодгёнтера. Далеко не всѣ вычисленія и положенія его безупречны; кромѣ того нужно умѣть его понимать. Напримѣръ, Тодгёнтеръ говоритъ: We must not say that we have obtained the solid of least resistance, for by using a zigzag boundary we could make the resistance as small as we please for any given volume. Цитируя эту фразу противъ меня, г. А. Старковъ не замѣчаетъ, что она въ равной мѣрѣ направлена и противъ него, такъ что ему остается, бросивъ дальнѣйшія не удачныя вычисленія, перейти къ дѣйствительному построенію зигзаго-образныхъ лодокъ. Не выходя изъ области той же задачи, сдѣлаемъ еще одно замѣчаніе по поводу прерывныхъ рѣшеній. Желая построить на данномъ основаніи (πb^2) тѣло вращенія съ даннымъ объемомъ, Тодгёнтеръ заключаетъ, что если данный объемъ менѣе $\frac{\pi b^3 \sqrt{3}}{5}$, то должно быть взято прерывное рѣшеніе, состоящее изъ части AC кривой и отрѣзка CB прямой, перпендикулярной къ оси.



Тѣло вращенія будетъ такимъ образомъ состоять изъ дѣйствительнаго тѣла, описаннаго площадью AOC и заключающаго данный объемъ, и кольцеобразнаго крыла, описаннаго линіей BC и имѣющаго назначеніемъ увеличить сопротивленіе. Въ подобномъ случаѣ Муаньо сказалъ бы, что задача не имѣетъ рѣшенія; но измѣнивъ условія, именно принявъ, что площадь основанія не должна превосходить πb^2, онъ пашелъ бы кривую AC

По существу результаты оказались бы тождественными и все различіе привелось бы къ различію способовъ выраженія. Какой изъ этихъ способовъ заслуживаетъ предпочтенія — это главнымъ образомъ дѣло вкуса; но въ интересахъ наглядности едва ли не слѣдуетъ отдать предпочтенія старому способу.

Я кончаю и надѣюсь, что безпристрастный читатель упоминаемыхъ въ этой статьѣ произведеній придетъ вмѣстѣ со мною къ заключенію, что истина заключается не въ заносчивыхъ и напыщенныхъ италіанскихъ фразахъ, которыми снабдилъ свою статью г. А. Старковъ, а кое въ чемъ другомъ, и то если г. А. Старковъ закончилъ свою статью по моему адресу пословицей: La critique est aisée, mais l'art est difficile, то я съ своей стороны не могу сказать, что для г. А. Старкова даже la critique est aisée.

Варшава,
1 сентября 1885.

Прибавленіе. Когда эта статья была уже отправлена по назначенію, я получилъ отъ г. А. П. Старкова новое его произведеніе въ томъ же родѣ, написанное на французскомъ языкѣ и напечатанное въ Bulletin de la Société mathématique de France, t. XII. Въ этой работѣ авторъ, по видимому, отступаетъ отъ своего взгляда о *равнозначительности* условій относительно величины площади сѣченія и объема, по крайней мѣрѣ не замѣняетъ втораго условія первымъ; но тѣмъ съ бо̀льшею настойчивостью проводитъ свое заблужденіе относительно условія 1). При этомъ французскій текстъ такъ же противорѣчитъ формуламъ, какъ прежде противорѣчилъ русскій, именно приводя интегралы къ перемѣнному s *при посредствѣ* условія 1), авторъ въ то же время заявляетъ, что онъ рѣшаетъ задачу sans restreindre cette variable par l' équation 1). Я не буду заниматься дальнѣйшимъ разборомъ высказанныхъ авторомъ во французской статьѣ мнѣній, признавая его неумѣстность; но позволю себѣ коснуться одного только

пункта, который перешелъ въ новую статью изъ статьи «о нѣкоторыхъ особенностяхъ и т. д.». Рѣчь идетъ о сравненіи величинъ интеграла сопротивленія для кривой Ньютона и кривой Лежандра. Г. А. П. Старковъ пишетъ дифференціальныя уравненія этихъ кривыхъ въ видѣ

$$y=c_1\frac{(1+p^2)^2}{p^3} \quad \text{и} \quad y=c_1\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3},$$

находитъ для нихъ слѣдующія выраженія интеграла сопротивленія

$$kc_1\int\sqrt{1+p^2}\,ds \quad \text{и} \quad kc_1\int ds$$

и отсюда заключаетъ, что второе сопротивленіе менѣе перваго. Такое заключеніе было бы непреложно, если бы было доказано, что при *одинаковыхъ предѣльныхъ условіяхъ* величина постояннаго c_1 *одинакова* для обѣихъ кривыхъ; за отсутствіемъ же такого доказательства заключеніе нашего автора не имѣетъ никакой силы и съ такимъ же правомъ можно утверждать, что, напримѣръ, сопротивленіе на кривыхъ, представляемыхъ уравненіями

$$y=c_1\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^3}, \quad y=c_1\frac{\sqrt{1+p^2}}{p^3}, \text{ и т. д.}$$

менѣе нежели на взятой имъ кривой Лежандра, ибо представляется выраженіями

$$\frac{1}{2}kc_1\int ds, \quad kc_1\int\frac{ds}{1+p^2}, \text{ и т. п.},$$

которыя при одномъ и томъ же c_1 менѣе $kc_1\int ds$.

Варшава, 22 октября 1885.

Новое построеніе Мориса Д'Окань для опредѣленія отношенія скоростей въ направляющихъ механизмахъ Поселье и Гарта.

Читано проф. В. Н. Лигинымъ въ засѣданіи 2 ноября 1884 года.

Въ засѣданіи 20 ноября 1881 года я сообщилъ Обществу найденныя г. Морисомъ д'Окань и мною построенія для опредѣленія отношенія скоростей въ направляющихъ механизмахъ Поселье, Гарта и Кемпе[1]). Въ настоящемъ году, г. Морисъ д'Окань, въ двухъ письмахъ отъ 12 и 27 марта, сообщилъ мнѣ новое, замѣчательное по своей простотѣ построеніе тогоже отношенія для механизмовъ Поселье и Гарта, которое, по порученію г. д'Окань, я имѣю честь представить Обществу.

Если прямая, вращающаяся вокругъ точки A (фиг. 1), пересѣкаетъ кривыя (M) и (M_1) въ точкахъ M и M_1 и если нормали, проведенныя въ послѣднихъ точкахъ къ этимъ кривымъ, встрѣчаютъ въ N и N_1 перпендикуляръ, возставленный изъ точки A къ AM, то, означая черезъ ds и ds_1 элементы дугъ, описанные точками M и M_1 на кривыхъ (M) и (M_1), будетъ, по извѣстной теоремѣ [2]),

$$\frac{ds}{ds_1}=\frac{MN}{M_1N_1}. \tag{1}$$

---

[1]) Построенія эти изложены въ моей статьѣ «Sur les systèmes articulés de M. M. Peaucellier, Hart et Kempe», помѣщенной въ Nouvelles Annales de Mathématiques, 3-me série, t. I, an. 1882, p. 153—163.

[2]) См. наприм. Bour, Cours de mécanique et machines. Cinématique, p. 57.

Предположимъ, что линія (M) есть прямая, а (M_1)—ок-ружность, проходящая черезъ точку A и имѣющая свой центръ въ O (фиг. 2). Тогда, называя черезъ α дополненіе угла AOM_1 до 180^0, будетъ $ds_1 = OM_1.d\alpha$, и на основаніи уравненія (1) получимъ

$$ds = \frac{MN.OM_1}{M_1N_1} d\alpha ,$$

или, раздѣляя обѣ части этого равенства на дифференціалъ времени и называя черезъ v линейную скорость движенія точки M по прямой (M) и черезъ ω угловую скорость вращенія радіуса OM_1 около O,

$$\frac{v}{\omega} = \frac{MN.OM_1}{M_1N_1}.$$

Такъ какъ уголъ M_1AN_1 прямой, то точка N_1 лежитъ на окружности (M_1); посему $\frac{OM_1}{M_1N_1} = \frac{1}{2}$ и

$$\frac{v}{\omega} = \frac{1}{2} MN,$$

или, если μ есть середина отрѣзка MN,

$$\frac{v}{\varphi} = M\mu.$$

Но $M\mu$ перпендикулярна къ прямой (M); сверхъ того треугольникъ MAN можетъ быть вписанъ въ полу-окружность. Слѣдовательно, геометрическое мѣсто точки μ есть парабола, имѣющая фокусомъ точку A, а направляющею прямую (M).

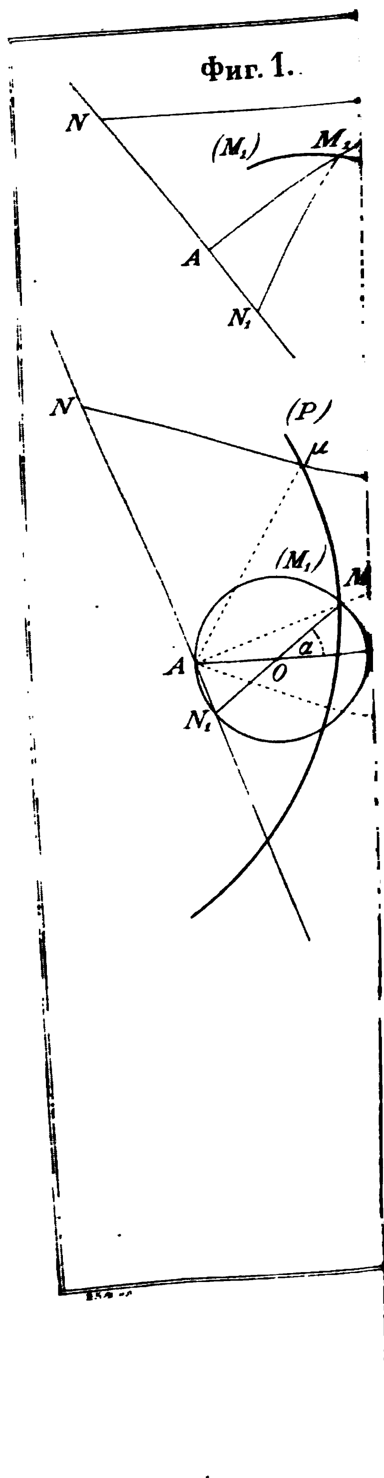
Если теперь предположимъ, что прямая (M) перпендикулярна къ прямой AO, то получается представленное на фиг. 3 и 4 весьма простое построеніе для опредѣленія отношенія скорости v прямолинейнаго движенія къ угловой скорости вращающагося шеста OM въ направляющихъ механизмахъ Поселье (фиг. 3) и Гарта (фиг. 4). Построеніе это состоитъ въ

слѣдующемъ: чертимъ параболу (P), имѣющую фокусомъ неподвижный центръ вращенія O и направляющею линію (M), по которой происходитъ точное прямолинейное движеніе; возставляемъ къ (M) перпендикуляръ $M\mu$ и продолжаемъ его до пересѣченія μ съ параболою; тогда, согласно найденному выше,

$$\frac{v}{\omega} = M\mu \ ;$$

слѣдовательно линія $M\mu$ изобразитъ искомое отношеніе.

Такимъ образомъ получается очень наглядное представленіе о законѣ измѣненія отношенія скоростей v и ω въ механизмахъ Поселье и Гарта. Если бы, напримѣръ, требовалось, чтобы точка M_1 описывала окружность (M_1) равномѣрнымъ движеніемъ, то скорость точки M должна была-бы измѣняться какъ абсцисса $M\mu$ параболы (P).



тва

на,
. В.
въ,

ипе-
От-
іями
пре-

Об-
оль-
зда-
юто-

таго

зить
. Е.
іеніе

ПРОТОКОЛЫ

засѣданій Математическаго Отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей

съ 3 марта 1884 по 17 апрѣля 1885 года.

Засѣданіе 3 марта 1884 года.

Присутствовали, подъ предсѣдательствомъ В. Н. Лигина, члены: В. Н. Габбе, Х. Л. Гохманъ, Н. А. Каминскій, А. В. Клоссовскій, А. К. Кононовичъ, К. В. Май, В. М. Репяховъ, И. В. Слешинскій и Н. А. Умовъ.

1. Предсѣдатель Политехническаго Общества при Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ, выражая Отдѣленію благодарность за предложеніе объ обмѣнѣ изданіями и за высланные Обществу томы «Записокъ» Отдѣленія, препровождаетъ всѣ изданія Общества.

2. Секція физико-математическихъ наукъ Казанскаго Общества Естествоиспытателей извѣщаетъ, что она съ удовольствіемъ принимаетъ предложеніе о постоянномъ обмѣнѣ изданіями и препровождаетъ первый томъ собранія своихъ протоколовъ.

3. Предсѣдатель заявилъ о выходѣ изъ печати пятаго тома «Записокъ» Математическаго Отдѣленія.

4. По предложенію предсѣдателя, постановлено выразить благодарность иногороднимъ ученымъ Н. Я. Сонину, Н. Е. Жуковскому, Ѳ. Е. Орлову и П. М. Новикову за доставленіе ими пяти статей для пятаго тома «Записокъ».

5. А. К. Кононовичъ сдѣлалъ сообщеніе: *къ вопросу о сравнительной яркости звѣздъ первыхъ двухъ величинъ.*

6. Х. Л. Гохманъ сдѣлалъ сообщеніе *о методахъ преподаванія элементарной математики.* Въ продолжительныхъ преніяхъ по поводу этого сообщенія принимали участіе члены Каминскій, Слешинскій, Клоссовскій, Умовъ и Лигинъ.

Засѣданіе 2 ноября 1884 года.

Присутствовали, подъ предсѣдательствомъ В. Н. Лигина, члены: Н. А. Умовъ, А. В. Клоссовскій, Н. С. Починскій, В. Н. Габбе, А. П. Старковъ, Н. А. Каминскій.

1. Предсѣдатель заявилъ, что Лондонское Математическое Общество и Астрофизическая Обсерваторія въ Герени вступили съ секціей въ постоянный обмѣнъ изданіями.

2. Секретарь Парижскаго Математическаго Общества Морисъ д'Оканъ доставилъ для библіотеки Общества три своя статьи. Постановлено: благодарить г. д'Оканъ.

3. А. П. Старковъ сдѣлалъ сообщеніе *о нѣкоторыхъ особенностяхъ въ постановкѣ задачи о поверхности наименьшаго сопротивленія.* По поводу этого сообщенія было сдѣлано нѣсколько замѣчаній проф. Умовымъ.

4. В. Н. Лигинъ сдѣлалъ отъ имени г. Мориса д'Оканъ сообщеніе *объ одномъ новомъ геометрическомъ построеніи отношенія скоростей въ направляющихъ механизмахъ Поселье и Гарта.*

Засѣданіе 7 декабря 1884 года.

Присутствовали, подъ предсѣдательствомъ В. Н. Лигина, члены: Ѳ. Н. Шведовъ, Н. А. Умовъ, А. В. Клоссовскій, И. В. Слешинскій, Н. С. Починскій, А. П. Старковъ, К. А. Лисовскій и В. Н. Габбе.

1. Редакція издаваемаго въ Кіевѣ проф. Ермаковымъ «Журнала элементарной математики» доставила Отдѣленію вышедшіе до настоящаго времени нумера журнала. Постановлено: благодарить Редакцію и выслать ей въ обмѣнъ изданія Отдѣленія.

2. Г. М. Д'Окань доставилъ обществу три свои брошюры. Постановлено: благодарить г. д'Окань.

3. Г. Шнейдеръ представилъ нѣсколько теоремъ изъ элементарной геометріи и алгебры. Постановлено: передать работу г. Шнейдера на разсмотрѣніе И. В. Слешинскаго.

4) Профессоръ Н. А. Умовъ сдѣлалъ сообщеніе *о геометрическомъ значеніи интеграловъ Френеля.*

5) А. П. Старковъ сдѣлалъ сообщеніе *къ теоріи функцій.*

Засѣданіе 6 февраля 1885 года.

Присутствовали, подъ предсѣдательствомъ В. Н. Лигина, члены: Н. А. Умовъ, А. К. Кононовичъ, А. В. Клоссовскій, А. П. Старковъ, В. Н. Габбе и Н. А. Каминскій.

1. А. П. Старковъ сдѣлалъ предложеніе о ежегодномъ печатаніи библіографіи русской математической литературы за истекшій годъ въ «Запискахъ» Общества, при чемъ А. П. Старковъ и В. Н. Габбе выразили готовность взять на себя составленіе такого указателя. Постановлено: принять предложеніе А. П. Старкова и благодарить его и В. Н. Габбе за принятый на себя трудъ.

2. А. П. Старковъ сдѣлалъ сообщеніе: *къ вопросу о введеніи символизма въ алгебру.*

Засѣданіе 14 марта 1885 года.

Присутствовали, подъ предсѣдательствомъ В. Н. Лигина, члены: Н. А. Умовъ, А. В. Клоссовскій, А. П. Старковъ, В. Н. Габбе.

Членъ Общества А. П. Старковъ сдѣлалъ два сообщенія: 1) *о геометрическомъ значеніи способа Якоби для различенія максимума и минимума въ варіаціонномъ исчисленіи*, 2) *объ алгебраическомъ обозначеніи у арабовъ.*

Засѣданіе 17 апрѣля 1885 года.

Присутствовали, подъ предсѣдательствомъ В. Н. Лигина, члены: Н. А. Умовъ, А. П. Старковъ, В. Н. Габбе.

Членъ Общества А. П. Старковъ сдѣлалъ сообщеніе *о невозможности интегрированія въ конечномъ видѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій высшихъ порядковъ.*

РУССКАЯ БИБЛІОГРАФІЯ
по
Математикѣ, Механикѣ, Астрономіи, Физикѣ и Метеорологіи
за 1884 годъ.

составили
В. Н. Габбе и А. Старковъ.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Польза и необходимость математической библіографіи въ западной Европѣ сознана давно. Еще въ 1688 году въ Амстердамѣ появляется первое относящееся къ этому предмету, крайне интересное изданіе Beughem'а [1]), заключающее въ себѣ перечень математическихъ книгъ впрочемъ за короткій періодъ съ 1650 г. по 1688 г. т. е. за 33 года. Съ того времени въ теченіи двухъ столѣтій: XVIII и въ особенности XIX, было значительное число изданій, въ томъ числѣ и на русскомъ языкѣ [2]), посвященныхъ математической библіографіи и обнимающихъ частію её всю, — частію библіографію отдѣльныхъ націй. При такихъ условіяхъ постепенно вырабатывалась и система, въ настоящее время признанная наиболѣе удовлетворительною, которая во всей строгости выполнена лишь въ недавнее время Riccardi въ его знаменитомъ трудѣ Biblioteca Matematica Italiana [3]).

---

[1]) *Cornelio à Beughem Emb.* Bibliographia Mathematica et artificiosa novissima perpetuò continuanda etc. Amstelodami 1688.

[2]) *Славинскій.* Указатель Русской литературы по математикѣ, чистымъ и прикладнымъ естественнымъ наукамъ. Кіевъ. Вышло 12 томовъ, съ 1871 по 1883 г. включительно.

[3]) *Riccardi Pietro.* Biblioteca Matematica Italiana della stampa al primi anni del secolo XIX. Modena 1870—1880.

Послѣдующія изданія, какъ напр. Bierens de Haan[1]), придерживаются вполнѣ этой системы, заключающейся въ дѣленіи всего изданія на двѣ части, изъ которыхъ въ первой приводятся подробно всѣ изданія въ алфавитномъ порядкѣ авторовъ и частію названій, гдѣ авторы неизвѣстны, съ указаніемъ относящихся къ нимъ замѣчаній, — во второй содержится распредѣленіе по отдѣламъ сочиненій, поименованныхъ въ первой части, причемъ указаніе ихъ приводится кратко. Благодаря такой системѣ весьма легко отыскать данное сочиненіе какъ по имени его автора, или по названію, если авторъ неуказанъ, такъ и по отдѣлу, къ которому оно относится. Кромѣ того получается возможность легко обозрѣть всѣ сочиненія, относящіяся къ данному предмету.

Предпринимая ежегодное изданіе русской библіографіи по математикѣ, механикѣ, астрономіи, физикѣ и метеорологіи, составители остановились на указанной системѣ, какъ наиболѣе выработанной и признанной за лучшую. Въ тоже время составители далеки отъ мысли, что ихъ изданіе съ самаго начала своего появленія окажется столь полнымъ, какъ было бы тò желательно. Обстоятельства, затруднившія совсѣмъ непредвидѣнно выполненіе предпринятаго труда едва не заставили, при значительно двинутой впередъ работѣ, совсѣмъ её оставить и всё сдѣланное едва не было обречено пропасть безслѣдно. Въ числѣ этихъ обстоятельствъ главную роль играла невозможность располагать всѣми выходящими въ Россіи спеціально-научными изданіями, кото-

---

[1]) *Bierens de Haan.* Bibliographie Néerlandaise historico-scientifique des ouvrages importants dons les auteurs sont nés aux 16-e, 17-e et 18-e siècles, sur les sciences mathématiques et physiques avec leurs applications. Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche T. XIV et XV 1881—1882.

рыхъ оказалось гораздо больше, чѣмъ можно было предполагать съ перваго взгляда. Между тѣмъ по первоначально задуманному плану представить систематическую русскую библіографію математики желательно было помѣстить *всѣ* статьи, вышедшія въ данномъ году. Указанное обстоятельство помѣшало достигнуть желаемой полноты, такъ какъ было необходимо поспѣшить съ выходомъ изданія, которое сосредоточиваетъ на себѣ интересъ прямо въ зависимости отъ скорости своего появленія по окончаніи истекшаго года. По той же причинѣ относительно многихъ статей, помѣщенныхъ въ упомянутыхъ выше спеціальныхъ изданіяхъ, пришлось довольствоваться приведеніемъ названій лишь изъ вторыхъ рукъ, вслѣдствіе чего статья могла попасть не въ подлежащій отдѣлъ, такъ такъ по названію, да еще взятому изъ вторыхъ рукъ, иногда съ затемняющими смыслъ опечатками, не всегда возможно вѣрно опредѣлить содержаніе. Кромѣ того помѣщенныя въ тѣхъ изданіяхъ статьи, указанія на которыя не пришлось встрѣтить въ другомъ мѣстѣ, могли пройти совсѣмъ не названными. Вслѣдствіе этого составители настоящаго изданія рѣшаются убѣдительно просить авторовъ статей по математикѣ, механикѣ, астрономіи, физикѣ и метеорологіи помѣщаемыхъ въ спеціальныхъ журналахъ, присылать по одному ихъ экземпляру въ Одессу, Математическому отдѣленію Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей съ надписью «для библіографіи», причемъ составители или возвращаютъ на свой счетъ этотъ экземпляръ обратно автору, если онъ того пожелаетъ, или, въ противномъ случаѣ, высылаютъ въ замѣнъ экземпляръ настоящей библіографіи, а статью сдаютъ въ библіотеку Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. Въ надеждѣ, что гг.

авторы, которымъ дороги интересы русской науки не менѣе составителей, не пройдутъ безъ вниманія изложенную здѣсь просьбу, тѣмъ болѣе что важность и значеніе *полной* библіографіи, хотя бы и для такой сравнительно небогатой математической литературы, какою является русская, не требуютъ доказательствъ. Составители съ своей стороны предполагаютъ въ будущемъ расширить свое изданіе изложеніемъ краткаго содержанія указываемыхъ сочиненій на подобіе извѣстнаго изданія Ortmann'а[5]) и кромѣ того будутъ присоединять по мѣрѣ силъ и возможности перечень статей и научныхъ изданій, относящихся къ математикѣ и вышедшихъ за границею въ теченіи отчетнаго года. Въ заключеніи остается составителямъ принести искреннюю благодарность Математической секціи Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей за ея готовность, съ какою она оказала нравственную и матеріальную поддержку настоящему изданію.

Составители.

Одесса, 1 іюля 1885 г.

---

[5]) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Berlin. 1871—1885. Вышло 14 томовъ за время съ 1868 по 1882 гг. включительно.

РУССКАЯ БИБЛІОГРАФІЯ

по Математикѣ, Механикѣ, Астрономіи, Физикѣ и Метеорологіи

за 1884 годъ.

Абаза, К. К. Ариѳметика для солдатъ. Цѣлыя числа, именованныя числа, понятіе о дробяхъ. Изд. 2-е испр. Спб. 1884 8 д. Ц. 25 коп. (1)

Абламскій, Д. и Н. Азбука русской семьи и школы для одновременнаго обученія дѣтей Закону Божію, русскому, церковно-славянскому чтенію по звуковому методу, письму, грамматикѣ родного языка, ариѳметикѣ и церковному пѣнію по нотамъ. Кіевъ. 1884 г. 8° изд. 75. (2)

Авенаріусъ, М. Объ общемъ законѣ расширенія жидкостей. Спб. 1884. 8 д. 6 стр. (3)

— По вопросу о расширеніи жидкостей. Спб. 1884. 8 д. 7 стр. (4)

— Критическое состояніе тѣлъ. Жур. Эл. Мат. 1884. 89—100. См. Менделѣевъ, Д. (5)

Агѣевъ, М. А. Роса и ея осажденіе около Уточкиной Мельницы, Валуйскаго уѣзда, Воронежской губерніи. Съ 4 табл. рис. и чертеж. Зап. Имп. Харьк. ун. 1882. Харьковъ 1884. Т. I. (6)

Адамантовъ, Д. Пропедевтическій курсъ для преподаванія науки вообще и ариѳметики въ частности. Съ рис. и черт. въ текстѣ. Каз. 1885. 8 д. Ц. 1 руб. (7)

Аэростатъ Ш. Ренара и А. Кребса. В. П. Инжен. Журн. 1884. № 9. 121. (8)

— Электро-винтовой аэростатъ братьевъ Тисандье (La Nature № 592). Инжен. Журн. 1884. № 10. Стр. 131. (9)

Александровъ, А. Первыя XIX предложеній начальной геометріи Эвклида въ новомъ изложеніи. Тамбовъ. 1884. 8 д. 31 стр. Ц. 30 коп. (10)

Алексѣевъ, В. О теплоемкостяхъ растворовъ и тепловомъ эфектѣ при ихъ образованіи. Спб. 1884. 8 д. 11 стр. (11)

Альбицкій, В. Винтовое зацѣпленіе его разсчетъ и вычерчиваніе (лекціи). Спб. 1884. 8 д. (12)

— Коническія зубчатыя колеса ихъ разсчетъ и вычерчиваніе. Спб. 1884. 8 д. (13)

Американская паровая машина безъ золотниковой коробки. Техникъ. 1884. № 58 стр. 145. (14)

Annales de l'observatoire de Moscou. Publiées par le prof. dr. Th. Bredichin. Volume X 1 livraison. Avec cinq. planches. Москва. 1884. 4 д. 3 нен.+110+1 нен. стр. (15)

Андреевъ, К. А. Нѣсколько словъ по поводу теоремъ П. Л. Чебышева и В. Г. Имшенецкаго объ опредѣленныхъ интегралахъ отъ произведенія функцій. Зап. Харьк. ун. 1882. Харьк. 1884 г. Т. IV. (16)

Апраксинъ, А. Гр. Воздухоплаваніе и примѣненіе его къ передвиженію аэростатовъ свободныхъ и не свободныхъ по желаемымъ направленіямъ. Спб. 1884. 8 д. Ц. 1 р. 50 к.). (17)

Ариѳметика со многими задачами, равно и съ вопросами относящимися къ предыдущимъ правиламъ. Для учениковъ мусульманскихъ школъ. Ч. I. Тифлисъ. 1884. 8 д. 32 стр. Ц. 50 коп. (18)

Ариѳметика. Тифлисъ. 1884. 8 д. 4 неп.+II+451+II стр. Ц. 80 к. (на груз. яз.). (19)

Ариѳметика для деревенскихъ школъ. Ревель. 1884. 8 д. 94 стр. Ц. 25 к. (на эст. яз.). (20)

Ариѳметика для деревенскихъ школъ. Ревель. 1884. 8 д. 9 стр. (на эстонскомъ яз.). (21)

Ариѳметика для счетоводства. Тифлисъ. 1884. 8 д. 284 стр. (на грузинскомъ яз.). (22)

Ариѳметика въ вопросахъ и отвѣтахъ, для легчайшаго обученія дѣтей. Составлена по методу Меморскаго. Въ двухъ частяхъ. Москва. 1884. 16 д. 106 стр. Ц. 25 к. (23)

Баженовъ. Маяки, ихъ освѣтительные и звуковые приборы. Спб. 1884. 4 д. VIII+135+15 стр. 69 стр. черт. (24)
Техникъ 1884, № 50, стр. 32.

Backlund, O. Elemente und Ephemeride des Enkes'chen Cometen für die Erscheinung. 1884—1885. Спб. 1884. 4 д. 4 стр. (25)

Бардскій, М. О характерѣ силы частичнаго притяженія. Спб. 1883. 8 д. 9 стр. (26)

См. Соколовъ, А. П.

Бастамовъ. Замѣтка объ опредѣленіи коеффиціентовъ въ формулахъ для опредѣленія скоростей теченія воды и раціональности спроектированія гидрографа Котляревскаго. Спб. 1885. (27)

Бахметьевъ, П. Тепловыя явленія остаточнаго магнетизма. Спб. 1884. 8 д. 55 стр. (28)

— Магнетизмъ желѣзныхъ проволокъ заключенныхъ не всей своей длиной въ намагничивающую спираль. Спб. 1884. 8 д. 9 стр. (29)

— Зависимость между діамагнитностью и теплотой плавленія тѣлъ. Спб. 1884. 8 д. (30)

— Теплота намагничиванія кольцеобразнаго электромагнита. (Предварительное сообщеніе). Спб. 1884. 8 д. 6 стр. (31)

— Вліяніе линейнаго сжатія на магнитность желѣзныхъ, стальныхъ и никелевыхъ стержней. Спб. 1884. 8 д. (32)

Bergmann, R. Ueber die Zuverlässigkeit der Haarhygrometer auf meteorologischen Stationen in Rusland (Метеор. сборн. Имп. ак. н. Т. IX. № 3). Спб. 1884. 4 д. 30 стр. Ц. 25 к. (33)

Беренсъ, В. Элементарный курсъ исчисленія безконечно-малыхъ. Изд. 2. Часть I. Введеніе. Спб. 1884. 8 д. VIII + 360 стр. Ц. 2 р. 50 к. (34)

Беренсъ. П. Руководство геометріи для среднихъ учебныхъ заведеній съ 344 черт. въ текстѣ. 8 д. VIII + 256 стр. Изд. 2-е переработанное согласно программамъ учеб. завед. Министерствъ Военнаго и Народн. Просв. Спб. 1884. (35)

Бертранъ, Ж. Теоретическая ариѳметика. Перев. съ 7 изд. Н. Билибина. Спб. 1884. 8 д. 2 нен.+272+2 нен. стр. Ц. 1 р. (36)

Бехтеревъ, В. Теорія образованія нашихъ представленій о пространствѣ. Спб. 1884. 8 д. 47 стр. (37)

Биндеръ. Руководство къ гальванопластикѣ. Переводъ подъ ред. С. Степанова. Спб. 1884. 8 д. XII+178. стр. (38)

Близнинъ, Г. Отчетъ Елисаветградской метеорологической станціи при Елисаветградскомъ реальномъ училищѣ. Съ мая 1874 по сент. 1873 г. Херсонъ 1884. 3 д. 31 стр. (39)

Бобылевъ, Д. Воспроизведеніе пяти типовъ кривыхъ линій, вычерчиваемыхъ точками оси симметріи вращающагося маятника. Спб. 1884. 8 д. 4 стр. 1 табл. (40)

Бобынинъ, В. В. Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ. Отдѣлъ научныхъ статей: исторія и философія физико-математическихъ наукъ, исторія развитія физико-математическихъ наукъ въ Россіи, біографіи ученыхъ, статьи по общимъ и частнымъ вопросамъ физ.-мат. наукъ, по методологіи и преподаванію этихъ наукъ. Отдѣлъ научныхъ новостей, критики и библіографіи. Первый отдѣлъ будетъ выходить четыре раза въ годъ — въ мартѣ, іюнѣ, сентябрѣ и декабрѣ; второй — ежемѣсячно. Цѣна 10 руб. за годъ. (41)

Богаевскій, В. Свойство геометрической пропорціи. Жур. Эл. Мат. 1884. 105—107. (42)

Богаевъ, А. Конспектъ ариѳметики для приготовительнаго класса Казанскаго пѣхотнаго юнкерскаго училища часть I. Казань. 1884. 8 д. 3 нен.+80+1 нен. стр. (43)

Боголѣповъ, П. Сборникъ устныхъ ариѳметическихъ задачъ на числа первой сотни. Москва. 1884. 8 д. 83 стр. Ц. 25 коп. (44)

Боргманъ, Н. Объ измѣненіи продолжительности индукціонныхъ токовъ замыканія и размыканія при введеніи въ цѣпь индуктирующаго тока вѣтви съ другого индукціонною котушкою, паралельною дѣйствующей. Спб. 1884. 8 д. 16 стр. (45)

Босъ, А. и **Ребьеръ**, М. Полный курсъ элементарной геометріи съ приложеніемъ коническихъ сѣченій. Перевелъ Н. де-Жоржъ. Вып. I. Спб. 1885. 8 д. 2 нен.+II+149 стр. Цѣна 60 к. Вып. II. 8 д. Ц. 60 к. (46)

Braunow, P. Ueber den jährlichen Gang der Temperatur-Anomalien in dem Europäischen Cyclonen. (Mit einer Tafel) («Метеорологическій сборникъ» Имп. акад. наукъ. Томъ IX № 2). Спб. 1884. 4 д. 19 стр. Цѣна 30 к. (47)

Брегетъ, А. Машина Грамма, ея теорія и описаніе. Съ листомъ чертежей. Перев. Щавинскій. Москва. 1884. 12 д. 45+2 нен. стр. Цѣна 75 к. (48)

Техникъ 1884 № 56 стр. 126.

Bredichin, Th. Quelques remarques concernant mes recheules sur les cometes. Изд. Имп. Моск. общ. испыт. прир. Москва. 1884. 8 д. 20 стр. (49)

— Th. Sur les anomalies apparentes dans la structure de la grande comeete de 1744. (Avec une planche). Изд. Им. моск. общ. испыт. прир. Москва. 1884. 8 д. 15 стр. (50)

Броуновъ, П. И. Годовой ходъ отклоненія температуры отъ нормальной въ европейскихъ циклонахъ (съ рисункомъ). Спб. 1884. 8 д. 2 нен.+27 стр. Ц. 20 к. (51)

— Европейскія бури и предсказанія ихъ, съ таблицею чертежей и 8-ю картинами. Спб. 1884. 8 д. 3 нен.+63 стр. Ц. 80 к. (52)

Бугаевъ, Н. В. Нѣкоторыя приложенія теоріи эллиптическихъ функцій къ теоріи функцій прерывныхъ. Общіе числовые законы, вытекающіе изъ непосредственнаго разсмотрѣнія функцій Якоби. Изд. Моск. мат. общ. сост. при Имп. Моск. ун-тѣ. Москва. 1884. 8 д. 42 стр. (53)

— Нѣкоторыя приложенія теоріи элиптическихъ функцій къ теоріи функцій прерывныхъ. Общіе числовые законы, вытекающіе изъ разсмотрѣнія нѣкоторыхъ эллиптическихъ функцій. Москва. 1884. 8 д. 88 стр. Цѣна 1 р. (54)

— Нѣкоторыя приложенія теоріи эллиптическихъ функцій къ теоріи функцій прерывныхъ. Распространеніе общихъ числовыхъ законовъ на функціи произвольныя. Москва. 1885. 8 д. (55)

Будаевскій, С. Ариѳметика: полный систематическій курсъ для повторенія въ старшихъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній. Спб. 1884. 8 д.+211 стр. Цѣна 1 р. 50 к. (56)

Будневъ, Н. Лекціи механики. Спб. 1884. 8 д. 472 стр. (лит.). (57)

Будаевъ, Механика матерьяльной точки лекціи. Спб. 1884. 8 д. (58)

Букрѣевъ, Б. Аналитическія выраженія однозначныхъ функцій. Кіевъ. 1884. 8 д. 2 нен.+III+1 нен.+79 стр. (59)

Bouniakowsky, V. Demonstration de quelques propositions relatives à la fonction numerique E. (x). (Melanges mathematiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'academie Imperiale des sciences de St. Petersbourg Tome VI). Спб. 1883. 8 д.) (60)

Валентиновичъ, А. Сборникъ ариеметическихъ задачъ. Приготовительный курсъ. М. 1884. 8 д. 41 стр. Ц. 20 к. (61)

Vanecek, M. N. et I. S. Sur le contact avec les figures polaires reciproques dcs figures directrices (Melanges math. et astron. tirés du Bull. de l'acad. Imp. des sciences de St.-Petersbourg T. VI). Спб. 1884. 8 д. 203—213). (62)

Васильевъ, А. Теорія опредѣленія корней системъ алгебраическихъ уравненій. Казань. 1884. 8 д. III+114 стр. (63)

Васильевъ-Яковлевъ, Н. Сборникъ задачъ по коммерческой ариеметикѣ. Для коммерческихъ и реальныхъ училищъ. Изд. 2 испр. и доп. Кіевъ. 1884. 8 д. 2 нен.+IV+144 стр. 71, 75. (64)

Ващенко-Захарченко, М. Е. О времени возникновенія нѣкоторыхъ изъ алгебраическихъ символовъ. Жур. Эл. Мат. 1884. 14—16. (65)

— Выраженіе площади треугольника въ функціи его сторонъ. Id. 49—52. (66)

— Замѣтка о періодическихъ дробяхъ. Id. 76—80. (67)

— Историческій очеркъ развитія аналитической геометріи. Кіевъ. 1884. Цѣна 35 к. (68)

Weihrauch, Karl (Prof. an. d. Univ. zu Dorpat). Studien zur Mittelbildung bei der relativen Feuchtigkeit. Bull. de la Soc. Imp. des natural. de Moscou. 1884. № 2 стр. (69)

— Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat in den Iahren 1878, 1879, 1880 redigirt und bearbeitet von Dr. K. Weihrauch. 13—r, und 15—r Iahrgang. 3—r Band. 3—s, 4—s, 5—s Heft. Дерптъ 1884. 8 д. 3 нен.+251 стр. (70)

— Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat im Iahre 1877 redigirt und bearbeitet von Dr. K. Weihrauch. 12—r Iahrgang. 3—s Band. 2—s Heft. Дерптъ 1884. 8 д. VI+138 стр. 1 табл. (71)

Веребрюсовъ, А. Прямолинейная тригонометрія. Руководство для среднихъ учебныхъ заведеній съ приложеніемъ крат-

каго понятія о нивелированіи и съемкѣ плановъ. Харьковъ. 1884. 8 д. Ц. 50 к. (72)

Верещагинъ, И. Сборникъ ариѳметическихъ задачъ для среднихъ учебныхъ, заведеній, мужскихъ и женскихъ. Изд. 2-е Спб. 1885. Ц. 80 к. (73)

— Собраніе вопросовъ задачъ и прямолинейной тригонометріи. Ц. 1 р. 50 к. Одобрено Уч. Комит. М. Н. Просв. для гимназіи и реальныхъ училищъ. (74)

Веселовскій, К. Отчетъ Импер. акад. наукъ по физико-математич. и историко-филологич. отдѣленіямъ за 1884 г. Спб. 1885. 8 д. (75)

Vestberg, H. Practisches Rechnenbuch. 14 — te Aufl. Митава. 1884. 8 д., 104 стр. (76)

Wie sind die Bell'schen und die Siemens'schen Telephone beschaffen und vorin unterscheiden sie sich von einander? Спб. 1884. 8 д. 6 стр. (77)

Вильгальмъ. Сборникъ ариѳметическихъ задачъ для изустныхъ и письменныхъ вычисленій. Ч. I. Цѣлыя числа. Спб. 1885. 8 д. Ц. 25 к. Ч. II. Дроби. Ц. 35 к. (78)

Вильдъ, Г. Лѣтописи главной Физической обсерваторіи. 1883. Ч. I. 8 д. (79)

— Лѣтописи Главной Физической Обсерваторіи издаваемыя Вильдомъ. 1883. Ч. II. Метеорол. наблюденія по международной системѣ станцій 2-го и 3-го разрядовъ въ Россіи. Съ картою. Спб. 1884. 4 д. (80)

Wild, H. Programm der Verhandlungen der vierten internationalen Polar Conferenz in Wien, am 17 April 1884. Спб. 1884. 4 д. 12 стр. (81)

— Observations sur les courants électriques, de la terre dans les lignes d'un kilometre de longueur et leurs comparaison avec les variations magnétiques. Спб. 8 д. 91—98 стр. (82)

Винклеръ, Я Э. Руководство къ ариѳметикѣ для старшихъ классовъ гимназій, реальныхъ и коммерческихъ училищъ и учительскихъ институтовъ. Часть I. Чистая ариѳметика. Нѣжинъ. 1884. 8 д. 116+2 нен. стр. Ц. 70 к. Ч. II. Прикладная ариѳметика. Нѣжинъ. 1884. 8 д. 138+1 нен. стр. Ц. 80 к. (83)

Висковатовъ, В. Краткій курсъ начальной физики въ объемѣ город. училищъ. Спб. 1885. 8 д. Ц. 50 к. (84)

Wittram, Th. Allgemeine Jupiterstorungen des Enke'schen Cometen für das Bahntheil zwischen 152° 21′ 7″, 62 und 170° wahren Anomalie. Eine zur Erreichung des Grades eines Magisters der Astranomie der physico-mathematischen Facultäts der Kaiserlichen Universität Dorpat vorlegerte Abhandlung. Спб. 1883. 4 д. 5 нен.+48 стр. (85)

Воейковъ, А. И. Климаты земнаго шара, въ особенности Россіи съ приложеніемъ 14 граф. таблицъ и 10 картъ. Спб. 1884. 8 д. Ц. 5 р. (86)

Воздушный корабль Ренара и Кребса. Д. П. Техникъ. 1884. № 54. стр 88. (87)

Войновъ, А. Биссекторы угловъ треугольника. Жур. Эл. Мат. 1884. 139—142. (88)

Воздухоплаваніе за 100 лѣтъ. Сообщенія, читанныя Рыкачевымъ, Спицынымъ, Филипенко и Кузьминскимъ въ техническомъ, географическомъ и физико-химическомъ обществахъ. Спб. 1884. 8 д. 35 стр. 6 план. и рис. (89)

Войславъ, С. Расчетъ и построеніе частей машинъ и передаточ. механизмовъ. Руков. для машинно-строителей, заводчиковъ, чертежниковъ, технич. и реально-учеб. заведеній. Съ атласомъ въ 76 табл. Спб. 1885. 8 д. (90)

Воленсъ, В. Руководство къ ариѳметикѣ. 13 изд. перес. испр. и доп. Спб. 1884. 8 д. IV+III+191 стр. Ц. 60 к. (91)

Волковъ, М. О поверхностяхъ круглыхъ тѣлъ. Спб. 1884. 8 д. 13 стр. (92)

Воронихинъ, А. А. Объ одной карточной задачѣ. Жур. Эл. Мат. 1884. 177—181. (93)

Воскресенскій, В. П. Начальная ариѳметика. (Собственно: методика начальной ариѳметики первой сотни). Кіевъ. 1884. 8 д. 168+1 нен. стр. (94)

Времясчисленіе у древнихъ и новыхъ народовъ. Съ объясненіемъ русскаго лѣтосчисленія и православной пасха·

лія и съ приложеніемъ цѣлаго пасхальнаго круга. Казань. 1884. 8 д. 2 нен. + III + II + 95 + 1 нен. стр. Ц. 75 к. (95)

Вулихъ, З. Краткій курсъ геометріи и собраніе геометрическихъ задачъ. Изд. 8-е. Спб. 1884. 8 д. 1 нен. + VI + XVIII + 186 стр. Ц. 80 к. (96)

Гано, А. Полный Курсъ физики съ краткимъ обзоромъ метеорологическихъ явленій. Переводъ съ 19-го французск. изд. Ф. Павленкова и В. Черкасова. Съ рис. 2-ая половина книги Изд. 5-ое. Спб. 1885. 8 д. 3 нен.+455—903+136+XV+1 нен. стр. Ц. 3 р. 50 к. (97)

Гартцъ, В. Руководство ариѳметики. Часть I. Цѣлыя числа. Спб. 1884. 8 д. XIII+170+III. (98)

Геде, Ѳ. Систематическій сборникъ ариѳметическихъ примѣровъ и задачъ на цѣлыя числа. Спб. 1884. 2 п. 8°. Ц. 40 к. (99)

Гедеоновъ. Объ опредѣленія времени въ меридіанѣ переноснымъ пассажнымъ инструментомъ. Спб. 1884. 4 д. 12 стр. (100)

Гезехусъ, Н. Амперометръ, основанный на электротерм. явленія Пельтье. Спб. 1884. 8 д. (101)

— Зависимость между силою свѣта и измѣненіемъ теплопроводимости селена. Спб. 1884. 8 д. 7 стр. (102)

Геометрія. Тифлисъ. 1884. 8 д. 168 стр. Цѣна 1 р. 20 к. (на армян. яз.) (103)

Гердъ, И. Собраніе ариѳметическихъ примѣровъ и задачъ съ краткими методическими замѣчаніями. Москва. 1885. т. 8° Ц. 25 к. (104)

Hermite, M. Ch. Sur quelques consequemes arithmetiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques (Mélanges Mathem. et astronom. tirés du Bull. de l'acad. imp. des sc. de St.-Petersb). Спб. 1884. 8 д. 247—286). (105)

Герцъ. К. М. Руководство прямолинейной тригонометріи въ объемѣ гимназическаго курса. 2-е изд. Варшава. 1884. 8 д. 3 нен.+133+2 нен. стр. 1 табл. Цѣна 1 руб. (106)

Гика, Д. Задачи для начальнаго обученія ариѳметикѣ. Цѣлыя числа. Изд. 2, испр. и дополн. Москва 1885. 8 д. XX+228 стр. Цѣна 45 коп. (107)

Гоберманъ, З. Я. Шеерисъ Яковъ. Объясненіе мѣстъ талмуда, трактующихъ объ астрономіи, Вильна. 1884. 4 д. 80 стр. (на еврейск. яз.). (108)

Гольдгаммеръ, Д. А. Термодинамическая поверхность воды (по Гиббсу и Фанъ-деръ-Ваальеу). Москва. 1884. 8 д. 76 стр. 5 табл. (109)

Гольдгаммеръ, М. Объ электрическомъ разрядѣ въ газахъ. Спб. 1884. 49 стр. 1 табл. черт. (110)

Грузинцевъ, А. П. О двойномъ лучепреломленіи въ связи съ свѣторазсѣяніемъ. Зап. Харьк. ун. 1882. Харьковъ. 1884. т. II. (111)

— Рѣшеніе основныхъ уравненій теоріи кристалической поляризаціи. Тамъ же т. IV. (112)

Грузовъ, Н. Сборникъ задачъ по дифференціальному исчисленію съ рѣшеніями. Къ курсу дифференціальнаго исчисленія, читаемому въ спб. техн. институтѣ профес. М. А. Красновскимъ. Спб. 1884. 8 д. 62 стр. (лит.) (113)

Гуржеевъ, С. Учебникъ механики. Курсъ средн. учебн. заведеній 2-е изд. Съ 199 политип. въ текстѣ и собраніемъ задачъ съ ихъ рѣшеніями. Спб. 1885. 8 д. Цѣна 1 р. 50 к. (114)

Давыдовъ, А. Начала тригонометріи. Изд. 3. Москва. 1884. 8 д. 166 стр. Цѣна 1 руб. (115)

Danielewicz, B. Z dziedziny statystiki matematycznej. Варшава. 1884. 4 д. 2 нен.+30 стр. Цѣна 40 коп. (116)

Даниловскій, А. Образцы черченія ситуацій съ объяснит. текстомъ. Изд. 2 е. Спб. 1885. 2 д. (117)

Devy. Электрическое освѣщеніе съ накаливаніемъ по системѣ Эдиссона. Инженеръ Кіевъ. 1884. № 6. стр. 238. (Изъ Revue Industrielle 1883). (118)

Джаксонъ. Нѣкоторыя статьи по девіаціи компасовъ. Спб. 1884. 8 д. 23 стр. (119)

Дубликъ, И. Для памяти, ученикамъ по диктовкѣ и ариѳметикѣ. Тельши. 1884. 12 д 26 стр. (120)

Дюгамель. Методика ариѳметики и алгебры. Перев. съ франц. Изд. 2. Вып. I. Спб. 1885. 12 д. 3 нен.+II+VIII+II+216+III стр. Цѣна 75 коп. (121)

Дюгамель Методика геометріи. Перев. съ француз. Изд. 2. Вып. II. Спб. 1885. 12 д. 2 нен.+II+109+1 нен.+II стр. Цѣна 70 к. (122)

Дю-Монсель, Теодоръ гр. Электромагниты. Перев. съ 2-го франц. изд. А. Щавинскій. Москва. 1885. 8 д. Ц. 1 р. (123)

Дѣйствія Императорскаго русскаго техническаго общества. Спб. 1885. 8 д. (124)

Евневичъ, И. Курсъ гидравлики. Лекціи чит. въ Спб. техн. инст. Ч. I. Вып. 1-й. Спб. 1885. 8 д. (125)

Евтушевскій, В. А. Руководство для учителей и учительницъ къ преподаванію начальной ариѳметики въ народныхъ школахъ. 5-е изд. Спб. 1884. 8 д. 208 стр. Ц. 75 к. (126)

— Сборникъ ариѳметическихъ задачъ и численныхъ примѣровъ для приготовительнаго и систематическаго курса. I часть. Цѣлыя числа 22-е изд. напечатано съ 14-го Спб. 1884. 8 д. 99+42+32 стр. Ц. съ отвѣтами 35 коп. 23-е изд. Спб. 1884. 8 д. 99+44+32 стр. Ц. 35 к. 24-е изд. Ц. 35 к. Часть II. Дроби. 13 изд. Спб. 1885. 8 д. 2 нен.+II+139+1 нен.+31 стр. Ц. 40 к. (127)

Егоровъ, Ѳ. И. Краткое руководство ариѳметики и собраніе задачъ, вычисленій и другихъ упражненій для начальнаго преподаванія. въ двухъ выпускахъ. Москва. Выпускъ I. Задачи вычисленія и другія упражненія въ предѣлѣ первой сотни чиселъ изд. 1-е 1884. Изд. 2-е. 1885 г. Выпускъ II. Ариѳметика цѣлыхъ чиселъ. 1884. Цѣна каждаго вып. 30 к. (128)
Журн. Элем. Мат. (Ермакова) 1884. № 8. 154.

Iędrzejewicz. Spostrzeżenia stacyi meteorologicenéj w Plonsky w gubernii Płockej za rok 1882. (Odbitka z Pamiętnika Fizjograficznego. T. III. 1883). Варш. 1883. 4 д. 18 стр. (129)

Езерскій, Ѳ. По вопросу о преподаваніи счетоводства въ начальныхъ училищахъ. Спб. 1883. 8 д. 16 стр. (130)

Das Einmaleins Dritter Abdruk. Митава. 1884. 8 д. 4 нен. стр. (131)

Ермаковъ, В. П. Журналъ Элементарной Математики. Выходитъ 1 и 15 числа каждаго мѣсяца, за исключеніемъ іюня, іюля и августа, номерами отъ 16 до 24 страницъ. Срокъ изданія и подписки считается съ 1-го сентября по 1-ое іюля. Цѣна

Заборщиковъ, В. Алгебра, тригонометрія и астрономія въ предѣлахъ програмы мореходныхъ классовъ. Москва. 1884. 8 д. IV+225 стр. II карты. (164)

Задача Эйлера и волшебные квадраты (съ прилож. 18 лис. черт. и табл.) М. Ф. Спб. 1884. 8 д. 54+1 нен. стр. Ц. 1 р. 50 к. (165)

Занчевскій, И. М. О трехшестной сочленeной системѣ. Одесса. 1884. 8 д. 12 стр. (166)

Зворыкинъ, Н. А. Изслѣдованіе о психрометрѣ. Москва. 1884. 8 д. 65 стр. (167)

Зефковъ, О. Таблицы для измѣренія дерева въ брусьяхъ и доскахъ, переведенныя на квадратные футы и дюймы, одного дюйма толщины. Спб. 1884. 2 д. 101 нен. стр. Ц. 10 р. (168)

Зиловъ, П. Двѣ замѣтки изъ элементарной оптики. Спб. 1884. 8 д. 6 стр. (169)

Зининъ, Н. Функція гамма и функція омега. Варшава. 1884. 8 д. 86 стр. (170)

Зубчатыя ресорныя колеса. (Системы Bucley и Taylor). Техн. 1884. № 44. Стр. 9. (171)

Ивантеръ А. Новая съ прирастающими буквами русская азбука съ прописями, ариѳметическими задачами и численными примѣрами. Для евреевъ. Вильна. 1884. V+106+1 нен. стр. Цѣна 15 коп. (172)

— Первая дорожка къ грамотѣ. Новая съ прирастающими буквами русская азбука въ связи съ прописями, ариѳметическими задачами и численными примѣрами. Рига. 1884. 8 д. V+106+1 нен. стр. (173)

Игнатьевъ, Г. Галваническій элементъ «Митральеза». Инжен. Журн. 1884. № 8. стр. 97. (174)

Извѣковъ, Д. П. Основныя правила приближеннаго вычисленія. Жур. Эл. Мат. 1884. 129—139. (175)

Извѣстія Спб. практическаго технологическаго института за 1883, 1884 г. Спб. 1884. 8 д. (176)

Изданія Императорской академіи наукъ, вышедшія въ свѣтъ въ новѣйшее время. Спб. 1883. 8 д. 15+1 нен. стр. (177)

Измѣреніе температуры при помощи телефона. Техн. 1884. № 59. стр. 168. (178)

Износковъ, И. О памятникахъ народной математики. Каз. 1884. 8 д. (179)

Израилевъ, А. Акустическій приборъ для точнаго опредѣленія числа колебаній звучащихъ тѣлъ. Спб. 1884. 8 д. 7 стр. (180)

Имшенецкій В. Г. О неравенствахъ ограничивающихъ величину опредѣленнаго интеграла отъ произведенія функцій. Зап. Харьк. ун. 1882 г. Харьковъ. 1884. Т. IV. (181)

— О связи основныхъ свойствъ эллиптическихъ интеграловъ и функцій со свойствами элипса и нѣкоторыхъ его преобразованій. Приложеніе къ XLVIII т. Зап. импер. акад. н. № 5. Спб. 1884. 8 д. 2 нен.+43 стр. Ц. 20 к. (182)

Іоаннисянцъ, А. И. и **Цейтлинъ**, А. Г. Учебникъ линейнаго черченія (Серія элементарныхъ учебниковъ I). Тифлисъ 1884. 8 д. 3 нен.+44 стр. и атл. черт. Ц. 1 р. (183)

Какъ става деньтъ и нощьта, както и годишнитѣ врѣмена: пролѣть, лѣто, осень и зима. Прѣвелъ и допълнилъ. С. 'Гулабчевъ. Издава Киевский клонъ на «Приятелската Дружина». Кіевъ. 1884. 8 д. II+50 стр. Ц. 50 к. (184)

Kalendarz astronomiczno-ziemiański na rok zwyczajny 1885. Rok XVII. Варшава. 1884. 4 д. 64. (185)

Канонниковъ, И. И. Списокъ книгъ, имѣющихся въ библіотекѣ Императорскаго Казанскаго университета по химіи, физикѣ и технологіи. Казань. 1884. 8 д. 61 стр. (186)

— О соотношеніяхъ между составомъ и свѣтопреломляющей способностью химическихъ соединеній. Ч. I. Органическія соединенія. Казань 1883. 8 д. 111 стр. (187)

— По поводу замѣчаній проф. Колли на мою работу о свѣтопреломляющей способности химическихъ соединеній. Дополненіе. Казань 1884. 8 д. 8 стр. (188)

— О свѣтопреломляющей способности химическихъ соединеній. Казань 1884. 12 д. 222 стр. (189)

См Колли, Р.

Каценелленбогенъ, С. А. Разсчетная книга или таблицы, показывающія: а) уплату за вещи, пріобрѣтенныя вѣсомъ, мѣрою или по штучно; б) заработокъ поденныхъ рабочихъ съ прибавкою за лишній трудъ и в) разсчетъ служащимъ при ихъ увольненіи. Спб. 1884. 8 д. XXIV+1 нен.+88 стр. Ц. 75 к. (190)

Кирпичниковъ, С. М. О водомѣрахъ. Кіевъ. 1884. 8 д. 33 стр. 2 табл. черт. (191)

Клаузіусъ, Р. Связь между великими дѣятелями природы. Рѣчь Р. Клаузіуса, произнесенная при вступленія въ должность ректора Боннскаго университета 18 октября 1884 года Переводъ съ нѣмецкаго И. Крассовскаго. Жур. Эл. Мат. 1884. 209—214. (192)

Киселевъ, А. Систематическій курсъ ариѳметики для среднихъ учебныхъ заведеній. Спб. 1884. 8 д. VIII+IV+296 стр. Ц. 1 р. (193)

Журн. Элем. Мат. 1884. № 2. 44.

Клейберъ, О. А. Астрономическая теорія падающихъ звѣздъ. Изд. Импер. Спб. университета. Спб. 1884. 8 д. 3 нен. +215 стр. (194)

Собр. Прот. Секц. физ.-мат. наукъ общ. естествоис. при Каз. ун. № 5 (янв. 1884 г.) стр. 79.

Клоссовскій, А. В. Къ ученію объ электрической энергіи въ атмосферѣ (Грозы въ Россіи). Изъ XL т. Зап. Им. Новор. ун.). Одесса 1884. 8 д. 5 картъ. (195)

— Отчетъ о наблюденіяхъ, произведенныхъ на метеорологической станціи Новороссійскаго университета отъ 1-го декабря 1882 г. по 1 декабря 1883 г. (новаго стиля). (Изъ XXXVIII т. Зап. Имп. Новорос. ун.). Одесса 1883. 8 д. 4 стр. (196)

— Наблюденія надъ температурою почвы въ Елисаветградѣ. Одесса. 1884. 8 д. 15 стр. (197)

Ковальскій, А. М. А. Ковальскій (1821—1884). Казань. 1884. 8 д. (198)

Ковальскій, Я. Н. Сборникъ первоначальныхъ опытовъ, при помощи которыхъ можно познакомить дѣтей съ самыми простыми физическими и химическими явленіями. Пособіе для учителей народныхъ школъ, а также для родителей и воспитателей. Спб. 1885. г. 8 д. 2 нен.+V+1 нен.+275+1 нен. стр. Ц. 2 руб. (199)

Ковальскій, М. Графическій способъ опредѣленія азимута и высоты полярной звѣзды. Каз. 1884. 8 д. (200)

Коверскій, Э. А. Лекціи геодезіи, читанныя въ технологическомъ институтѣ. Съ атласомъ чертежей. Спб. 1884. 8 д. 382. Стр. VII таб. черт. (201)

Козловъ, А. А. Генезисъ теоріи пространства и времени Канта. (Оттискъ изъ «Унив. Извѣст.» 1883). Кіевъ. 1884. 8 д. 2 нен.+VI+2 нен.+264+II стр. Ц. 2 р. (202)

Коллекція приборовъ для доказательства основныхъ законовъ механики и устройства простыхъ машинъ А. Ильина. Спб. 1884 in 4°. (203)

Колли, Р. Нѣсколько замѣчаній по поводу статьи г. Канонникова «О соотношеніяхъ между составомъ и свѣтопреломляющей способностью химическихъ соединеній, часть I. Органическія соединенія». (Изъ извѣстій и ученыхъ записокъ казанскаго университета). Казань. 1884. 8 д. 15 стр. (204)

См. Канонниковъ, И. И.

— Нѣсколько словъ по поводу отвѣта г. Каннояикова на мои замѣчанія касательно его статьи о свѣтопреломляющей способности химическихъ соединеній. Казань. 1884. 8 д. 5 стр. (205)

Кометы. Изъ 274 № «Русск. Вѣдом.» за 1884 г. Москва. 12 д. 30 стр. (206)

Конашевичъ, Е. Опытъ систематизаціи ариѳметическихъ задачъ. Москва. 1884. 8 д. Ц. 60 к. (207)

Кановаловъ, Д. М. Объ упругости пара растворовъ. Спб. 1884. 8 д. 2 нен. + 74 + 1 нен. стр. 1 стр. черт. (208)

Компенсированный маятникъ. Техн. 1884. № 59, стр. 166. (209)

Конради, А. Гидравлическіе двигатели для сельско-хозяйственной и мелкой фабричной промышленности. Спб. 1884. 8 д. 2 нен. + 25 стр. 2 табл. черт. (210)

Корибутъ-Дашкевичъ, В. О. О новѣйшихъ открытіяхъ въ области звука. Публ. лекція, чит. 20-го апрѣля 1881 г. въ залѣ Псковскаго реальн. учил. Псковъ. 1882. 8 д. 2 нен. + 25 стр. (211)

Коссакъ, Е. Основы ариѳметики. Историческій очеркъ введенія въ ариѳметику различнаго рода чиселъ (дробныхъ, несоизмѣримыхъ, отрицательныхъ и мнимыхъ) и современно-научная на этотъ предметъ точка зрѣнія. Переводъ И. Крассовскаго. Ц. 50 к. 1885. Было приложеніемъ къ Жур. Элем. Мат. (Ермакова) 1884. № 6, 7, 8, 11. (212)

Котельниковъ, Е. Г. Елементарный курсъ механики. Руководство для реальныхъ, техническихъ и другихъ училищъ. Изд. 4-е вновь пересм. и испр. Москва. 1884. 8 д. VIII+451+1 нен. стр. Ц. 3 р. (213)

Котляревскій, П. Н. Гидрографъ, приборъ для опредѣленія скорости движенія воды или хода судна. Описаніе и теорія. Спб. 1884. 8 д. 13 стр. Ц. 20 к. (214)

См. Бастамовъ.

Краевичъ, К. Новые выводы условія наименьшаго отклоненія лучей въ призмѣ. Спб. 1884. 8 д. 6 стр. (215)

— О зависимости между упругостью и плотностью газа въ разрѣженномъ состояніи. (Предварительное сообщеніе). Спб. 1884. 8 д. 4 стр. (216)

— Лекціи по механической теоріи теплоты. Спб. 1884. 8 д. 61 стр. (217)

— Физика ежедневныхъ явленій. Для низшихъ учеб. зав. 2-е изд. Спб. 1885. 8 д. (218)

— Теплородъ. Лекціи физики, чит. на III кур. горн. инст. въ 1884—1885 г. Сост. и изд. О. Плонскій. (219)

Красновскій, М. Интегральное счисленіе. Лекціи читан. въ Спб. техн. инст. Спб. 8 д. (220)

Крассовскій. Основы ариѳметики. См. Е. Коссакъ. (221)

Краткій повторительный курсъ физики. Ч. II. Спб. 1884. 16 д. 165+5 нен. стр. 4 табл. рис. Ц. 50 к. (222)

Krol, K. Słownik-naukowy rosyjsko-polski dla uczniów i uczennie ułożył K. Krol. Варшава. 1884. 8 д. 211 стр. Ц. 60 к. (223)

Крутицкій, П. Я. Гальваническая батарея и электрическія лампы для научныхъ цѣлей. Спб. 1884. 8 д. 7 стр. (224)

Кудрявцевъ, М. Н. Ариѳметика на счетахъ. Москва. 1884. 8 д. 110+II+I нен. стр. Ц. 80 к. (225)

Кунцевичъ. Теорія геометрическихъ величинъ съ методическими и критическими замѣчаніями. Спб. 1884 in 8. Ц. 70. (226)
Журн. Элем. Мат. 1884. № 2. 46.

— Опытъ новаго введенія въ геометрію; пособіе для учащихся. Спб. 1884. Ц. 30 к. in 8. (227)
Журн. Элем. Мат. 1884. № 2. 45.

— Теорія Геометрическихъ величинъ съ методическими и критическими замѣчаніями. Спб. 1884. Ц. 1 р. 50 к. (228)

Куррикъ, И. Дѣтская ариѳметика. III. Дроби: Дерптъ. 1884. 8 д. 68 стр. (на эстонскомъ яз.). (229)

Купреяновъ, В. Приложеніе механики къ минному дѣлу. Курсъ мин. офиц. класса. Спб. 1884. in 8°. (230)

Курсъ водостоковъ читанный въ иститутѣ гражданскихъ инженеровъ въ 1883—1884 г. Спб. 1884. in 8°. (231)

— Кинематики, читанный въ институтѣ гражданскихъ инженеровъ въ 1883—1884 г. Спб. 1884. 8 д. 2 нен + 111 стр. (232)

— Динамики, читанный въ институтѣ гражданскихъ инженеровъ, читанный въ 1883—1884 г. Спб. 1884. 8 д. 2 нен. +184 + 52 + 2 нен. стр. (233)

Къ вопросу о пользованіи даровыми силами природы. Д. П. Техникъ. 1884. № 50 стр. 18. № 51 стр. 38. № 52 стр. 51. (234)

— о передачѣ силы на разстоянія. Техникъ. 1884. № 54 стр. 83. (235)

Латышевъ, В. Учебникъ ариѳметики (въ объемѣ курса младшихъ классовъ гимназій). 2-е изд. испр. Спб. 1884. 8 д. 2 нен.+106+2 нен. стр. Ц. 35 коп. (236)

Лаубе, И. Ариѳметика. Рига. 1884. 8 д. IV+252 стр. (на латышск. яз.) (237)

Леве, А. А. Приближенныя вычисленія надъ десятичными дробями. Спб. 1884. 8 д. 23 стр. (238)

— Курсъ ариѳметики и собраніе ариѳметическихъ задачъ. 17-е изд. соверш. перед. Спб. 1884. 8 д. 208+171+1 нен.—23 стр. Ц. 1 р. (239)

— Теорія періодическихъ десятичныхъ дробей. Педаг. Сборн. 1885. № 1. (240)

Левшинъ, А. Методъ геометрическихъ мѣстъ. Жур. Эл. Мат. 1884. 147—150. (241)

— Учебникъ геометріи. Ц. 50 к. (242)

Лейкснеръ, О. Нашъ вѣкъ. Общій обзоръ важнѣйшихъ явленій въ области исторіи, искусства, науки и промышленности послѣдняго столѣтія, со множествомъ портретовъ, рисунковъ, автографовъ и другихъ иллюстрацій. Изданіе Суворина. Спб. 1884. 8 д. Выпуски 47—62. Ц. 35 к. за вып. (243)

Leyst, E. Untersuchung über die erdmagnetische Horisontalintensität in der Umgegend des Observatoriums zu Pawlowsk. Спб. 1884. 4 д. 15 стр. (244)

Lehnhold, A. Elementar Cursus der Algebra für Schüler III und IV classe. Москва. 1884. 8 д. 162 стр. Ц. 1 р. 25 к. (245)

Lenz, R. Etudes électrometrologiqus III. Recherches sur l'influence exercée par les surfaces des électrodes sur la resistance d'un etalon à mercure. Спб. 1884. 8 д. 2 нен.—19 стр. (246)

Ленцъ, Р. Э. Электро-химическія изслѣдованія. Спб. 1884. 8 д. 102 стр. (247)

Lenz, R. Uber die Anvengung des Telephons zu Temperatur messungen (Mel. phys. et chim. tirés du Bull. de l'acad. Imp. des sciences de S.-Petersb.). Спб. 1884. 8 д. 99—106. (248)

— Et **Restzoff** N. Etudes électrométrologiques. II. De l'influence de la temperature sur la resislance du mercure. Спб. 1884. 8 д. 2 нен.+42 стр. (249)

Ленцъ, Д. Е. О зависимости гальваническаго сопротивленія ртути отъ давленія, подъ которымъ она находится (оттискъ изъ «Извѣстій технологическаго института» 1884) Спб. 1884. 8 д. 9 стр. (250)

Ленцъ, Р. Электрометеорологическія изслѣдованія. Спб. 1884. 8 д. (251)

Лермонтовъ, В. Шихтмейстеръ И. И. Ползуновъ и машина построенная имъ въ 1763 въ г. Барнаулѣ. Новые документы къ исторіи паровой машины, открытые Н. Воейковымъ. Спб. 1884. 8 д. 5 стр. (252)

Лигинъ, В. Н. Отзывъ профессора В. Н. Лигина о трехъ сочиненіяхъ на тэму «Кинематическая теорія сложныхъ цирку-

лей» поданныхъ въ 1883 г. въ физико-математическій факультетъ для соисканія медалей. Одесса. 1884. 8 д. 18 стр. (253)

— Засѣданіе одес. отд. Имп. рус. техн. общ. 27 февраля 1884 г. Инсоляторъ Эриксона и его примѣненіе къ опредѣленію температуры солнца. Одесса. 1884. 8 д. 2 стр. (254)

— Зас. одес. отд. Имп. рус. техн. общ. 13-го февр. 1884 г. — Обезтопочныхъ паровыхъ машинахъ Гонигмана. Одесса. 1884. 8 д. 4 стр. (255)

— Наблюденія надъ полезнымъ дѣйствіемъ инсоляторовъ. Кіевъ. 1884. 4 д. 3 стр. Оттискъ изъ Инженера (Кіев.) 1884. № 1, 22 стр. (256)

— Лекціи прикладной кинематики. Теорія зубчатыхъ колесъ. Одесса. 1884. 4 д. 60 стр. (257)

Линдеманъ, Э. Замѣтка о жизни и ученыхъ трудахъ. И. А. Ковальскаго. Казань. 1884. 8 д. (258)

Литвинова, Е. Къ «Логикѣ математическихъ наукъ». Педаг. Сборн. 1885. № 4. (259)

Литвинскій. Наблюденіе звѣздъ изъ окна. Родн. 1885. № 1, 2, 3. (260)

Луахъ гашніатъ. Моментъ захожденія солнца. Вильна. 1884. Infolio. (на еврейск. яз.) (261)

Лубенецъ, Т. Сборникъ ариѳметическихъ задачъ, заключающихъ въ себѣ данныя преимущественно изъ сельскаго быта. 1812 задачъ и болѣе 3500 численныхъ примѣровъ. Изд. 3 испр. Спб. 1884. 8 д. 209+1 нен. стр. Ц. 40 к. (262)

Лукашевичъ, П. Изложеніе главныхъ законовъ естественной и наблюдательно-микроскопической астрономіи. Часть I. Кіевъ. 1884. 8 д. 512+1 нен. стр. (263)

Лыткинъ. О тембрѣ звуковъ. Лекціи с.-петерб. консерв. Спб. 1884. 2 д. 5 стр. (лит.). (264)

Лѣтниковъ, А. В. Объ опредѣленныхъ интегралахъ содержащихъ функціи, удовлетворяющія гипергеометрическому уравненію. Изд. моск. мат. общ. состоящаго при импер. моск. ун-тѣ. Москва. 1884. 8 д. 88 стр. (265)

Ляпуновъ, А. Объ устойчивости эллипсоидальныхъ формъ равновѣсія вращающейся жидкости. Разсужд. на степ. магистра прикладн. математики. Спб. 1876. 4 д. (266)

Л. Л. Л. Краткій указатель русской литературы по вопросу о воздухоплаваніи. Спб. 188. 8 д. 8 стр. (267)

Лѣтописи главной физической обсерваторіи изд. Г. Вильдомъ, 1883 годъ Ч. 1-я метеорологическія и магнитныя наблюденія станцій 1-го разряда и экстраординарныя наблюденія станцій 2-го разряда. Спб. 1884. in. 4⁰. (268)

Мазингъ, К. Сборникъ задачъ по математикѣ для испытанія зрѣлости въ гимназіяхъ. Изд. 2-е допол. Москва. 1884. 8 д. 72 стр. (269)

Макаровъ, Н. Построеніе перспективъ точекъ, линій и плоскихъ фигуръ, лежащихъ на наклонныхъ плоскостяхъ, безъ выстраиванія вспомогательныхъ ортогональныхъ проекцій. (Оттискъ изъ Извѣс. Техн. Инст. 1883). Спб. 8 д. 20 стр. 5 таб. чер. (270)

— Начертательная геометрія. Изд. 2-е. Вып. 2, 3 и послѣдній. Спб. 1884. 8 д. 2 нен.+XXII+426 стр. Ц. 4 р. (271)

— Чертежи къ начертательной геометріи. Вып. 2, 3 и послѣдній. Изд. 2. Спб. 1884. 4 д. табл. 22—92. (272)

Максимовичъ, В. П. Новая теорія гамильтоновыхъ паръ и соотвѣтственное обобщеніе теоріи функцій мнимаго перемѣннаго. Прил. къ прот. 35 зас. секц. физ. мат. наук. общ. естествоисп. при Каз. ун. 1884. (273)

Макъ-Гаханъ, В. Университетъ не въ европейскомъ смыслѣ. Новь № 1. (274)

Маленькій нивеллировщикъ и о разведеніи рыбъ въ садкахъ. Дерптъ. 1884. 8 д. 60 стр. 34 рис. (на эстонскомъ яз.). (275)

Маленькій паровой двигатель Геинрици (для швейныхъ и др. малыхъ машинъ). Техникъ. 1884. № 58 стр. 146. (276)

Малининъ, А. Курсъ физики для женскихъ учебныхъ заведеній. Изд. 5. 1884. 8 д. 298 стр. Ц. 1 р. 25 к. (277)

— Задачи для умственныхъ вычисленій. Изд. 3. Москва. 1885 (1884) Ц. 35 к. (278)

Малининъ, А. и **Буренинъ**, К. Собраніе ариѳметическихъ задачъ для гимназій и прогимназій, мужскихъ и женскихъ реальн. уѣзд. и город. училищъ, учительск. институтовъ и семинарій. Изд. 17. М. 1885. 8 д. Ц. 50 к. (279)

— Руководство алгебры и собраніе алгебраическихъ задачъ для гимн. реальн. уч. и учит. инст. Изд. 7. М. 1884. 8 д. (280)

— Ариѳметика. Изд. 15. Москва. 1884. 8 д. 207 стр. (281)

Мамышевъ, К. Начала начертательной геометріи. Руководство для реальныхъ училищъ. Изд. 4. Спб. 1884. 8 д. 4 нен. + 65 стр. X лист. черт. (282)

Мануйловъ, А. Приближенное счисленіе. Кишиневъ. 1884. Ц. 1 р. 50 к. (283)

Журн. Элем. Мат. 1884. № 2. 45.

Маракуевъ, Н. Ньютонъ, его жизнь и труды М. 1885. 8 д. Ц. 20 к. (284)

Марковъ, А. Введеніе въ анализъ. Лекціи. Спб. 1884. 8 д. 396 стр. (лит.). (285)

— О нѣкоторыхъ приложеніяхъ алгебраическихъ непрерывныхъ дробей. Спб. 1884. 8 д. 380. (286)

— Лекціи по теоріи конечныхъ разностей, читан. въ Спб. унив. Спб. 1884. 8 д. (287)

Мартыновъ, Д. Ариѳметика. Систематическій учебникъ для низшихъ и среднихъ учебныхъ заведеній. 2 тщат. испр. изд. Москва. 1884. 8 д. 173 + 1 нен. стр. 70 к. (288)

— Задачникъ для начальнаго обученія ариѳметикѣ. Москва. 1885. 8 д. VIII + 162. Ц. 40 к. (289)

— Чѣмъ и какъ замѣнить нашъ нѣмецкій методъ обученія ариѳметикѣ въ начальной школѣ. М. 1884. 8 д. 16 стр. (290)

— Методика ариѳметики для начальной школы и вообще для начальнаго обученія. М. 1884. 8 д. VX + 100 стр. 60 к. (291)

Масляниковъ, К. Н. Барометръ и способы раціональнаго пользованія имъ вообще въ сельскомъ хозяйствѣ. Спб. 1884. 8 д. 4 нен. + II + 12 стр. Ц. 35 к. (292)

Медеръ, Н. О томъ, какого вида земля и какъ она велика. Отчего бываетъ день и ночь, весна, лѣто, осень и зима. Два чтенія для народа. Изд. 3. Спб. 1884. 8 д. Ц. 20 к. (293)

Мейеръ, А. и **Барнаръ**. Свѣтъ. Рядъ простыхъ занимательныхъ и не дорогихъ опытовъ, имѣющихъ предметомъ явленія свѣта. Для всѣхъ возрастовъ. Съ 29 рис. Перев. съ англ. М. Антоновича. Спб. 1884. 8 д. 3 нен.+84 стр. Ц. 75 к. (294)

Melanges physiques et chimiques, tirés du Bulletin de l'academie Imperiale des Sciences de St.-Petersbourg. Tome XII. Livraison 1 et 2. Спб. 1884. 8. 3 нен.+187 стр. 1 табл. Ц. 50 к. (295)

— Mathematiques et astronomiques du Bulletin de l'academie Impériale des sciences de St.-Petersbourg. T. VI. Livraison 2. Спб. 1884. 8 д. 3 нен.+157—286 стр. T. VII. Ueber die anwendung einer von P. Tschebyschew vorgeschlagenen Interpolationsmentpode. Von O. Backlund. Спб. 1884. 8 д. 287—315 стр. (299)

Менделѣевъ, Д. Разширеніе жидкостей. Спб. 1884. 8 д. 10 стр. (297)

— О разширеніи жидкостей въ связи съ ихъ температурою обсолютнаго кипѣнія. Замѣтка въ отвѣтъ на статью М. Авенаріуса. Спб. 1884. 8 д. 10 стр. (298)

— Еще объ расширеніи жидкостей (отв. проф. Авенаріусу). Спб. 1884 in 8°. Кн. В. 1884. 917. (299)

— Объ отношеніи плотности соляныхъ растворовъ къ частичнымъ вѣсамъ растворенныхъ солей. (Изъ проток. зас. хим. общ. 2-го февраля 1884. Ж. Р. Ф. Х. Об. т. XVI вып. 2). Спб. 1884. 8 д. 4 стр. (300)

Мерчингъ, Г. О методахъ опредѣленія длины свѣтовыхъ волнъ. Изслѣдованіе. Варшава. 1884. 8 д. 2 нен.+II+151+II+1 нен. ст. 3 діаграмы. (301)

Мининъ, А. О наименьшемъ числѣ имѣющемъ данное число дѣлителемъ. Москва. 1884 in 8°. Ц. 20 к. (302)

Mittheilungen der internationalen Polar-Commission. Fünftes Heft. (на фран., нѣмец. и англ. яз.) Спб. 1884. 4 д. 161 — 214 стр. Ц. 25 к. Sechstes Heft. 4 д. 215—334. Ц. 50 к. (303)

Moser, I. Dr. Theoria i kombinacye interessow terminowych. Spolszczyl N. Krakowski, urzędnik Banku handlowego w Warszawie. Варшава. 1884. 8 д. 2 нен. + II + 100 стр. XXI таблица. Ц. 2 р. (304)

Мысли Дюринга о реформѣ началъ математики. Перев. съ нѣм. Н. Маракуевъ. М. 1885. 8 д. Ц. 20 к. (305)

Мясоѣдовъ, А. Двѣ теоремы высшей алгебры. Москва. 1884. (306)

Назимовъ, П. О суммѣ чиселъ, взаимно-простыхъ съ даннымъ числомъ N и не превышающихъ другое число Р. М. 1884. 8 д. (307)

— О приложеніяхъ теоріи элиптическихъ функцій къ теоріи чиселъ. М. 1885. 8 д. (308)

Надеждинъ, А. О теплоемкости жидкостей. Спб. 1884. 8 д. 16 стр. (309)

Наставленіе къ дождемѣру (описаніе, установка и способъ наблюденія). Спб. 1883. 8 д. 4 стр. (310)

Невскій. Полный курсъ ариѳметики. Историческій очеркъ. Ч. I. Москва. 1884. 8 д. 134 стр. Ц. 70 к. (311)

— Полный курсъ ариѳметики. Историческій очеркъ. Моск. 1884. 8 д. 42 стр. (312)

Немолодышевъ, В. А. Задачи по начертательной геометріи. Курсъ реальнаго училища. Москва. 1884. 8 д. 40 стр. Ц. 40 к. (313)

Николаи. Прибавленіе къ курсу строительной механики. О парахъ силъ. Спб. 1884. 8 д. LXXVII стр. (литогр.) (314)

Никольскій, Д. Самыя полныя и точныя таблицы для вычисленія процентовъ при учетѣ векселей и друг. цѣнностей, при ссудахъ, при процентныхъ вкладахъ и проч., составленныя по десятичной системѣ. Спб. 1884. 8 д. 1 нен.+IV+181+2 нен. стр. Ц. 2 р. (315)

Никульцевъ, П. Произведеніе нѣсколькихъ чиселъ. Жур. Эл. Мат. 1884. 107—109. (316)

— Ариѳметика. Курсъ среднихъ учебныхъ зеведеній. М. 1885. Ц. 80 к. (317)

— Методъ геометрическихъ мѣстъ. Ж. Э. М. 1884. 171 —174. (318)

— Образцы рѣшенія ариѳметическихъ задачъ. Пособіе для учащихся. Ц. 20 к. (319)

— Алгебра и собраніе алгебраическихъ задачъ. Въ двухъ выпускахъ. Ц. каждаго выпуска 80 к. (320)

Новая батарея Зауера, дѣйствующая подъ вліяніемъ солнечнаго свѣта. Техн. 1884. № 51, стр. 49. (321)

Новиковъ, П. О найвыгоднѣйшемъ соединеніи галваническихъ элементовъ въ батареи. Спб. 1884. 8 д. 9 стр. (322)

— Признакъ устойчивости движенія и его связь съ однимъ изъ признаковъ maxim'a и minimum'a простаго опредѣленнаго интеграла. Одесса. 1884. 8 д. 8 стр. (323)

Новоизобрѣтенный механическій самодвигатель. Съ 8 черт. Псковъ. 1885. 8 д. Ц. 30 к. (324)

Новые галваническіе элементы для электрическаго освѣщенія. Техникъ. 1884. № 54 стр. 90. (325)

П. **Новый** галваническій элементъ*). Техникъ. 1884. № 57. стр. 132. (326)

— Гальваническій элементъ Томази и Радиге. Техникъ. 1884. № 58, стр. 148. (327)

П. **Новый** громоотводъ (Грене). Техникъ. 1884. № 58, стр. 148. (328)

— Русскій букварь заключающій азбуку, чтеніе по складамъ, разсказы, басни въ стихахъ, начальныя понятія изъ ариѳметики, самонужнѣйшія молитвы символъ вѣры и десять заповѣдей. Вильна. 1884. Т. 12-й. (329)

П...ій, Д. Новый счетчикъ электрической энергіи. Техникъ. 1884. № 51, стр. 44. (330)

Nouveaux mémoires de la Sociètè Imperiale des naturalistes de Moscou, Tome XV formant le tome XXI de la collection. Livraison I Avec 8 planches. Москва. 1884. 4 д. 38+9 нен. стр. (331)

Обреимовъ, В. И. Математическіе софизмы. Составлен. по разнымъ источникамъ, съ 20 рисунками въ текстѣ. 1-е прибавленіе къ Математическимъ развлеченіямъ Люкаса». Спб. 1884. 8 д. 4 нен.+59 стр. Ц. 40 к. (332)

— Тройная головоломка. Сборникъ геометрическихъ игръ съ 300 рисунками въ текстѣ. 2-е прибавленіе къ «Математическимъ развлеченіямъ» Люкаса. Спб. 1884. 8 д. 80 стр. Ц. 75 к. (333)

*) Piatти состоящій изъ двухъ различно нагрѣтыхъ трубокъ и не поляризирующійся.

О газовомъ топливѣ. Техн. 1885. № 66. (334)

Одновременное телефонированіе и телеграфированіе по телеграфнымъ проволокамъ. Техн. 1884. № 59 стр. 168. (335)

О коловратныхъ машинахъ. Техникъ. 1884. № 56, стр. 111. № 57, стр. 127. (336)

Олиферовъ, П. Уроки по ариѳметикѣ (на русскомъ и греческомъ языкѣ). Кутаисъ. 1884. 8 д. 28 стр. (337)

Онацкій, Д. А. Легкій и вѣрный способъ сложенія, умноженія и дѣленія. Кіевъ. 1894. 12 д. 8 нен. стр. Ц. 5 к. (338)

— Паровая машина и телеграфъ. Общедоступное изложеніе устройства паровой машины и телеграфа. Съ 56 рис. въ текстѣ. Кіевъ. 1884. 8 д. 52 стр. (339)

— Употребленіе счетной таблицы. Кіевъ. 1884. 4 д. 2 нен. стр. (340)

О преподаваніи ариѳметики въ начальной школѣ. Каз. 1884. 8 д. 4 стр. (341)

— элементарной физики. Прибавленіе къ «Физикѣ по Крюгеру». (Для учителя). 3-е испр. изд. Спб. 1885. Ц. 15 к. (342)

Опыты надъ передачею силы посредствомъ электричества. С. Инженер. журналъ. 1884. № 2, стр. 21. (Изъ Giornale del genio Civile, dicembre. 1883). (343)

О работѣ газовыхъ двигателей. М. Техникъ. 1884. № 57, стр. 133. (344)

Орловъ, Ѳ. Е. О квадратурѣ рулеттъ. Изд. Моск. матем. общ. состоящ. при Имп. моск. унив. М. 1884. 8 д. 60 стр. (345)

— Изъ теоріи рулеттъ. Од. 1884. 8 д. 14 стр. 1 табл. черт. (346)

О сгущеніи газовъ. Техникъ. 1884. № 47. стр. 7. (347)

Осинскій. Аналитическая механика. Курсъ Миннаго офицерск. класса, сост. по лекц. читан. лейтен. П. Гавриловымъ. Спб. 1885 г. 8 д. (лит.) (348)

О скорости поршня горизонтальныхъ паровыхъ машинъ. Техникъ. 1884. № 54, стр. 94. (349)

Острогорскій, А. Матерьялы по методикѣ геометріи. По-

собіе для начинающихъ преподавателей. Спб. 1884. 8 д. 3 нен.+175+1 стр. Ц. 1 р. (350)

Отзывы печати о приборѣ Поля. Вил. 1884. (351)

Отчетъ Императорской академіи наукъ по физико-математическому и филологическому отдѣленіямъ за 1883 годъ, читанный въ публичномъ засѣданіи академіи 29-го декабря 1883 г. ординарнымъ академикомъ и непремѣтнымъ секретаремъ К. С. Веселовскимъ. Спб. 1884. 8 д. 29 стр. (352)

Отчетъ по главной физической обсерваторіи за 1881 и 1882 г. Спб. 1884 г. т. 8⁰ Ц. 60 к. (353)

Опыты надъ газовыми двигателями системы Отто. Перев. П. К. Бульковскаго, Инженеръ (Кіев.) 1884. № 6, стр. 241. (Изъ Revue Industrielle. 1683). (354)

О функціяхъ. Лекціи. Спб. 1884. 8 д. 118 стр. (лит.) (355)

Пальшау, А. Начала механики. Курсъ реальныхъ училищъ. Харьковъ.—Вып. I. Кинематика и статика. 1884. Ц. 1 р. 50 к. Вып. II. Динамика и теорія машинъ (печатается). (356)
Журн. Элем. Мат. (Ермакова) 1884. № 8. 153.

Pamiętnik fizyograficzny. Tom IV. Варшава. 1884. 4 д. 4 нен.+IV+437+8 нен. стр. (357)

Pahnsch, I. Leitfaden für den Unterricht in der Rechnen. 4-e verbess. Aufl. Ревель 1884. 8 д. IV+190+2 нен. стр. (358)

Паровая машина системы Фридрихъ. Техн. 1884. № 54, стр. 22. (359)

Пароменскій, А. Криволинейная геометрія. Краткій элементарный курсъ. Кронштадтъ. 1884. 8 д. V+71 стр. Ц. 1 р. (360)

Паульсонъ, I. Ариѳметика по способу Грубе. Методическое руководство для родителей и элементарныхъ учителей. 12-е знач. испр. изд. М. 1834. VIII+343+1 нен. Стр. Ц. 75 к. (361)

Первоначальные уроки русской грамоты. Букварь и начальное чтеніе, съ прибавленіемъ уроковъ письма и ариѳметическихъ таблицъ. (Предназначается для еврейскихъ дѣтей) Изд. 5 знач. испр. и допол. Вильна. 1884. 8 д. 79+8 нен. стр. (362)

Перевощиковъ, В. Изысканіе способа нахожденія интеграловъ дифференціальныхъ уравненій съ двумя перемѣнными величинами. Спб. 1884. 8 д. 43 стр. (363)

Пильчиковъ, Н. Градъ 11-го іюля 1884 г. въ Харьковѣ. Спб. 1884. 8 д. 11. (364)

— О нѣкоторыхъ новыхъ выводахъ условій наименьшаго отклоненія лучей въ призмѣ. Спб. 1884. 8 д. (365)

Pietkiewicz, A. Zmienność temperatury roczna w Warszawie (Odbitka z Pamiętnika Fizyograficznego. T. III za rok 1883). Варшава. 1883. 4 д. 32+1 нен. стр. 1 табл. (366)

Петровъ, Н. О треніи хорошо смазанныхъ твердыхъ тѣлъ и о главныхъ результатахъ опытовъ надъ внутреннимъ и внѣшнимъ треніемъ нѣкоторыхъ смазывающихъ жидкостей. Спб. 1884. 8 д. 7 стр. (367)

Петрушевскій Ѳ. Оптика. Гипотезы свѣта. Лекціи. Спб. 1884. 8 д. (368)

— Школьно-гигіеническій фотометръ. Спб. 1884. 8 д. 11 стр. (369)

— Правильныя формы сыпучихъ тѣлъ. Спб. 1884. Т. 8°. (370)

Печковскій, Д. Аккумуляторы. Техн. 1885. № 74. (371)

— Электрическое освѣщеніе въ домашнемъ быту (лампами съ накаливаніемъ, питаемыми галванической батареей). Техн. 1884. № 42, стр. 1. № 43, стр. 2. (372)

Пику, Р. Руководство къ технической электрометріи. Спб. 1884 г. Ц. 1 р. (373)

С. П. Пирометры. Техникъ. 1884. № 53, стр. 70. (374)

Ред. Писарева и В. Ходнева. Источникъ образованія или пантеонъ наукъ. Полнѣйшее руководство для самообразованія заключающее въ себѣ всѣ науки, знаніе которыхъ необходимо для всякаго образованнаго человѣка и вообще для лицъ, неполучившихъ гимназическаго образованія. Москва. 1884. 8 д. 5 нен. + 227 + 328 + 174 + II + II + II + II + II + III + III + V стр. Ц. 4 руб. (375)

Пламеневскій, И. Ариѳметическія задачи на нахожденіе общаго дѣлителя и краткаго числа. Жур. Элем. Мат. 1884. 80 — 81. (376)

Подоба, Ѳ. Г. Собраніе задачъ для упражненій на счетахъ въ низшихъ классахъ гимназій, прогимназій, городскихъ, уѣздныхъ, народныхъ училищъ и другихъ низшихъ учебныхъ

заведеніяхъ. Со введеніемъ вмѣсто руководства, Изд. 2. Одесса. 1884. 8 д. 79+1 нен. стр. Ц. 30 к. (377)

Покатиловъ, Ф. Алгебра. Курсъ сред. учеб. звмед. вып. I. Спб. 1884. 8 д. 218 стр. (378)

Полисадовъ, I. Опыты примѣненія къ военному дѣлу свѣтящихся составовъ. Перев. I. Полисадовъ. (Изъ Oesterreichische Militairische Zeitschrift). Инжен. Жур. 1884. № 4. стр. 47. (379)

Полкотыцкій, В. Руководство къ физикѣ. Въ объемѣ курса среднихъ учебныхъ заведеній. Изд. 2, исправ. и допол. Варшава. 1884 8 д. VII+1 нен.+576. Ц. 2 р. 75 к. (380)

Померанцевъ. Опредѣленіе разности долготъ Ташкента и Вѣрнаго и хронометрическая экспедиція 1881 между этими двумя пунктами. (381)

— Изслѣдованіе зимней рефракціи. Приложеніе къ XLVIII т. «Зап. Имп. акад. наукъ» № 3, Спб. 1884. 8 д. 2 нен.+96 стр. Ц. 40 к. (382)

Пособіе къ рѣшенію задачъ алгебраическихъ, геометрическихъ и тригонометрическихъ. С. П. Спб. 1884. 8 д. 2 нен.+ 14 стр. Ц. 25 к. (383)

Поповъ, М. и **Левшинъ**, А. Замѣтка о рѣшеніи уравненій Жур. Эл. Мат. 1884. 152—153. (384)

По поводу управляемыхъ аэростатовъ. Д. М. П. Техн. 1884. № 49 стр. 161. № 60 стр. 182. (385)

Порѣцкій, П. О способахъ рѣшенія логическихъ равенствъ и объ обратномъ способѣ математической логики. Изслѣдованіе. Казань. 1884. 8 д. 2 нен. + III + 1 нен. + XXIV + 170 стр. Ц. 1 р. 25 к. (386)

Преображенскій, П. В. Руководство къ ариѳметикѣ. Ариѳметика дробныхъ чиселъ. М. 1884. 8 д. IV+56 стр. (387)

— Руководство къ ариѳметикѣ для старш. и средн. классовъ муж. и женскихъ гимназій. Ариѳметика дробныхъ чиселъ. Москва. 1884 in 8°. (388)

— Руководство къ ариѳметикѣ для старшихъ и среднихъ классовъ мужскихъ и женскихъ гимназій. Ариѳметика цѣлыхъ чиселъ отвлеченныхъ и именованныхъ. Москва. 1884. 8 д. 5 нен. + 68 + 1 нен. стр. Ц. 30 к. (389)

Преображенскій, П. В. Наука о величинахъ. Учебникъ алгебры и ариеметики и собраніе задачъ. Изданіе 2-е вновь обраб. и знач. допол. М. 1884. 8 д. VIII + 95 стр. Ц. 50 к. (390)

— Наука о величинахъ. Основанія алгебры и ариеметики. Часть I. Москва. 1884. 8 д. XVI + 180 стр. Ц. 80 к. (391)

— Руководство къ ариеметикѣ. Приложеніе 1-й и 2-й части ариеметики. М. 1885. 8 д IV + 28 стр. Ц. 20 к. (392)

Пржевальскій, Е. Начальная алгебра. Изд 3. Москва. 1884. IV + 368 стр. 8 д. (393)

— Прямолинейная тригонометрія и собраніе тригонометрическихъ задачъ. Изд. 3-е, испр. и дополн. Москва. 1384. 8 д. 3 нен. + 242 стр. Ц. 1 р. 25 к. (394)

— Аналитическая геометрія и собраніе задачъ изъ аналитической геометріи. Изд. 3-е испр. и доп. Москва. 1884. 8 д. VIII + 335. Ц. 2 р. (395)

Приборъ Брауна для измѣренія скоростей (жирометръ). Техникъ. 1884. № 37 стр. 8. (396)

Приборъ д-ра Вильгельма Михаэлиса для опредѣленія сопротивленія разрыву и сжатію строительныхъ матерьяловъ и въ особенности цементныхъ растворовъ. Инженеръ. 1884. № 9. Стр. 231. Изъ Изв. Собр. Инж. П. С. (397)

Примѣненіе термометра къ опредѣленію количества воды, доставляемой небольшими источниками. Техн. 1884. № 59 стр. 166. (398)

Програмы для испытанія на званіе дѣйствительнаго студента и степень кандидата по физико-математическому факультету университета Св. Владиміра. Кіевъ. 1884. in 8°. (399)

Программа экспериментальной и практической частей гальванизма. Спб. 1884. 2. д. (400)

Протоколы XXIX—XXXIII засѣданій секціи физико-математическихъ наукъ. Казань. 1884. 8 д. 35 стр. (401)

Протоколъ XXXVIII засѣданія секціи физико-математич. наукъ общ. естествоиспытателей при Имп. Каз. ун. Казань. 1884. 8 д. (402)

Protokolle der IV internationalen Polar-Conferenz zu Vien. 17—24 April. 1884. Спб. 1884. 4 д. 2 нен. + 215—2—279 стр. (403)

Пушкаревъ, И. М. Курсъ геометрiи, читанный въ Кiевской женской Фундуклеевской гимназiи. Кiевъ. 1884. 8 д. II+135. (404)

Pfuhl, E. Mittheilungen von der Wiener electrischen Ausstellung (Separat-Abdruck aus der «Rigaschen Industrie-Zeitung»). Рига. 1884. 4 д. 14 стр. (405)

Пясецкiй, Н. В. Счетная палата и система государственной отчетности Италiанскаго королевства. Спб. 1884. 8 д. 187 +1 нен. стр. (406)

Радкевичъ, М. И. Поправки при вычисленiи объемовъ земляныхъ работъ. Спб. 1884. 4. 10 нен. стр. (407)

— Упрощенный способъ вычисленiя земляныхъ работъ съ таблицами половинъ и четвертей площадей. Спб. 1884. 4 д. 22 нен. стр. (408)

Ратнеръ, И. Н. «Мишпатъ эмесъ т. е. судъ справедливый. Безпристрастный критическiй обзоръ двухъ математическихъ брошюръ Г. Лихтенфельда, и неимѣющаго себѣ подобнаго въ древне-еврейской литературѣ превосходнаго сочиненiя маститаго ученаго З. Слонимскаго: «Элементы чистой математики». Спб. 1883. 8 д. 56 стр. (на еврейскомъ яз.). (409)

Рахманиновъ, И. И. Методъ или способъ Роберваля для проведенiя касательныхъ къ кривымъ линiямъ. Жур. Эл. Мат. 1884. 161—171, 187—197. (410)

Роговскiй, Е. О строенiи земной атмосферы и общихъ законахъ теорiи газовъ. Спб. 1884. 8 д. 52 стр. (411)

— Отвѣтъ на «замѣтку» г. Станкевича по поводу статьи: «О строенiи земной атмосферы и т. д.». Спб. 1884. 8 д. 5 стр. (412)

— Замѣтка объ атмосферахъ планетъ, температурѣ солнца, небеснаго пространства и земной атмостферы. Спб. 1884. 8 д. (413)

См. Станкевичъ, Б.

Розенбергъ, В. Замѣтки по элементарной оптикѣ. Спб. 1884. 8 д. 2 стр. (414)

Розенфельдъ, Б. И. Искуственные способы рѣшенiя задачъ низшей алгебры. Сборникъ задачъ для высшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведенiй. Спб. 1884. 8 д. 1 нен.+2+189+II стр. Ц. 1 р. 50 к. (415)

Романовъ, А. Общіе законы термодинамики въ примѣненіи къ вопросу о работѣ тепловыхъ двигателей. Спб. 1884. 8 д. 29 стр. (416)

Руководство къ составленію разсчета и чертежей сцѣпленія безконечнаго винта съ винтовымъ колесомъ. Лекціи Техн. Инст. Изд. 2-е. Спб. 1883. 8 д. 75, 1 т. черт. (лит.). (417)

Руководство къ составленію разсчета и чертежей коническихъ зубчатыхъ колесъ, оси которыхъ пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. Лекціи Техн. Инст. Изд. 2-е Спб. 1883. 8 д. 64 ст. 1 л. черт. (лит.). (418)

Rykatschew, M. Erdmagnetische Beobachtungen am Kaspischen Meer im Sommer 1881 (Метеорол. сбор. Импер. ак. наук. Т. IX. № 1). (Mit 2 Tafeln). Спб. 4 д. 51 стр. Ц. 60 к. (419)

— Note sur les ondes athmospheriques produites par l'eruption de Krakatoa. (Tiré du Bull. de l'acad. Imp des sciences de St.-Petersb. T. XII). Спб. 1884. 8 д. 167—187 стр. (420)

— Атмосферныя волны, произведенныя изверженіемъ Кракатоа. (Съ приложеніемъ таблицы кривыхъ). Спб. 1884. 8 д. 2 нев.+15 стр. Ц. 15 к. (421)

Рюминъ, В. В. Объ Ив. Ив. Ползуновѣ, изобрѣтателѣ первой въ Европѣ паровой машины. Сообщеніе (въ Моск. отд. Имп. Рус. Техн. Общ.). 14 янв. 1884. Техн. 1884. № 43. стр. 13. (422)

Савельевъ, Н. Объ одномъ изъ способовъ воспроизведенія двигательной силы (аккумуляторы со взрывчатыми веществами). Техн. 1884. № 56, стр. 117. (423)

— Проектъ организаціи метеорологической службы на желѣзныхъ дорогахъ. Кіевъ. 1883. 8 д. 31 стр. (424)

Савинскій, В. К. Указатель русской литературы по математикѣ, чистымъ и прикладнымъ естественнымъ наукамъ за 1882 г. Подъ ред. проф. Бунге. Годъ одиннадцатый. Кіевъ. 1884. 4 д. V+288 стр. Ц. 2 р. (425)

— Тоже на 1883 г. Ц. 2 р. (426)

Савичъ, А. Курсъ астрономіи. Томъ 2. Теоретическая астрономія (съ портретомъ автора). Спб. 1884. 8 д. VI+605. (427)

Самозаводящіяся часы. Техникъ. 1884 г. № 39, стр. 8. (Изъ Dingl. pol. I. 1883. B. 250. S. 348). (428)

Сборникъ Института Инженеровъ путей сообщенія Александра I. Спб. 1885. Вып. I, 8 д. 180 стр. (429)

Сеже, Э. Современная физика (объ единствѣ физическихъ явленій). Перев. съ французск. Спб. 1884. 12 д. 3 нен.+III+150 стр. (430)

Семека, В. Руководство къ начальному обученію ариѳметикѣ. Сост. по Генчолю. Спб. 1884. 8 д, 4 нен.+356+II+1 нен. стр. Ц. 1 р. (431)

— Сборникъ ариѳметическихъ задачъ и примѣровъ для вычисленій. Спб. 1885. Ц. 45 к. (432)

— Примѣненіе свѣтовыхъ способовъ къ копированію чертежей. Инженеръ. (Кіев.) 1884. № 10 и 11, стр. 374. (433)

Серре, А. Прямолинейная тригонометрія. Перев. Е. Гуторъ. 3-е изд. М. 1885. Ц. 90 к. (434)

Сеферъ «хидуше Магаралъ Пунцъ» т. е. толкованіе Магарала Пунца на отдѣлъ «О процентахъ». Варшава. 1884. 4 д. 250 стр. (435)

Силокопители. (Accumulateurs). Техникъ. 1884. № 39, стр. 1. (436)

Сименсъ Вильямъ, П. (Некрологъ). Техникъ. 1884. № 37, стр. 1. (437)

Симоновъ, Л. Н. Оптическій фотометръ. Съ наставленіемъ къ употребленію его Спб. 1884. 8 д. 18 стр. (438)

Симонянцъ. Ариѳметическій задачникъ (на армянскомъ языкѣ). Тифлисъ. 1884. 8 д. 132 ст. (439)

Скарлато, Н. О земномъ магнетизмѣ, насколько онъ относится къ компасу и практическіе способы опредѣленія девіаціи компасовъ. Одесса. 1884. 8 д. Ц. 1 р. (440)

Складываніе квадратами. Маленькій артистъ. Геометрич. головоломка и т. д. Вар. 1884. (441)

Скржинскій, В. К. О передачѣ силы на разстоянія помощію электричества. Сообщеніе (въ Моск. отд. Имп. Рус. Техн. Общ.) 25 февр. 1884 г. Техникъ. 1884. № 44, стр. 10. (442)

— Объ опытахъ по электрической передачѣ энергіи на значительныя разстоянія. Сообщеніе (въ Моск. отд. Имп. Рус. Техн. Общ.) 1 марта 1884 г. Техникъ. 1884. № 45, стр. 11. (443)

Слугиновъ, Н. Электрическое свѣченіе. Изслѣдованіе. Спб. 1884. 8 д. 4 нен.+66 стр. (444)

— Къ теоріи измѣреній. Спб. 1884. 8 д. 19 стр. (445)

Sloudsky. Problème principal de la haute géodesie. Изд. Импер. моск. общ. испыт. прир. Москва. 1884. 8 д. 2 нен.+ 45 стр. (446)

— Essai de solution du probleme géodésique. Bull. de la Soc. Imp. de natural. de Moscou. 1884. № 2, стр. 261. (447)

Соколовъ, А. П. Нѣсколько словъ по поводу статьи г. Бардскаго «о характерѣ силъ частичнаго притяженія». Спб. 1884. 8 д. 6 стр. (448)

— Къ теоріи кривой диффракціонной сѣтки. Спб. 1884 г. 8 д. 13. (449)

— О кометахъ. Рѣчь, произнесенная въ торжественномъ собраніи московск. част. женск. гимназіи, учрежденной З. Перепелкиной, 31 января 1885. М. 1885. 8 д. (450)

Сомовъ, П. Кинематика подобно-измѣняемой системы двухъ измѣреній. Разсуж. на степ. магистра прикл. математики. Спб. 1885. 8 д. (451)

Сонинъ, Н. Я. Обобщеніе одной формулы Абеля. Одесса. 1884. 8 д. 8 стр. (452)

— Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія. Одесса. 1884 8 д. 11 стр. (453)

Сорокинъ, Н. В. Объ атмосферной пыли. Публ. лекція, читанная 27 марта 1883 г. въ пользу казан. отд. Импер. техн. общ. Казань. 1883. 8 д. 43 стр. (454)

Сохоцкій, Ю. В. Теорія чиселъ. Спб. 1884. 8 д. 157 стр. (лит.) (455)

— Теорія чиселъ. Лекціи. Спб. 1884. 8 д. 32 стр. (лит. 33—48 стр. 49—64 стр. (456)

— Геометрическія приложенія интегральнаго счисленія. Лекціи. Спб. 1884. 8 д. 32 стр. 33—48 стр. (457)

Справочная книжка для повѣрки часовъ и леченіе простыми средствами простуды, обжоговъ, угара, зубной боли и проч. Изд. 2-е. Воронежъ. 8 д. 24 стр. Ц. 15 к. (458)

Станкевичъ, Б. Кинетическая теорія газовъ въ математическомъ изложеніи. М. 1885. 8 д. (459)

— Замѣтка на статью г. Роговскаго «О строеніи земной атмосферы». Спб. 1884. 8 д. 3 стр. (460)

Старковъ, А. Къ вопросу о поверхности наименьшаго сопротивленія при движеніи въ несжимаемой жидкости. Одесса. 1884. 8 д. 2 нен.+88 стр. Ц. 75 к. (461)

— Объ одномъ линейномъ дифференціальномъ уравненіи 3-го порядка. Одесса. 1884. 8 д. 10 стр. (462)

— Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія. Одесса. 1885. 8 д. 24 стр. (463)

— О формахъ артиллерійскихъ снарядовъ сообщ. въ Одес. Отд. Имп. Рус. Техн. Общ. Газета «Новор. Телегр.» № 2737, стр. 3, 4. (464)

— О нѣкоторыхъ особенностяхъ въ постановкѣ задачи Ньютона о поверхности наименьшаго сопротивленія. Одесса. 1884. 8 д. 10 стр. 1 л. черт. (465)

— О классификаціи дальномѣровъ сообщ. въ Одесскаго Отд. Имп. Рус. Техн. Общ. газета «Новор. Телегр.» № 2940 стр. 3. (466)

—Къ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Прот. XXXIX зас. секц. Физ.-Мат. наукъ Общ. Естествоисп. при Имп. Каз. Ун. Казань. 1884. 8 д. (467)

— Двѣ формулы изъ теоріи опредѣлителей. Прот. XXXIX зас. секц. Физ. Мат. наукъ Общ. Естествоисп. при Имп. Каз. Ун. Казань. 1884. 8 д. (468)

— Общій интегралъ одного уравненія третьяго порядка. Тамъ же. (469)

Стебницкій, І. И. Вѣроятнѣйшая величина длины секунднаго маятника на пунктахъ русскаго градуснаго измѣренія по меридіану и другихъ; результаты изъ наблюденій кругосвѣтнаго путешествія графа Литке 1826—29 гг. (чит. въ зас. физ.-мат. общ. 15-го ноября 1883 г.) Спб. 1884. 8 д. 13 стр. (470)

Страховъ, М. А. Записки по геометріи. Спб. 1884. 8 д. 59 стр. (471)

Стрекаловъ, В. Курсъ аналитической геометріи. Томъ 1. Кривыя 1-го порядка и перваго класса. Спб. 1884. 8 д. XIX+285+2 нен. стр. 7 табл. Ц. 3 р. (472)

Струве, О. Détermination de la parallaxe de α Tauri (Mélanges math. et actron. tirés du Bull. de l'acad. Imp. des sciences de S.-Petersb. T. VI). Спб. 1884. 8 д. 231—245 стр. (473)

— О рѣшеніяхъ принятыхъ на Вашингтонской конференціи относительно перваго меридіана и вселенскаго времени. Спб. 1885. 8 д. Ц. 15 к. (474)

Студенцовъ, В. Свойство угловъ треугольника и основанная на нихъ теорія параллельныхъ линій. Моршан. 1884. 8 д. (475)

Стьюартъ, Б. Физика (Серія первоначальныхъ учебниковъ III). Перев. съ англійскаго М. Антоновича. Спб. 1884. 12 д. 3 нен.+IV+136 стр. Ц. 50 к. (476)

Суворовъ, Θ. Объ изображеніи воображаемыхъ точекъ и воображаемыхъ прямыхъ на плоскости и о построеніи кривыхъ линій второй степени, опредѣляемыхъ помощію воображаемыхъ точекъ и касательныхъ. Каз. 1889. 8 д. (477)

Сусловъ, Г. Объ уравненіи Якоби для несвободнаго движенія въ первоначальныхъ координатахъ. Спб. 1885. 7 д. (478)

Тальбергъ, Г. Ариѳметика. Рига. 1884. 8 д. 144 стр. (на латыш. яз.). (479)

Татариновъ, В. О свойствахъ эѳира. Часть вторая. Волнообразныя движенія эѳира при станціонарномъ его состояніи. Москва 1884. 8 д. 88 стр. (480)

Тверетиновъ, Е. Электрическое освѣщеніе. Курсъ минннаго офицерскаго класса. Вып. II. Электрическія лампы, проводники, угли и примѣненія электрическаго освѣщенія. Съ атл. черт. Спб. 1884. 8 д. VIII+249—499 стр. 112—242 черт. (481)

Теорія расчета сводовъ. Лекціи. Спб. 1884. 8 д. 137 стр. (лат.). (482)

Тикоцкій. Руководство для нижнихъ чиновъ минной школы. Изд. 2-е испр. и допол. Ч. III. Электрическое освѣщеніе. Спб. 1884. 8 д. и атласъ. (483)

— Руководство минной школы. Унтеръ-офицерскій классъ. Спб. 1884. 8 д. 8 л. черт. (484)

Тилло, А. Матерьялы для гипсометріи Европейской Россіи. Сводъ нивеллировокъ желѣзныхъ дорогъ и каталогъ высотъ надъ уровнемъ моря желѣзно-дорожныхъ станцій. 1884. Спб. 8 д. 134+1 нен. стр. (485)

Тиме, Г. А. Начертательная геометрія. Лекціи, читанныя въ горномъ институтѣ, сост. И. М. Эльяшевъ. Спб. 1884. 8 д. 77 ст. Ц. 75 к. (486)

— Аналитическая механика. Лекція. Спб. 1884. 8 д. 271 стр. (лит.). (487)

Тиндаль, Д. Популярныя лекціи. Тепло и холодъ. Матерія и сила. Сила. Перев. подъ ред. проф. Ѳ. Ѳ. Петрушевскаго. Съ 28 рис. 2-е изд. Спб. 1885. 8 д. 2 нен.+114+4 нен. стр. Ц. 75 коп. (488)

Тисандье, Г. Научныя развлеченія. Знакомство съ законами природы путемъ игръ и опытовъ, не требующихъ спеціальныхъ приборовъ. Съ 352 рис. въ текстѣ. Перев. съ франц. подъ ред. Ф. Павленкова. Изд. 2-е. Спб. 1885. 8 д. 2 нен.+II+396 стр. Ц. 2 р. (489)

Tichomirow, W. Dr. Die spectroscopischen Eigenschaften der Cantariden und iher Präparate. Спб. 1884. 8 д. 16 стр. (490)

Тодгантеръ, Н. Собраніе упражненій по аналитической геометріи трехъ измѣреній. Перев. съ англ. Ф. Мастерзъ. Спб. 1885. 8 д. Ц. 50 к. (491)

Томашевичъ, Е. Элементарный выводъ величины центростемительной силы при равномѣрномъ движеніи по кругу. Жур. Эл. Мат. 1884. 37—40. (492)

Tompson, Silvanus, P. Prof. Electriczność i magnetysm. Ze drzevorytami w tekście. Przełożył z V wydania angielskiego. I. Boguski. Zeszyt I. Варшава. 1884. 8 д. 3 нен.+224+4 стр. (493)

Топорковъ, А. Нѣсколько словъ о подвиж. ариѳметич. задачахъ и опыты на задачи. Пермь. 1884. 8 д. Ц. 35 к. (494)

Трофимовъ, В. М. Руководство коммерческой ариѳметики. Спб. 1884. 8 д. 78 стр. Ц. 75 к. (495)

Троцкій-Сенютовичъ, П. Общепонятная начальная ариѳметика съ задачами. Составилъ примѣнительно къ обученію взрослыхъ. Варшава. 1884. 8 д. 47 стр. Ц. 14 коп. (496)

Труды VII (воздухоплавательнаго) отдѣла Имп. рус. техн. общества. Спб. 1884. 8 д. 27 стр. 1 таб. черт. (497)

Труды отдѣленія физич. наукъ общ. люб. естествознанія. Т. II. Вып. 2-й подъ ред. А. Столѣтова и Е. Покровскаго. М. 1884. 4 д. (498)

Труды Спб.-го Общ. Естествоиспытателей изд. подъ ред. И Бородина. Т. X. Вып. 2-й. Спб. 1884. 8 д. Ц. 2 р. (499)

Thullie, M. Analytyczne oznaczenie linij wpływowych dla łuku parabolicznego dwu u bezprzegubowego (Odbitka z Przeglądu Technicznego»). Z jedną tablicą rysunków. Варшава. 1883. 8 д. 22 стр. (500)

Ученыя записки Импер. Москов. университета. Отд. физико-математическій. Вып. 5, 6. М. 1885. 8 д. (501)

Уле, О. Почему и потому. Учебникъ физики въ вопросахъ и отвѣтахъ. Пер. съ нѣмецкаго. Съ 110 политип. въ текстѣ. Изд. 4. Спб. 1885. 8 д. 250 стр. Ц. 1 р. (502)

Фанъ-деръ-Флитъ. Тяжесть. Спб. 1884. 8 д. 88 стр. (лит.). (503)

Флоренскій, Инж. Графо-интеграторъ, приборъ для опредѣленія площадей, статическихъ моментовъ и моментовъ инерціи плоскихъ фигуръ графическимъ способомъ. Кіевъ. 1884. 4, 8 стр. Оттискъ изъ инженера. (Кіев.) 1884. № 1 25 стр. (504)

Флоренсовъ, В. Я. Начальныя основанія электро-техники. Спб. 1884. 8 д. VIII+122 стр. Ц. 1 р. 25 к. (505)
Инжен. Журн. 1884. № 10, стр. 287.

Флоринскій, Г. Н. Превращеніе прямоугольника въ квадратъ разрѣзываніемъ и переложеніемъ разрѣзанныхъ частей. Жур. Эл. Мат. 1884. 145—147. (506)

— Дополненіе къ статьѣ о превращеніи прямоугольника въ квадратъ переложеніемъ разрѣзанныхъ частей. Id. 203—204. (507)

Фогель, Р. Способъ предвычисленія солнечныхъ затмѣній. Москва. 1884. 8 д. 34 стр. (508)

Френе, М. Ф. Сборникъ упражненій по исчисленію безконечно-малыхъ. Перев. съ 4 франц. изд. Д. Крюковскаго. Спб. 1885. 8 д. 3 нен.+III+444+X+II стр. (509)

Frolow, M. (Ing.). Le probléme d'Euler et les carrés magiques. Avec un altas. Traduit du russe. Спб. 1884. 8 д. 44. стр. XIX табл. (510)

Фроловъ, А. Дополненія къ элементарной начертательной геометріи. Спб. 1884. 8 д. 34 стр. Ц. 30 к. (511)

— Элементарная начертательная геометрія съ чертежами въ текстѣ и съ задачами для самостоятельныхъ работъ учащихся. Спб. 1884. 8 д. IV+132. Ц. 75 к. (512)

Фультонъ и Стефенсонъ изобрѣтатели парохода и паровоза. Спб. 1885 (1884 г.) in 8°. (513)

Хвольсонъ, О. Популярныя лекціи объ электричествѣ и магнитизмѣ. Съ 203 рис. въ текстѣ. Спб. 1884. 8 д. 3 нен.+III+IV+231 стр. Ц. 2 р. (514)

— О метрической системѣ мѣръ и вѣсовъ и о ея введеніи въ Россіи. Спб. 1884. 8 д. 3 нен.+II+132 стр. (515)

Хвольсонъ, О. Объ учрежденіи коммисіи для выработки програмы конкурса на составленіе для среднихъ учебныхъ заведеній коллекціи приборовъ, относицихся до открытій и изобрѣтеній въ области ученія объ электричествѣ, сдѣланныхъ за послѣднее десятилѣтіе. Спб. 1884. 8 д. 3 стр. (516)

— Международная вѣнская выставка 1883 года. Докладъ Импер. рус. техн. общ. Спб. 1885. 8 д. (517)

Cieczewský, L. Nauka czytania, pisma, rachunków i innych początkowych wiadomosci. Ченстоховъ. 1884. 12 д. 2 нен.+127+1 нен. стр. (518)

Цомакіонъ, Ф. Магнитныя наблюденія, произведенныя въ г. Казани въ 1883 г. Каз. 1884. 8 д. (519)

Чебышевъ, П. Л. О приближенныхъ выраженіяхъ однихъ интеграловъ черезъ другіе, взятые въ тѣхъ же предѣлахъ. Зап. Харьк. Ун. 1882 г. Харьковъ. 1884, т. IV. (520)

Чиколевъ, В. Чудеса электричества. Спб. 1885. 8 д. (521)

Чирковъ, П. А. Способъ спрямленія окружности. Инжен. Журн. 1884. № 5, стр. 62. (522)

Шалфѣевъ, М. Объ удѣльныхъ объемахъ элементовъ въ тѣлахъ жидкихъ и твердыхъ. Статья 2. Спб. 1884. 8 д. (523)

Шапошниковъ, Н. А. Курсъ прямолинейной тригонометріи и собраніе тригонометрическихъ задачъ. 2 изд. испр. и допол. Москва. 1884. 8 д. VIII+1440+II стр. Ц. 80 к. (524)

Шарнгорстъ, К. Сферическая тригонометрія съ приложеніемъ къ астрономіи. Спб. 1889. 8 д. 1 нен.+VII+130 стр. 1 табл. (525)

Шведовъ, Ѳ Этюды по космической физикѣ. III. Нагрѣваніе метеоритовъ при ихъ паденіи на землю. Спб. 1884. 8д. (526)

Шебуевъ, Г. О распространеніи свѣтовыхъ колебаній въ прозрач. кристаллич. средѣ. Каз. 1884. 8 д. (527)

Шилингъ, Павелъ Львовичъ. Техникъ. 1884. № 51. стр. 33. (528)

Шиллеръ, Н. Н. Основанія физики. Ч. 1. Кинематика, принципы динамики, кинетика и статика твердаго тѣла. Кіевъ. 1884. 8 д. V+360. Ц. 2 р. 50 к. (на пересылку 25 к.). (529)

Н. Н. Элементы ученія объ электричествѣ Жур. Эл. Мат. 1884. 113—122, 198—203. (530)

— Теорія потенціальной функціи. Кіевъ. 1885. Ц. 1 руб. 50 коп. (на пересылку 15 коп.). (531)

Шимковъ, А. П. Курсъ опытной физики. Часть I. Общая физика и акустика. Съ чертежами и рисунками въ текстѣ. Изд. 2-е испр. и дополн. Харьковъ. 1884. 8 д. 3 нен.+409+1 нен. стр. Ц. 2 руб. 50 коп. Часть II. О свѣтѣ. 1884. 8 д. 3 нен.+305, стр. Ц. 2 руб. (532)

Шкляревскій, А. С. Записки по медицинской физикѣ. Вып. 1. Динамика. Кіевъ. 1884. 8 д. 73+55 стр. 10 табл. черт. (533)

Шмидтъ, Г. Краткій курсъ миннаго искусства для офицеровъ флота. Часть III. Электрическое освѣщеніе. Съ атл. черт. Спб. 1884. 8 д. IV+112 стр. 90 черт. (534)

Шостакъ, С. Объясненіе кажущагося вращенія кружковъ. Жур. Эл. Мат. 1884. 174—176. (535)

Шпачинскій, Э. Временная галваническая батарея въ обыкновенныхъ стаканахъ. Жур. Эл. Мат. 1884. 44. (536)

— Шарообразная молнія. Id. 151—151.

Шохоръ-Троцкій, С. Изъ области низшей алгебры. С. и Ш. 1885. № 1, 2. (537)

Штурмъ, К. Курсъ анализа. Съ приложеніемъ элементарной теоріи эллиптическихъ функій М. Г. Лорана. Перев. В. Сынцова. 2-е рпс. изд. пересм. и допол. Д. Н. Крюковскимъ. Спб. 1885. 8 д. Т. I. 5 нен.+515+VI+II стр. Т. II 3 нен.+624+X+II стр. (538)

Экгардъ, Θ. (Міръ въ картинкахъ). **Физика въ картинахъ.** Изображеніе и описаніе важнѣйшихъ явленій и приборовъ. 30 таблицъ рисунковъ, отпечатанныхъ красками. Для нагляднаго обученія юношества въ школѣ и дома съ пояснительнымъ текстомъ. Спб. 1885 (1884) in. 4°. (539)

Электрическіе часы. Техникъ. 1884. № 41 стр. 7. Изъ Dingl. pol. J. 1884. 33, 251. S. 163). (540)

Электрическій искатель металовъ. Техн. 1884. № 59 стр. 167. (541)

Д. П. **Электрическій** фильтръ (для воды). Техникъ. 1884. № 51 стр. 80. (542)

Элементарная физика по Крюгеру. Роководство для низш. уч. завед. 3-е изд. Спб. 1885. Ц. 60 к. (543)

П. **Электропроводность** металловъ и металлическихъ сплавовъ. Техникъ. 1884. № 51, стр. 45. (544)

Д. П...ій. **Элементъ** Яблочкова съ металическимъ натріемъ. Техникъ. 1884. № 58, стр. 147. (545)

Энгельмейеръ, П. Новый взглядъ на взрывы паровиковъ. (Абсолютное кипѣніе). Техн. 1884. № 60, стр. 175. (546)

Яблонскій. Краткія записки о телеграфіи. Варшава. 1884. 8 д. 34 стр. (547)

УКАЗАТЕЛЬ

къ русской библіографіи по Математикѣ, Механикѣ, Астрономіи, Физикѣ и Метеорологіи за 1884 годъ.

Ариѳметика.

Алгебра низшая.

Геометрія элементарная.

Тригонометрія и таблицы.

Начертательная геометрія и черченіе.

Аналитическая и высшая геометрія.

Высшая алгебра, теорія формъ, дифференціальное, интегральное и варіаціонное исчисленія, теорія функцій, теорія чиселъ и проч.

Механика теоретическая и прикладная.

Астрономія, геодезія и теорія вѣроятностей.

Физика теоретическая и экспериментальная.

Метеорологія.

Исторія и философія математическихъ наукъ.

Сборники, журналы, отчеты и пр.

Смѣсь.

ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ VII.

СОДЕРЖАНІЕ:

ОДЕССА.

ТИПОГРАФІЯ «ОДЕССКАГО ВѢСТНИКА», КРАСНЫЙ ПЕРЕУЛОКЪ, Д. № 3.

1886.

Изданія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей въ Одессѣ:

Томъ I и II. Распроданы.

Томъ III. Вып. 1-й. *Р. Прендель.* Сарматскія образованія Севастополя и его окрестностей (съ 2-мя табл.). *И. Синцовъ.* Отчетъ о геологическихъ изслѣдованіяхъ въ Бессарабіи, въ 1873 г. *В. Репяховъ.* Отчетъ о зоологическихъ изслѣдованіяхъ въ Крыму лѣтомъ 1875 г. 1875 г. Цѣна 60 к.

Вып. 2-й. *И. Синцовъ.* Описаніе новыхъ и малоизслѣдованныхъ формъ раковинъ изъ третичныхъ образованій Новороссіи (съ 4-мя таблиц.). Двѣ статьи. *И. Шманкевичъ.* Нѣкоторыя ракообразныя соляно-озерныхъ и прѣсныхъ водъ и отношеніе ихъ къ средѣ (съ 5 табл.). 1875 г. Цѣна 2 р. 50 к.

Томъ IV. Вып. 1-й. *А. Тегартенъ.* О бензойныхъ смолахъ. *Р. Прендель.* Геологическій очеркъ мѣловой формаціи Крыма и слоевъ переходныхъ отъ этой формаціи къ эоценовымъ образованіямъ (съ 4 табл.). *В. Репяховъ.* Отчетъ объ экскурсіяхъ въ Архипелагѣ 1875 г. *И. Видгальмъ.* Отчетъ объ антропологическихъ экскурсіяхъ, произведенныхъ лѣтомъ 1875 г. *И. Синцовъ.* Предварительное сообщеніе о новыхъ и малоизслѣдованныхъ формахъ раковинъ изъ третичныхъ образованій Новороссіи. *И. Синцовъ.* Нѣсколько словъ о Belemnites Zitteli. *Ил. Мечниковъ.* Изслѣдованіе о превращеніи аксолотовъ. *В. Шманкевичъ.* Объ отношеніи рода Anisonema Dujard къ соляно-озерной Diselmis Dunalii Dujard. 1876 г. Цѣна 1 р. 20 к.

Вып. 2-й. *Н. Кеппенъ.* Thompsonia sinensis, новый видъ Suctoria (съ 2-мя табл.). *В. Репяховъ.* Замѣтка о развитіи головнаго ганглія при безполовомъ размноженіи Олигохэтъ. *Ил. Мечниковъ.* Изслѣдованія о губкахъ. *К. Бородинъ.* Альгологическая экскурсія въ окрестностяхъ г. Херсона и въ мѣстностяхъ, лежащихъ внизъ по Днѣпру отъ Херсона. 1877 г. Цѣна 80 к.

Томъ V. Вып. 1-й. *Ил. Мечниковъ.* О пищеварительныхъ органахъ прѣсноводныхъ турбеллярій. *Его-же.* Изслѣдованіе о развитіи планарій. *И. Синцовъ.* Описаніе нѣкоторыхъ видовъ мезозойскихъ окаменѣлостей изъ Симбирской и Саратовской губ. *Его-же.* Описаніе новыхъ и малоизслѣдованныхъ формъ раковинъ изъ третичныхъ образованій Новороссіи. *Его-же.* Замѣтка по поводу статьи проф. Траутшольда: «Ueber Kreidefossilien Russlands». *Л. Ришави.* Къ вопросу о дыханіи растеній. *В. Репяховъ.* Взглядъ на современное состояніе вопроса о зародышевыхъ пластахъ. 1877 г. Цѣна 1 р. 50 к.

Вып. 2-й. *Е. Клименко.* Матеріалы для исторіи молочной и пировиноградной кислоты. *Р. Прендель.* Отчетъ о результатахъ экскурсіи, произведенной лѣтомъ 1877 г. въ Подольск. губ. *Л. Ришави.* Отчетъ объ экскурсіи въ Севастопольской бухтѣ въ 1878 г. *Р. Прендель.* Отчетъ о результатахъ экскурсіи, произвед. лѣтомъ 1878 г. по прибрежной полосѣ Абхазіи и Черноморскаго округа. 1879 г. Цѣна 75 к.

Томъ VI. Вып. 1-й. *И. Синцовъ.* О мѣловыхъ губкахъ Сарат. губ. (съ 6 табл.). *О. Мечникова.* О тазовой и плечевой дугѣ хрящевыхъ рыбъ. *Е. Клименко.* Матеріалы для исторіи молочной и пировиноградной кисл. *В. Шманкевичъ.* Объ отношеніи нѣкоторыхъ безцвѣтныхъ Flagellata къ водорослямъ и грибамъ (съ табл. рис.). 1879 г. Цѣна 1 р. 50 к.

Вып. 2-й. *П. Забаринскій.* Дополненіе къ монографіи N. Kleinenberg'a «Hydra» (съ 2 табл.). *Ил. Мечниковъ.* Матеріалы къ ученію о вредныхъ насѣкомыхъ юга Россіи (личинка Anisoplia) *В. Репяховъ.* Къ морфологіи мшанокъ (съ 5 табл.). *С. Танатаръ.* О строеніи фумаровой и малеиновой кисл. 1880 г. Цѣна 1 р. 50 к.

Приложен. къ VI т. записокъ: *Flora chersonensis E. Lindemann'a.* 2 т. Цѣна 1 и 2 т. 4 р.

Томъ VII. Выпускъ 1-й. *Л. Ришави.* Альгологическія изслѣдованія (съ табл.). *П. Спиро.* Матеріалы для изученія образованія желчи. *П. Меликовъ.* О производныхъ акриловой кислоты. *И. Синцовъ.* Описаніе нѣкоторыхъ видовъ мезозойскихъ окаменѣлостей изъ Симбирской и Саратовской губерн.

ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ VII.

ОДЕССА.
Типографія «Одесскаго Вѣстника», Красный переулокъ, д. № 3.
1886.

Печатано по опредѣленію Совѣта Новороссійскаго Общества Естествоис
тателей. Секретарь Общества *П. Бучинскій.*

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Приложенія.

Les orages en Russie[1])

A Klossovsky.

En Russie les observations sur les orages ont été commencées par l'initiative de la Société Impériale de Géographie l'année 1871. Des bulletins avaient été envoyés à des observateurs volontaires, bulletins munis d'instructions détaillées et de conseils pratiques. Ces sortes d'observations n'exigent point d'appareils. La description de l'orage n'est qu'une série de réponses aux questions qui se trouvent dans le dit bulletin:

Gouvernement?
District?
Point d'observation?
Orage .... date .... mois ... année 18 ....

Heure { commencement de l'orage / fin }

Points cardinaux { d'où il vient / où il se dirige }

Force { éclair / tonnerre }

Force et durée { pluie / grêle }

Direction et vitesse { vent (près de la surface du sol) / mouvement des nuages }

Nom de l'observateur

---

[1]) Extrait d'un mémoire russe «Грозы въ Россіи». Odessa

En tournant la page on trouve une instruction adressée aux observateurs. Dans l'étude présente je me suis fixé deux buts: 1) étudier la distribution géographique de l'activité orageuse en Russie et ses périodes annuelles et diurnes et 2) suivre de plus près la liaison mutuelle de l'activité orageuse et tourbillonnaire. Mais les observations de notre service d'orages ne m'offraient pas des matériaux assez riches pour cette étude, aussi ai-je dû recourir aux données des Annales de l'Observatoire physique de St-Pétersbourg pour les 17 dernières années ainsi qu'à celles de la Société d'Assurance pour les dégâts causés par la grêle pour une période de 5 ans.

A) *Distribution geógraphique des orages en Russie, leurs périodes diurnes et annuelles.*

J'ai trouvé les moyennes mensuelles et annuelles pour 145 points de la Russie[1]). Après avoir passé en revue toutes les tables nous en arrivons aux conclusions suivantes par rapport à la distribution géographique des orages en Russie. Dans les provinces les plus éloignées du nord le nombre de jours avec orage oscille entre 3 (Kola) et 7 (Archangel) par an; il croît peu à peu vers le sud et atteint le chiffre 10 à Vologda et 11 à Pétrosavodsk. Le nombre d'orages par an est 12 le long des bords du golfe de Finlande et 12—15 sur la vaste étendue de la Russie centrale. Dans les provinces occidentales de la Russie l'énergie orageuse s'accroît par degré dans la direction nord-sud; ainsi à Varsovie il y a à peu près 18 orages par an, à Pinsk 17 orages, à Elisabethgrad 21, à Kichinef 21; on observe la même intensité électrique dans les gouvernements de Penza et de Tambof; il est à supposer que l'augmentation de l'activité orageuse règne dans la région qui s'étend depuis les gouvernements de Vo-

---

[1]) Voir mon mémoire original pp. 13—23.

line, de Kiew, de Koursk et plus loin jusque vers l'orient. Les orages perdent d'intensité dans la région méridionale de la Russie (Odessa 14 orages par an, Taganrog 12, Sévastopol—9, Jalta—6). Il y a plus d'orages à l'Oural (Ekaterinbour—18, Blagodat—18). Quant à la Sibérie le nombre d'orages y est bien plus considérable qu'on avait pu le croire d'après les documents accidentels rassemblés jusqu'à présent. Au-delà de l'Oural nous trouvons une région où l'activité orageuse est moins intense qu'à l'Oural; mais à mesure qu'on avance vers l'orient elle croît et atteint 15—17 orages par an; même à Tourkhansk le nombre de jours avec orage atteint le chiffre 8. Les orages diminuent vers l'Océan Pacifique. L'activité orageuse atteint son apogée au Caucase — le nombre annuel d'orages est 40,8 à Tiflis, 34,9 à Biely Klutch et 27,4—34,6 le long des bords de la mer Noire. Le littoral de la mer Caspienne et les domaines russes de l'Asie centrale nous offrent sous ce rapport un contraste frappant; à Bakou le nombre d'orages atteint à peine 4,7, à Fort Alexandrovsk—5,0, à Krasnovodsk — 3,9, à Tachkent—9,3, à Noukous—7,0.

Le nombre annuel des orages selon les différentes années subit certaines oscillations. On aurait pu supposer l'existence d'une certaine compensation dans la distribution de l'activité orageuse comme il en est dans la marche des éléments météorologiques, c'est-à-dire que l'augmentation de l'intensité orageuse dans une localité est suivie par un, pour ainsi dire, vacuum électrique dans une autre localité. Afin d'étudier ces oscillations j'ai dressé une table pour une période de 10 ans (1870—79), où j'ai marqué selon les différentes années l'écart de la moyenne des orages pour 30 points de la Russie d'Europe et de celle de l'Asie, je me borne à en indiquer les résultats principaux: les aires des écarts positifs et négatifs se succèdent assez irrégulièrement et forment sur la carte des

oasis dont la distribution ne nous laisse observer ni régularité, ni loi; mais l'activité orageuse dans son ensemble éprouve des oscillations très marquées dans le temps; elle s'affaiblit selon les différentes années, atteint son minimum et gagne en force ensuite; ces différents changements successifs ont lieu en même temps sur toute l'étendue de la Russie d'Europe et de celle d'Asie. Des observations de dix ans bien certainement ne suffisent pas à déterminer le caractère et la période de ces oscillations. La justesse de nos conclusions peut être observée dans le tableau suivant:

Année	1870	71	72	73	74	75	76	77	78	79
Nombre de stations où la quantité d'orages était au-dessus de la moyenne . .	9	15	28	26	2	7	19	9	10	14
au-dessous de la moyenne . . .	21	15	2	4	28	23	11	21	20	16
Total des orages.	454	510	715	663	278	410	525	389	420	440

En 1872 les orages étaient fréquents dans toute la Russie, au Caucase, en Sibérie, à Tourkestan; c'était une année de l'activité intense de l'électricité atmosphérique sur toute la vaste étendue du continent de l'Europe et de celui de l'Asie. Il n'y a eu d'exception que pour Kasan où le nombre d'orages est 6 (11,2 la moyenne de l'année). Le nombre d'orages a diminué en 1873 et il a atteint son minimum en 1874. Sans résoudre la question nous nous permettrons d'observer en passant que 1874 a été l'année du minimum des taches solaires et probablement d'une plus faible activité électrique; dans un des chapitres à suivre nous allons indiquer la cause directe du calme relatif de l'électricité atmosphérique en 1874.

L'activité orageuse que nous venons de voir a ses périodes annuelles. Au nord les orages se concentrent exclusivement sur les mois d'été, la plupart des orages tombe sur le mois de juillet; à Kem, à Pétrosavodsk et à Valaam le maximum des orages est au mois d'août. Il n'y a point d'orages aux mois de janvier — mars, ni en octobre — décembre. Il n'y a d'exception que pour Kem où pendant la période des 16 dernières années (1876—81) il y avait eu un orage au mois d'octobre. La distribution des orages est un peu autre dons les provinces de la Baltique. Il y a des cas d'orages au mois de janvier, de février et de mars, mais la saison orageuse proprement dite commence au mois de mai et tout en gagnant en intensité atteint son appogée au mois d'août pour les bords du golfe de Finlande et au mois de juillet pour les provinces du centre. Le nombre d'orages est encore assez considérable au mois de septembre et diminue notablement aux mois d'octobre et de novembre; les orages disparaissent entièrement au mois de décembre.

Dans la partie occidentale le maximum est porté vers le mois de juin et dans quelques localités en partie vers juillet; quoique fort rarement des cas sporadiques d'orages peuvent avoir lieu dans tous les mois. La distribution annuelle des orages au sud est à peu près pareille à celle que nous venons de décrire; les orages persistent jusqu'en décembre, et ce n'est que le mois de janvier qui en est absolument exempt (exception faite pour Sévastopol); la plupart des localités est également libre d'orages aux mois de février et de mars.

Dans les provinces du centre et dans celles du Volga les orages tendent à se concentrer vers l'époque de l'été, et l'activité orageuse atteint sa plus grande intensité, au mois de juillet. Une particularité caractéristique du Caucase consiste en ce que les orages y ont lieu dans tout les mois de l'année. Parmi 3489 orages 45 ont eu lieu au mois de dé-

cembre et 10 au mois de janvier; le maximum général se rapporte au mois de juin.

Dans le tableau suivant la distribution des orages est exprimée en pourcents, je me borne aux mois d'été (mai — septembre) ainsi qu'aux résultats déduits pour les quatre saisons.

	Prov. du nord	Prov. de la Baltiq.	Prov. occid.	Prov. d usud	Prov. du centre	Caucase	Oural	Sibér. occid.	Sibér. orient.
Avril .	0,7	1,2	5,56	3,27	3,84	6,5	2,72	0,85	0,3
Mai. .	7,5	8,2	15,13	14,15	16,51	14,6	12,48	11,54	4,6
Juin. .	27,6	24,7	23,32	27,31	26,74	25,7	28,86	28,02	27,2
Juillet.	32,2	29,9	26,92	26,45	20,65	17,7	3,50	36,36	34,4
Août .	24,4	24,1	19,27	15,21	17,51	16,0	16,90	20,11	21,1
Septem.	5,5	10,4	7,57	8,34	4,99	11,7	3,78	2,96	9,7
Hiver .	—	0,2	0,4	0,9	0,1	2,0	0,1	0,04	0,07
Printem.	8,2	9,7	21,7	17,9	20,4	21,9	15,2	12,39	4,9
Eté. .	86,2	78,7	69,5	69,0	73,9	59,4	81,3	84,49	82,7
Automne	5,6	11,4	8,4	12,2	5,6	16,7	3,4	30,8	11,7

En poursuivant l'analyse des observations nous essayerons de connaître les conditions favorables à l'activité orageuse; dans ce but nous combinons la distribution géographique des orages et leurs périodes annuelles avec celle de la marche des différents éléments météorologiques. La comparaison des cartes de la distribution des orages avec celles des isothermes en été [1]) nous montre que la région de l'activité orageuse la plus intense coïncide avec la zône de la température la plus élevée. Les provinces sud-ouest, la Russie sud-est, toute la partie méridionale de la Sibérie se trouve dans

[1]) Voir Wild. Die Temperaturverhältnisse des Russischen Reichs.

la région où la température moyenne de juillet est au-dessus de 20° C; au Caucase la température de 24° à 30° prédomine en juillet; dans les provinces du nord la température moyenne de juillet est 16°—17°, et celle de juin—15°—10°; les bords de la mer Baltique, d'Uléaborg à Memel, sont entourés en juillet par l'isotherme de 17°, en juin — de 15°; au mois de mai l'isotherme de 16° descend jusqu'à Novgorod et Viatka et la courbe de 4° traverse Archangel; dans les provinces de la Baltique on voit prédominer les températures 7°—8°, et presque dans toute la Sibérie la température est au-dessous de 11°.

Mais il est clair que la marche de la distribution des températures ne détermine pas à elle seule l'intensité de l'activité orageuse; comme preuve nous pouvons citer les bords de la mer Caspienne et l'Asie centrale. Il est donc nécessaire de rapporter notre attention sur d'autres facteurs, tels que les dépôts atmosphériques et l'humidité. Dans ce but nous avons calculé d'après les données des Annales de l'Observatoire central les quantités mensuelles et annuelles de la pluie pour 48 points de la Russie [1]).

Si nous dressons une carte avec les quantités *annuelles* des dépôts atmosphériques que nous avons trouvées, cette carte ne correspondra pas entièrement à celle de la distribution géographique des orages; mais il ne faut pas oublier que les orages prédominent pendant les mois d'été; il est donc nécessaire de faire une carte pour les dépôts atmosphériques de l'été; cette dernière est beaucoup plus rapprochée de la carte des orages; on y voit que la quantité des dépôts atmosphériques au nord de la Russie est de 150 mm.; sur toute l'étendue de la Russie centrale elle est égale à 170 — 200 mm.; elle augmente du côté du Caucase et de l'Oural; la région étroite

[1]) Voir mémoire original pp. 31—32

située le long des bords de la mer Caspienne est pauvre en dépôts atmosphériques (55 mm. durant les 3 mois d'été). On peut également remarquer un certain rapport entre les orages et l'humidité relative; au mois de juillet l'humidité relative est presque la même au nord et dans les provinces de la Baltique (76%), elle est quelque peu moindre sur l'étendue de la Russie centrale (près de 73%); une décroissance sensible de l'humidité se fait remarquer dans les provinces sud-ouest (50%—60%); au sud-est de la Russie l'humidité essuie des oscillations entre 55% et 60%; elle est de 71%—73% à l'Oural.

Ainsi les facteurs favorables à la décharge de l'activité électrique sont une température élevée, un certain degré d'humidité et une quantité suffisante de dépôts atmosphériques. Ce n'est que la combinaison de ces trois facteurs qui puisse expliquer toutes les particularités de la distribution de l'activité orageuse dans l'espace et le temps. Par exemple les dépôts abondants des provinces Baltiques sont paralysés par la température peu élevée et une humidité considérable; c'est pourquoi le nombre d'orages le long des bords de la mer Baltique est relativement très restreint; d'un autro côté l'absence des dépôts atmosphériques le long de la mer Caspienne y est la cause directe de la faiblesse de l'activité orageuse. La température élevée et une grande quantité de dépôts atmosphériques sur les bords de la mer Noire augmentent l'intensité des orages à Poti et à Dachovsky poste.

La liaison entre les dépôts atmosphériques et les orages se fait remarquer non seulement dans la distribution géographigue, mais encore dans les périodes annuelles. Sur l'étendue de la Russie d'Europe les orages d'été prédominent; en même temps les tables des dépôts atmosphériques nous font voir que la Russie se trouve située dans la région de la prédominance des pluies de juillet; dans la Russie méridionale et

au Caucase le maximum des pluies est au mois de juin; une pareille distribution correspond entièrement à la marche annuelle des orages. Dans la région de la prépondérance des pluies de juin nous pouvons remarquer un second maximum, plus faible, qui est pour le mois de novembre; mais ce maximum n'est pas accompagné d'orages, parce que les conditions thermiques de l'air ne sont pas favorables aux décharges électriques. Mais les dépôts atmosphériques ne sont qu'indirectement liés aux orages.

Nous savons déjà que les pluies nous sont apportées par les tourbillons, par conséquent la distribution géographique des orages doit être étroitement liée à la marche des cyclons; dans ce but j'ai dressé une carte sur laquelle les points rouges indiquent les positions de tous les cyclons qui ont traversé la Russie pendant les années 1872 — 77[1]). Il y est facile de distinguer trois systèmes principaux de minima: l'un se trouve près du golfe de Finlande, un autre s'étend en zône étroite depuis les provinces sud-ouest jusqu'aux gouvernement de Saratof et de Tambof, le troisième occupe l'espace qui se trouve entre le Volga et l'Oural; une hausse de l'activité orageuse correspond à chacun des trois systèmes.

Mais les voies des cyclons à elles seules ne déterminent pas le nombre des orages; des conditions purement locales et favorables à la décharge électrique, comme nous l'avons vu, sont indispensables à leur formation; ces conditions sont une température élevée et un certain état hydrométrique ainsi que, selon toute probabilité, l'absence d'eau en forme de brouillard. Pour justifier ces conclusions faisons a priori un schème général de la distribution de l'activité orageuse en Europe. Il y a trois systèmes de minima en Europe: 1) le système nord qui se compose des minima océaniques ainsi que des cyclons

---

[1]) Voir Carte II. Mon mémoire original.

qui se forment sur la mer Baltique et sur celle du Nord. 2) Le système sud formé des cyclons venus de la Méditerranée et de l'Adriatique et en partie du sud; 3) ce système comprend les cyclons qui naissent sur le continent.

Au nord-ouest de l'Europe, où le premier système des tourbillons prédomine, l'activité orageuse ne peut être que faible, grâce à une humidité considérable et une température peu élevée; on peut s'attendre à ce que dans le reste de l'Europe centrale l'activité orageuse soit presque la même, sauf les localités montagneuses qui jouissent d'une électricité plus intense quant à la force et à la fréquence des décharges; mais les conditions les plus favorables à l'activité orageuse doivent être au sud de l'Europe, dans l'Italie centrale et sur les bords nord est de l'Adriatique. Et réellement au nord de l'Europe le nombre des orages est restreint.

Christiania	3,0
Stockholm.	9,6
Copenhague	3,6
Londres	8,3

A Bergen, riche en dépôts atmosphériques par excellence, il n'y a que 5,8 orages par an; une pauvreté relative d'orages se fait remarquer tout le long du littoral occidental de l'Europe; il y a à peine 13,8 à Lisbonne et 6,0 à Gibraltar. L'activité orageuse augmente vers le centre du continent; elle est à peu près uniformément répandue dans toute l'Europe centrale en essuyant des oscillations entre 17 et 25 orages annuels. Une hausse sensible de l'énergie électrique se fait sentir au sud (Rome, Ianina et autres). C'est ici que se trouve le maximum des orages qui a été jadis indiqué dans les cartes de Berghaus.

L'influence des conditions locales, dues à l'état calorifique et hydrométrique de l'air, fait également naître les pério-

des diurnes. Les causes qui diminuent le nombre d'orages en hiver, ont lieu en partie pendant la nuit; c'est pourquoi l'activité orageuse doit s'affaiblir pendant la nuit. Les bulletins du service des orages nous mettent à même d'étudier de plus près la marche de la période diurne. Le nombre des orages commencés pendant chaque intervalle de trois heures se distribue en pourcents de la manière suivante.

Heures . . .	après md 12—3	3—6	6—9	minuit 9—12	apr.m. 12—3	3—6	6—9	midi 9—12
Prov. du nord .	28,3	22,6	24,5	7,6	—	1,9	3,8	11,3
» de la Baltiq.	23,3	29,5	14,9	8,3	3,3	2,5	4,1	14,1
» de l'ouest .	21,0	29,9	21,8	10,1	3,1	4,6	3,4	6,1
» du centre .	26,6	27,5	20,8	6,9	3,1	3,1	3,3	8,7
» du sud. .	25,8	16,6	11,7	11,0	5,5	4,9	11,6	12,9
Caucase . . .	14,6	31,8	28,3	14,6	4,5	1,2	0,9	4,1
Oural. . . .	24,2	28,7	20,6	9,8	3,6	2,6	2,2	8,3
Sibérie . . .	25,1	28,6	18,3	10,5	2,7	3,0	2,6	9,2
Total. . . .	23,6	28,3	20,4	9,6	3,5	3,0	3,1	8,5

Cette table nous fait voir que les orages peuvent avoir lieu à toutes les heures du jour et de la nuit; mais ils *commencent* le plus souvent entre 3 et 6 heures de l'après-midi, par conséquent à des heures des maxima de la température et de l'humidité absolue et des minima de l'humidité relative; les orages sont les moins fréquents entre 3 — 6 heures du matin, c'est-à-dire à l'époque des minima de la température et de l'humidité absolue et des maxima de l'humidité relative. Quant aux différents groupes, nous avons l'occasion de voir qu'au nord les orages cessent entièrement à 12—3 heures de la nuit; les orages nocturnes sont les plus fréquents dans

les provinces sud et sud-ouest; au Caucase les orages ont souvent lieu à des heures avancées de la soirée. La plus grande différence entre la période nocturne et la diurne se fait remarquer dans les localités où les nuits se distinguent par des températures basses ou bien par une grande humidité. On peut bien s'attendre à ce que les saisons exercent une grande influence sur la période duirne; pendant les premiers mois du printemps et les derniers de l'automne les hautes températures sont plus concentrées sur certaines heures de la journée, tandis qu'en juin et en juillet elles commencent plus tôt et durent plus longtemps presque jusqu'au soir; c'est pourquoi en supposant que les décharges électriques dépendent de la température, pendant les mois d'été les orages ne doivent pas se concentrer exclusivement sur de certaines heures. Ces conclusions peuvent être justifiées par le tableau suivant:

Heures.	après midi 12—3	3—6	6—9	minuit 9-12	après min. 12-3	3—6	6—9	midi 9-12
Avril	19,4%	34,6	2,2	9,4	3,1	3,5	2,3	5,5
Mai.	26,8	29,7	21,5	8,4	3,3	1,7	1,3	7,3
Juin	25,4	28,2	19,4	9,0	3,1	2,4	3,3	9,2
Juillet.	25,8	27,6	17,9	9,3	3,7	3,2	3,1	9,2
Août	19,7	29,7	24,1	9,5	3,1	3,5	3,7	6.7
Septembre.	17,1	33,2	21,6	9,6	2,5	6,0	3,5	6,5

En général le plus grand nombre des orages au printemps et en automne a lieu entre 3—6 heures de la journée; mais peu à peu les orages deviennent plus fréquents pendant les heures plus matinales de la journée (12—3 heures); au mois d'août une prédominance absolue marque 3—6 heures; dans la saison la plus chaude les orages sont plus rares à 6—9 h.

de l'après-midi et plus fréquents le matin à 9—12 midi. Il n'y a d'exception que pour le Caucase et le sud où en été les orages les plus fréquents ont lieu le matin (à 6—9 h.) et le soir (à 6—9 h.) En général le nombre des orages nocturnes est à peu près le même pendant les différents mois et dans diverses localités.

B) *Rapports de l'activité tourbillonnaire et orageuse. Les tourbillons d'orages. Leur position dans le cyclon.*

Il est connu que dans nos latitudes de grands tourbillons (les cyclons) se meuvent sans cesse de l'ouest à l'est; de vastes aires d'un calme relatif, des aires de hautes pressions (les anticyclons), se répandent entre deux séries de cyclons. Il est intéressant de suivre les rapports qui existent entre les orages et la marche des cyclons; dans ce but j'ai suivi pas à pas à l'aide des cartes synoptiques journalières de M. Hoffmeyer (pour une période de trois ans, depuis l'année 1874—jusqu'à l'année 1876) la distribution de la pression et la marche des minima; de sorte que j'ai reçu pour ainsi dire des régistres parallèles de l'activité orageuse et de la tourbillonnaire.

Un examen attentif de ces bulletins (pp. 40—83) prouve assez que l'apparition de l'énergie électrique est liée à la formation et aux mouvements des tourbillons; nous pouvons donc affirmer que nos orages nous sont apportés par les cyclons; ils se rangent ordinairement dans une des parties du cyclon ou bien ils forment un anneau tout autour du cyclon; l'épuisement des orages a lieu toutes les fois qu'il y a dans l'atmosphère des aires de hautes pressions, les anticyclons, que je considère comme des aires de calme dans l'atmosphère. Les orages peuvent avoir lieu, quoique moins intenses, quand une pression uniformément distribuée envahit de grandes étendues; mais dans ce cas les orages se trouvent concentrés dans

la partie saillante de l'isobare, ce qui indique l'existence de tourbillons secondaires, peu considérables (voir le 4 juin 1874, le 2, le 5, le 6 et le 25 juin 1876).

Tout en suivant les mouvements des tourbillons les aires des orages se trouvent transportées vers l'est, le nord est et le nord (voir le 9—12 mai, le 12—15 mai, le 7—9 juin, le 30 juin, le 1 juillet, le 7—8 août 1874; le 5—8 juin, le 10—12 août, le 20—21 mai 1875; le 2, le 26, le 28 mai, le 27 juin, le 6, le 12, le 19, le 26 et le 27, le 29—30 juillet 1876); quelquefois avec l'élargissement du cyclon l'énergie orageuse se répand circulairement. Lorsque les tourbillons se dirigent vers l'est et le nord l'énergie orageuse qui les accompagne, s'affaiblit peu à peu et même finit par s'éteindre; ce qui peut s'expliquer par l'épuisement de l'énergie électrique du cyclon ou bien par les conditions peu favorables aux décharges électriques dépendant de la température et de l'humidité. Les différents tourbillons n'apportent pas la même quantité d'orages; les plus abondants en orages sont les tourbillons du système méridional; ils arrivent de l'Europe centrale et pénètrent en Russie à travers la frontière de l'ouest et celle du sud-ouest; comme les orages se trouvent généralement dans le quadran sud-est du cyclon les tourbillons de ce système doivent apporter une grande quantité de décharges électriques à la Russie sud-ouest; un second système de tourbillons pénètre du côté de la mer Noire ou bien se forme à l'est de la Russie; ces tourbillons se meuvent dans la direction de l'est (voir la carte № II) et augmentent l'énergie orageuse du Volga et de l'Oural. Enfin un troisième système des cyclons d'été, disposé non loin du golfe de Finlande, est pauvre en orages; cette pauvreté peut être expliquée par la température moins élevée et l'humidité considérable de l'air de la région Baltique. Toutes les fois qu'une région de hautes pressions s'établit, l'énergie orageuse cesse d'avoir lieu (voir

le 9—11 mars, le 22—30 mai 1876; le 9 juillet, le 20—21 août 1874; le 6 mai, le 17 août, le 24 août 1875). Les bulletins ont encore fait voir un cas intéressant de l'affaiblissement des orages, en voici les conditions: si une région de hautes pressions envahit l'ouest de l'Europe, les orages cessent en Russie même s'il y existe des cyclons (voir le 16—19 mai, le 26 mai le 5 juin, le 12—15 juin, le 20 juin 1874, le 4 juin, le 22 juin, le 5 et le 8 juillet 1875, le 3—5, le 14—15, le 18 et le 20 mai le 23 juin, le 15 juillet, le 10—11 et le 20—21 août 1876). Ainsi la haute pression qui suppose la cessation de l'activité des tourbillons, a l'air d'être une barrière pour l'activité orageuse. Lorsque les tourbillons venant de l'ouest, renversent enfin l'équilibre qui venait de s'établir dans l'atmosphère, on voit arriver les orages qui les suivent de près. Le cas du 14 mai 1875 présente sous ce rapport un intérêt particulier. Depuis le 12 mai presque toute l'étendue de l'Europe était dominée par une région de hautes pressions; les mouvements des tourbillons furent paralysés et les orages cessèrent en Russie; les minima qui arrivaient de l'ouest étaient rejetés vers le nord de l'anticyclon et planaient au-dessus de la mer Blanche; le 14 mai une aire de basses pressions pénètre à travers la mer Blanche dans la Russie centrale et coupe pour ainsi dire en deux l'aire des hautes pressions quelque peu affaiblies; dans la plaine barométrique ainsi faite les orages reparaissent avec l'arrivée du tourbillon. Le même phénomène a lieu le 20—22 août 1874. Il existe enfin une distribution particulièrement favorable à l'accroissement de l'énergie orageuse. Si à travers la Russie du centre et celle de l'est s'étend une longue bande de hautes pressions (765 mm.) et que du côté de l'ouest on voit approcher des cyclons, l'électricité atteint sa plus grande intensité dans les provinces occidentales de la Russie (voir le 30 juin 1874, le 15 et le 16 juin 1876 et

autres). Tous les exemples que nous venons de citer nous donnent le droit d'établir le fait de la liaison la plus intime entre les orages et les cyclons de nos latitudes; de plus, des conditions particulières de l'humidité et de la température sont indispensables aux décharges électriques en qualité de facteurs secondaires. La prépondérance des hautes pressions est toujours suivie de la diminution de l'activité orageuse. C'est pour la même raison que la classification des orages, établie dans les ouvrages de Mohn et dans les éditions du service français des orages[1]), (Wärmegewitter et Wirbelgewitter) doit être rejetée; mais l'échauffement local à lui seul ne suffit pas à déterminer la formation des orages. Dans la région de l'anticyclon le ciel est serein, l'insolation intense, donc il y a toutes les conditions propres à la formation de l'équilibre instable dans l'atmosphère et des forts courants ascendants; et cependant les orages cessent dans la région de l'anticyclon. Il y a encore une autre circonstance qui parle en faveur de l'absence de deux catégories d'orages: les orages locaux devraient s'épuiser sur lieu; tandis que pour la plupart des cas on peut suivre la marche de l'orage sur l'étendue de plusieurs dizaines et même centaines de lieues, l'orage passe successivement d'un point à un autre s'emparant d'une certaine zône de plus ou de moins d'étendue. La vitesse de la marche de l'orage correspond à celle de la marche du cyclon. Enfin la naissance locale des orages n'explique point la faible activité orageuse le long des bords de la mer Caspienne et du lac Aral, où, tout à côté des vastes réservoirs d'eau, dominent des températures très élevées. Il est très important pour la théorie des orages de déterminer dans

---

[1]) On attribue ordinairement tous les orages du continent (de l'Europe centrale et à plus forte raison, ceux de la Russie) à la formation locale Wärmegewitter), due aux échauffements locaux du sol.

quelle partie du cyclon les orages se trouvent rangés. Afin de donner une solution à cette question nous avons choisi des points, plus ou moins également distribués sur l'étendue de la Russie d'Europe; les jours où l'orage avait eu lieu nous avons déterminé d'après les cartes synoptiques la position relative des dits points dans la région du cyclon. Le tableau suivant donne le nombre des orages qui ont éclaté dans les différentes zônes barométriques, entre l'isobare 735—740 mm., 740—745 mm. et ainsi de suite (en %):

Zônes barométriques.

Mm.	735—740	740—745	745—750	750—755	755—760	760—765	765—770
Avril	—	—	9	37	45	7	2
Mai	—	1	4	32	51	12	—
Juin	—	—	7	25	61	7	—
Juillet	—	—	4	51	44	1	—
Août	—	—	4	37	49	10	—
Septembre	—	1	14	42	26	16	1
Octobre — Mars	3	—	12	24	31	30	—
Total	0,1	0,3	5,8	37,5	48,3	7,9	0,1

Cette table nous fait voir que les zônes orageuses sont strictement disposées dans la région de 755—760 mm. et en partie dans celle de 750—755 mm., c'est-à-dire le long des bords extérieurs du cyclon, sur la frontière des minima et des maxima; d'autre part, la comparaison directe des jours à orage avec les minima nous fait voir que les cyclons qui portent les orages appartiennent à la catégorie des tourbillons peu intenses. Les orages accompagnent rarement les cyclons

réguliers, strictement concentrés et bien plus souvent les minima entourés d'isobares de formes irrégulières et particulièrement par des isobares munies pour ainsi dire de concavités et de protubérances.

Mes recherches sur les données que j'avais sous la main m'ont amené à conclure que les orages en Russie sont des tourbillons de peu d'étendue et de peu de valeur dus à la segmentation d'un grand cyclon dans ses parties périphériques. Nous pouvons affirmer avec d'autant plus de conviction la justesse de cette opinion si nous nous mettons à observer la marche du baromètre en temps d'orage. Pendant l'orage et la grêle le baromètre essuie des oscillations dont le minimum correspond toujours à l'heure de l'orage. M. Mascart (Journal de physique 1879 p. 335) a publié des courbes tracées par le barographe; chaque fois qu'il y a un orage il y a une sinnuosité correspondante très déterminée dans la courbe; M. Mascart a essayé d'expliquer ces sinnuosités par la différente quantité de vapeurs d'eau dans l'air, ce qui exerce une influence sur la pression atmosphérique. J'ai eu recours aux observations horaires à l'Observatoire de Tiflis. Pour être succint je me borne aux cas où l'orage a été accompagné de grêle.

Le 13 mai 1880. Le commencent de l'orage a eu lieu à 3 h. 40 m. du soir, la fin à 5 h. 10 m. du soir; l'orage a recommencé à 11 h. 30 m. du soir et a duré jusqu'à minuit. La grêle a eu lieu à 4 h. de l'après-midi.

La marche du baromètre a été.

à	7	heures	du matin	724,8 mm.	à	1	h.	de l'après-midi	723,5	mm.
»	8	»	»	» 724,7	»	» 2	»	» »	723,0	»
»	9	»	»	» 724,5	»	» 3	»	» »	722,6	»
»	10	»	»	» 724,1	»	» 4	»	» »	723,4	»
»	11	»	»	» 724,0	»	» 5	»	» »	724,4	»
»	12	»	»	» 723,8	»	» 6	»	» »	724,0	»

à 7 h.	de l'après-midi	724,1 mm.	à 10 h.	de l'après-midi	724,5	
» 8 »	» »	724,8 »	» 11 »	» »	724,9	
» 9 »	» »	724,8 »	» 12 »	» »	724,7	

A 4 heures le vent soufflait du SSW_8; vers 5 heures il a subitement tourné dans la direction NW_7, et la température a baissé de 22,1 degré comme elle l'a été à 15,8°. Le 30 juillet 1880. L'orage a commencé à minuit et à duré jusqu'à 3 h. 30′ du matin; il a recommencé à midi 25′ et a duré jusqu' à 1 h. 30′ de l'après-midi, la grêle est tombée à midi 25′; le vent durant tout l'orage était du nord.

La marche du baromètre:

à 9 h.	du matin	723,2 mm.	à 2 h.	de l'après-midi	722,8
» 10 »	» »	723,2 »	» 3 »	» »	722,8
» 11 »	» »	723,2 »	» 4 »	» »	723,7
» 12 »	» »	723,0 »	» 5 »	» »	724,0
» 1 »	» »	723,0 »	à 10 »	du soir	725,9

Le 16 août 1880. L'orage a commencé à 7 h. 40′ du soir et a duré jusqu'à 9 h. 10′ du soir; la grêle a eu lieu à 7 h. 40′ du soir.

La marche du baromètre:

à 9 h.	du mat.	723,4 mm.	2 h	après midi	720,8 mm.	7 h.	après midi	719,2 mm.
» 10 »	» »	723,0 »	3 »	»	719,9 »	8 »	»	719,4 »
» 11 »	» »	722,6 »	4 »	»	719,4 »	9 »	»	719,5 »
» 12 »	» »	721,9 »	5 »	»	719,3 »	10 »	»	720,5 »
» 1 »	» »	721,3 »	6 »	»	719,3 »	11 »	»	720,8 »

Le vent à 7 h. du soir etait du S_3
» » » 8 » » » » » S_8
» » » 9 » » » » » S_9
» » »10 » » » » » W_4

Le 23 avril, 1881. L'orage et la grêle ont duré depuis 1 h. 20, jusqu'à 2 h. de l'après-midi.

à 8 h. du matin	720,6 mm.	à 2 h. de l'après-midi	718,6 mm.
» 9 » » »	720,2 »	» 3 » » »	718,0 »
»10 » » »	719,9 »	» 4 » » »	718,0 »
»11 » » »	719,6 »	» 5 » » »	718,2 »
»12 » » »	719,1 »	» 6 » » »	718,3 »
» 1 » » »	718,6 »	» 7 » » »	719,0 »

Le vent du S (à 3 heures) a tourné d'abord vers le W, le WNW, et le NW et enfin vers le N. Tout en gagnant de plus en plus en force il a atteint 24 kilomètres par heure. Le 23 mai 1881. L'orage commencé à 2 h. 50' de l'après-midi a duré avec intermittences jusqu' à 6 h. du soir; le commencement de la grêle a eu lieu à 5 h. 5' du soir. Le baromètre a été.

à 10 h. du matin	723,6 mm.	à 4 h. de l'après-midi	721,5 mm.
» 11 » » »	723,3 »	» 5 » » »	722,2 »
» 12 » » »	722,9 »	» 6 » » »	722,4 »
» 1 » » »	722,4 »	» 7 » » »	723,1 »
» 2 » » »	722,1 »	» 8 » » »	723,7 »
» 3 » » »	721,7 »	» 9 » » »	723,7 »

Le vent de l' E_9 (à 4 h.) soudain a tourné vers le NW_{15} (à 5 h.) et a considérablement fait baisser la température (à 5 h. 23°, à 6 h. 15°, 9).

Le 13 juin 1881. La grêle a tombé depuis 4 h. 20' jusqu' à 4 h. 25'. Le baromètre a été

à 10 h. du m.	718,9 mm.	à 2 h. de l'apr.-m.	719,8	à 6 h. de l'apr.-m.	722,5
» 11 » » »	718,4 »	» 3 » » »	720,5	» 7 » » »	723,4
» 12 » » »	718,1 »	» 4 » » »	721,8		
» 1 » » »	717,8 »	» 5 » » »	722,2		

Le vent sans changer de direction a gagné en force, avant midi il a été du NW_8, à trois heures il a atteint une vitesse de 78 kilomètres par heure; tandis que la température s'est abaissée de 20,2 degré qu'elle a été à 3 heures jusqu'à 13,8° vers 4 heures.

Le 4 juin 1882. L'orage a commencé à 3 heures de l'après-midi et avec intermittences a duré jusqu'à 6 heures; vers 9 h. 20′ il a recommencé et a duré jusqu'à 11 h. 40′ du soir; la grêle est tombée à 6 h. La marche du baromètre:

						à 7 h.	715,5
à 7 h. du matin	719,1	à 11 h.	716,3	à 3 h.	716,4	à 8 h.	716,1
» 8 » »	718,3	» 12 midi	715,4	» 4 »	714,7	» 9 »	715,9
» 9 » »	717,5	» 1 h.	716,2	» 5 »	714,7	» 10 »	715,6
						» 11 »	715,3
» 10 » »	717,0	» 2 »	714,8	» 6 »	714,9	» 12 mn.	715,1

L'orage et la grêle ont été dans la partie postérieure du tourbillon accompagnés d'un vent NW d'une grande violence qui, tout en gagnant de plus en plus de force, atteignit vers 7 h. une vitesse de 22 kilomètres par heure. Un calme presque absolu a régné depuis midi jusqu'à 3 heures. J'ai passé en revue bien des numéros des Annales de l'Observatoire central de St.-Pétersbourg et partout j'ai trouvé la même chose: tout orage avec ou sans grêle est toujours accompagné par une oscillation du baromètre. On peut directement faire voir l'existence des tourbillons d'un ordre supérieur, il n'y a qu'à établir la distribution de la pression et celle des vents pour le jour de l'orage. En Russie, où le service météorologique est très peu nombreux, cette construction est très difficile à faire; les cartes d'isobares ne peuvent être dressées que pour le sud-ouest et les provinces de la Baltique. Nous illustrons nos déductions par des exemples. Le 20 et le 21 mai 1874 une grande activité orageuse a été remarquée dans la partie sud-ouest de la Russie; un orage a été observé le 20 à Kichinef, à Sévastopol, à la phare de Tarkanhut, orage et grêle à Otchakof, grésil à Elisabethgrad; le 21 mai un orage a été observé à Elisabethgrad, à Otchakof, à Odessa, orage et grêle à Nikolaïef. Le cyclon principal (755 mm.) se trouvait dans la partie

ouest de la Russie entre 50 et 55° de la latitude septentrionale au sud-est de Vilna; la construction d'une carte détailleé des isobares et de la direction des vents pour le sud-ouest de la Russie a fait voir la présence d'un petit tourbillon (752,1 mm.) non loin de Kichinef (carte II) dans la partie sud-est du cyclon principal. Le lendemain le cyclon principal s'est transporté vers le nord-est (près de Kasan), tandis que son isobare (750 mm.) avait formé une sinnuosité très marquée dans la direction SSW; le petit tourbillon (le tourbillon partiel) l'avait suivi dans sa marche (carte III). On peut observer le 1 août 1874 un autre exemple de la formation d'un tourbillon à orage. Le cyclon principal (745 mm.) planait au-dessus de la mer du Nord; un cyclon secondaire s'était formé près du golfe de Riga; des décharges électriques étaient observées à Pétersbourg, à Kronstadt, à Réval, au phare de Gogland, à Riga, au port Baltique. Le 19 juin 1874 une aire de faibles pressions (750 mm.) s'étendait sur le nord-ouest de l'Europe. La Russie était traversée par l'isobare de 760 mm. d'une forme très irrégulière; le sud-ouest de la Russie se trouvait près de l'isobare de 760 mn. Un orage a été observé à Nicolaïef, à Kichinef, à Odessa, à la phare Tarkanhut et à Sévastopol. Les cartes des isobares ont fait voir à 7 h. du matin un petit tourbillon non loin de Kichinef; le vent sud-est soufflait à Odessa et à Nicolaïef, celui de l'est à Kichinef; à 9 heures du soir le centre du tourbillon s'était transporté à l'est (vers le Dniéper); à Kichinef et à Nicolaïef le vent avait gagné en force tout en s'étant porté au nord-ouest, et au nord à Odessa.

Si nous considérons les orages comme de petits tourbillons errant sur les bords extérieurs des grands cyclons, il nous sera facile d'expliquer les différentes circonstances qui accompagnent le mouvement des orages. Il est connu que les orages se propagent en bandes étroites et pour la plupart re-

courbées sur elles-mêmes; la largeur de cette sorte de zônes est de plusieurs dizaines de lieues; d'après le service météorologique français les zônes orageuses généralement correspondent à la direction des isobares et s'étendent du SW vers le NE; mais si le centre du cyclon se trouve au sud de la France ces zônes s'étendent de l'est à l'ouest; cette circonstance s'explique parfaitement par la théorie des petits tourbillons; les tourbillons d'ordre supérieur ont un diamètre de peu d'étendue et sont entraînés dans les régions des cyclons par le courant général, c'est-à-dire dans la partie sud du cyclon ils se meuvent de l'ouest et du sud-ouest et dans celle du nord de l'est.

Plusieurs observateurs français ont remarqué que les masses orageuses ont l'air de se résoudre pour ainsi dire en filaments d'orage qui divergent dans tous les sens tout en se ramifiant, se confondant, s'entrelaçant (Atlas météorologique de France). Mais sur les cartes, au milieu du labirinthe apparent des filaments d'orage, presque toujours il est possible de débrouiller leur courant général; certes la direction de ce courant dépend de la position du cyclon principal et de sa marche; ces filaments marquent les routes des petits tourbillons et dans ces sortes d'arabesques on peut voir en miniature le reflet des mouvements compliqués des cyclons; on y trouve des noeuds, des boucles, des courbes bizarres, des spirales et d'autres mouvements capricieux, propres à la marche des cyclons (voir mon livre «Les progrès récents de la Météorologie» I, partie p. 184, carte V et VI). Bien souvent deux stations voisines ont un nombre annuaire d'orages bien différent, c'est ce qui peut être expliqué par le peu d'étendue du diamètre de ces petits tourbillons.

Les changements subits des vents pendant l'orage doivent dépendre des mouvements des petits tourbillons emportés par le courant général qui règne dans la région du cyclon. Si le petit tourbillon vient à se former dans

la partie antérieure du grand cyclon [1]) les courants de l'est du petit tourbillon seront renforcés par le courant général qui règne dans la région du cyclon, tandis qu'à l'ouest les mouvements du petit tourbillon devront être paralysés par le mouvement général du grand cyclon; par conséquent dans ce cas si tout le système se meut dans le sens de l'est, les vents forts du sud et du sud-ouest doivent se porter au point situé sur la route du petit tourbillon, au nord-ouest et à l'ouest, tout en perdant d'intensité. Comme exemple du cas échéant nous pouvons citer à Tiflis un orage le 16 août 1880 dont il est question à la page 19.

Dans le cas où le petit tourbillon se trouverait dans la partie postérieure du cyclon, si tout le système se mouvait vers l'est le vent sud-ouest, du faible qu'il était, se porterait au nord-ouest tout en devenant très fort. Comme exemple frappant d'un changement pareil nous pouvons citer les orages du 23 avril et du 13 juin 1881.

Il nous reste encore à voir dans quel quadran du cyclon les tourbillons orageux naissent par excellence. Pour aborder la solution de cette question nous pouvons nous servir en premier lieu des données que nous offre le service météorologique des orages; tâchons de définir quels sont les points de l'horizon qui le plus souvent nous envoient nos orages, quelle est la direction du vent qui prédomine pendant l'orage et d'où nous viennent les nuages?—4519 bulletins d'orages nous ont servi à determiner les points de l'horizon qui nous envoient les orages Ces orages se distribuent de la manière suivante:

[1]) Voir mon mémoire T. I, fig. 3.

Du côté	N	NE	E	SE	S	SO	O	NO
Prov. du nord .	5,6	1,8	1,8	11,1	14,8	24,1	31,5	9,3
» de la Baltiq.	1,2	2,9	2,9	15,6	12,7	34,0	20,1	10,6
» de l'ouest .	5,3	6,2	6,1	13,0	14,3	26,6	14,0	14,5
» du centre	7,2	4,8	6,4	9,7	18,6	23,3	21,2	9,8
» du sud. .	7,4	10,5	3,2	3,2	16,8	30,5	10,5	17,9
Caucase . . .	11,0	14,1	6,1	7,7	4,7	18,1	12,0	26,0
Sibérie . . .	8,6	6,4	4,7	7,9	15,1	23,5	14,2	19,5
Oural. . . .	6,6	6,5	5,8	6,9	12,6	19,2	25,8	16,6
Total	7,2	6,6	5,4	9,0	14,1	22,7	18,7	16,3

La plupart des orages nous vient, comme on le voit, du sud-ouest, de l'ouest et du nord-ouest, les orages les moins fréquents sont de l'est. Selon les différentes localités ces rapports ne présentent presque pas de variations; sauf les provinces du Nord et l'Oural où le point de départ des orages est l'ouest; le Caucase offre une particularité remarquable — les orages les plus fréquents y viennent du nord-ouest ainsi que du nord et du nord-est. Or, on peut attendre le mouvement sud-ouest des orages dans la partie sud-est du cyclon, le mouvement ouest et nord-ouest dans celle du sud et du sud-ouest, par conséquent les orages sont concentrés dans le quadran du sud et du sud-est. A l'Oural la région orageuse est plutôt déviée vers le sud; tandis que le quadran du sud-est prédomine d'une manière absolue dans la Russie d'Europe et la Sibérie. Plus loin j'ai fait des recherches sur l'influence de la période annuelle par rapport à la direction des orages; les orages venant des différents points de l'horizon se trouvent distribués de la manière suivante par mois (en %).

Provinces du centre.

	N	NE	E	SE	S	SO	O	NO
Mai. . .	3,1	6,1	5,5	12,3	14,1	33,7	14,7	10,4
juin . .	5,5	3,7	3,7	14,1	15,1	25,8	18,9	13,1
juillet . .	7,7	4,7	7,0	8,8	19,0	20,9	16,5	15,4
août . .	7,1	5,0	2,3	12,2	14,5	24,9	20,5	14,5

Oural.

	N	NE	E	SE	S	SO	O	NO
Mai. . .	8,8	—	6,5	4,3	13,0	23,9	37,0	6,5
juin . .	5,2	4,4	3,0	4,4	18,5	22,2	31,1	11,1
juillet . .	6,9	8,2	12,6	4,4	16,4	13,8	25,8	11,9
août . .	3,2	7,9	11,1	7,9	17,5	19,1	23,8	9,5

Sibérie.

	N	NE	E	SE	S	SO	O	NO
Mai. . .	4,0	5,3	1,3	4,0	8,0	28,0	21,3	28,0
juin . .	5,4	4,3	2,7	4,3	19,5	21,6	15,7	26,5
juillet . .	7,0	7,3	3,8	10,1	18,9	24,1	9,8	18,9
août .	12,2	5,6	9,3	2,8	15,0	26,2	12,1	16,8

On peut remarquer toujours la même particularité dans la distribution mensuelle des orages au printemps et en automne, les orages se trouvent concentrés dans le quadran sud-est; tandis qu'en été ils sont disséminés sur toute la circonférence. Nous obtenons presque les mêmes résultats en observant la direction du mouvement des nuages et du vent pendant l'orage. J'ai défini la direction du vent pour 3829 orages; comme les résultats des différentes localités sont les mêmes, j'ai trouvé possible de les réunir en trois groupes:

Direction du vent	N	NE	E	SE	S	SO	O	NO	Calme
Sibérie	8	8	8	7	15	21	11	19	3
Russie	5	6	7	9	13	24	18	12	6
Oural.	4	9	7	8	9	17	19	14	12

La direction prépondérante du vent montre que les orages sont concentrés dans le quadran sud-est; une déviation se fait remarquer à l'Oural, où le maximum est pour l'ouest; par conséquent, les orages se trouvent particulièrement dans la partie méridionale du cyclon. La coïncidence incomplète des chiffres s'explique par la différence très souvent observée de la direction du vent et de celle des nuages. Il faut encore y joindre les quelques données qui ont rapport à la direction du mouvement des nuages.

Russie

	N	NE	E	SE	S	SO	O	NO
septembre-avril	5	8	6	13	15	28	16	9
mai	9	8	9	13	14	21	17	9
juin	8	8	9	12	12	24	15	12
juillet . . .	11	8	11	9	14	19	16	11
août . . .	7	8	10	10	14	23	18	10
total. . . .	8	8	9	11	14	23	16	10
Oural . . .	8	8	6	9	11	20	21	17
Sibérie . . .	10	11	5	10	12	20	11	21

En combinant ces trois éléments nous en venons presqu'aux résultats identiques, c'est-à-dire que les orages sont concentrés dans la partie du cyclon où soufflent les vents sud-ouest; cette partie du cyclon est un secteur qui passe entre le sud et le sud-est; au printemps et en automne ce quadran est plus étroit; en été et au mois de juillet surtout les orages sont plus dispersés le long de toute la circonférence. Mais pour résoudre la question de la distribution des orages j'ai choisi les stations les plus régulièrement répandues sur l'étendue de la Russie d'Europe et j'ai trouvé pour chacune d'entre elles la position relative par rapport au centre du

cyclon le jour de l'orage; j'ai passé en revue **1416** cas et les stations se partagent de la manière suivante en $^0/_0$.

Partie du cyclon	N	NE	E	SE	S	SO	O	NO
Avril . . .	—	5,4	7,1	62,5	16,1	8,9	—	—
Mai	1,2	15,6	10,7	49,4	7,0	12,4	1,6	2,1
Juin	1,7	14,2	5,9	35,4	9,4	28,1	1,4	3,8
Juillet . . .	4,2	9,7	9,5	36,4	11,1	18,6	2,3	8,2
Août. . . .	2,6	15,5	6,0	37,4	9,1	21,5	0,4	7,5
Semptembre .	—	9,9	12,1	53,9	7,1	15,6	0,7	0,7
Année . . .	2,3	12,6	8,4	41,4	9,5	19,3	1,4	5,1

Cette table confirme d'une manière frappante nos conclusions; le plus grand pourcent des orages (41,4$^0/_0$) se concentre dans le quadran sud-est; pendant la saison plus froide (avril, septembre) les orages sont concentrés dans la partie sud-est, en été ils se dispersent le long de la circonférence. Une pareille distribution des zônes orageuses doit dépendre des propriétés météorologiques du cyclon ou bien des conditions locales; probablement les deux agents y contribuent pour leur part; mais il faut remarquer que les dépôts atmosphériques et les températures élevées trouvent leur foyer dans la partie sud-est des cyclons de l'Europe. M. Braounof a tracé plus de cent cartes des lignes isothermiques pour 48 minima (l'anneé 1874—78); elles font voir que la température éprouve toujours une hausse vers le sud, le sud-est et le sud-ouest, moins souvent vers l'ouest et l'est, encore plus rarement vers le nord-ouest, le nord-est et le nord. Les lignes isothermiques forment souvent des contours fermés renfermant les régions des températures maxima et minima. Ces régions se trouvent pour la plupart dans les parties sud et sud-est du cyclon.

Il nous reste à savoir si la distance (dans le sens barométrique) séparant les orages du centre est la même pour tous les quadrans. Dans ce but j'ai défini la position de cha-

que orage par rapport au cyclon (quadran) et la situation barométrique de la station; j'ai trouvé que dans les différents quadrans l'anneau orageux est toujours également éloigné du centre.

C) *Distribution geógraphique de la grêle. Les tourbillons à grêle; leur position dans les cyclons.*

Les bulletins d'orages nous offrent le moyen de connaîte la distribution géographique de la grêle et les liens intimes qui existent entre la grêle et le mouvement tourbillonnaire de l'atmosphère. La comparaison de la distribution des orages, de la grêle et des dépôts atmosphériques pendant la même période nous fait voir que tous ces trois éléments ont une marche parallèle. Les localités pauvres en dépôts atmosphériques et en orages le sont également en grêle (Baku, fort Alexandre et autres). Les nord est pauvre en grêle; le nombre de jours avec orages y est près do 0,5 par an. Il augmente dans les provinces de la Baltique (0,6) s'élevant le long du golfe de Finlande et baissant vers le sud; la grêle est surtout faible à Vindau (0,3), à Mitau (0,3) conformément au nombre restreint des orages). Dans les provinces de l'ouest le nombre de jours avec grêle augmente vers le sud, et autant que nous pouvons en juger d'après les données dont nous disposons une grande hausse de l'activité orageuse et de celle de la grêle se fait remarquer dans la région qui embrasse le sud-ouest de la Russie; par exemple à Gorodistche le nombre de jours à grêle est 1,7 et à Soloviefka (gouvernement de Kiew), 1,9 par an; c'est également ici qu'on observe de fréquents orages. Cette intensité s'explique comme nous l'avons dit par la direction des voies des cyclons d'été; les dites localités se trouvent justement dans la région des routes des deux systèmes des cyclons principaux à l'ouest: des cyclons qui nous arrivent du nord-ouest de l'Europe et de ceux de

l'Europe du sud et du centre. Au sud, le long des bords de la mer Noire le nombre de jours avec grêle diminue également (0,8) il est surtout très restreint dans les points les plus méridionaux (Sévastopol 0,2) qui se trouvent situés au-delà de la sphère de l'activité du principal système des cyclons. Une nouvelle recrudescence de la grêle se fait remarquer à l'est de la Russie (gouvernement de Tambof 3,2). Cette crête de grêle pour ainri dire, qui traverse au sud-est une plaine de peu d'étendue, remonte vers le Caucase (Stavropol 2,5, Tiflis — 1,8 et Biely Kloutch — 4,2). Le long du littoral de la mer Noire la grêle tombe généralement en hiver. Le nombre de jours avec grêle augmente également vers l'Oural et la Sibérie occidentale (Tomsk 2,1) et diminue vers l'est. Toutes les localités du sud pauvres en dépôts atmosphériques et en orages sont également peu fréquentées par la grêle; le littoral de la mer Caspienne et les domaines russes de l'Asie centrale sont du nombre. A Baku, par exemple, pendant une période de 13 ans on n'a point vu tomber la grêle; à Tachkent il y a eu un cas de grêle pendant une période de 10 ans.

Les rapports entre les orages et la grêle se font également remarquer dans les périodes annuelles et diurnes. Le minimum annuel, comme nous l'ont fait voir les tables, correspond au maximum des orages et des dépôts atmosphériques.

La marche diurne de la grêle est absolument parallèle à celle des orages. Mes ces deux périodes (celui des orages et de la grêle) sont plus nettement exprimées que la période duirne de la pluie ce qui nous fait présumer que les phénomènes orageux ne dépendent pas exclusivement de la quantité des dépôts atmosphériques mais aussi des conditions purement locales. Les bulletins orageux nous présentent la distribution suivante de la grêle selon les heures en %:

Heures.	12—3	3—6	6—9	minuit 9-12	12-3	3—6	6—9	midi 9-12
Russie d'Europe.	35	26	15	4	1	3	2	14
Oural . .	39	29	17	5	2	—	1	7
Caucase .	29	40	18	8	—	—	—	5
Sibérie. .	30	43	8	5	1	1	4	8
Total . .	34	32	13	5	1	2	2	11

Les rapports des orages et de la grêle avec les tourbillons peuvent être constatés grâce aux cartes synoptiques ou bien à l'étude minutieuse des conditions de la formation de la grêle. Les nombreux exemples que nous avons cités dans notre mémoire original nous font clairement voir les rapports qui existent entre la grêle et les perturbations cycloniques de l'atmosphère; plus haut nous avons cité bon nombre d'exemples où le phénomène de la grêle a été immanquablement accompagné d'une baisse caractéristique dans la courbe barométrique indiquant l'existence de petits tourbillons d'un ordre supérieur; par conséquent, tout orage accompagné de la grêle est un petit tourbillon secondaire. Il nous importe de savoir quelles sont les parties du cyclon généralement occupées par les tourbillons à grêle.

Dans ce but nous allons déterminer quels sont les points de l'horizon d'où nous viennent les orages, accompagnés de la grêle, ainsi que la direction du vent et celle des nuages pendant l'orage. Les tables que nous avons reçues et réunies pour être succint en groupe nous font voir ce qui suit en %:

D'où est venu l'orage	N	NE	E	SE	S	SO	O	NO	
Russie.	7	2	4	8	17	25	24	13	
Oural	9	5	2	8	10	24	24	18	
Sibérie.	10	6	4	5	16	28	10	21	
Total	8	4	4	7	15	25	20	16	
Direction du vent pendant l'orage avec grêle									calme
Russie.	11	3	5	11	14	24	14	14	4
Oural	7	8	8	5	6	26	20	16	4

Sibérie	9	11	2	10	19	25	13	10	1
Total	10	7	5	9	13	25	15	13	3
Direction des nuages									
Russie.	8	5	6	13	14	25	18	11	
Oural	10	5	1	5	10	34	16	19	
Sibérie.	9	9	2	10	13	31	11	13	
Total	8	6	4	10	13	29	16	14	

Toutes ces tables nous donnent les mêmes résultats; les orages et la grêle, quoique possibles dans toutes les parties du cyclon, se trouvent particulièrement dans la partie sud-est de la région des basses pressions, c'est-à-dire dans la région des températures les plus élevées. Il n'y a d'exception que pour le Caucase où les orages se trouvent refoulés dans le quadran de l'ouest.

Il nous reste à savoir dans quelle partie du cyclon et dans quelle aire de pression il grêle? Pour répondre à cette question nous prendrons les cartes synoptiques.

Pression . .	740—45	745—750	750—755	755—760	760—765
Nombre de jours avec grêle en %	0,6	4,6	35,5	48,0	11,2

Partie du cyclon .	N	NE	E	SE	S	SO	O	NO
Nombre de jours avec grêle % . .	—	9,4	6,2	46,9	15,6	15,6	2,1	4,2

Nous venons de voir que la grêle est concentrée dans le quadran sud-est et dans l'aire 750—760 mm. Ainsi donc l'orage et la grêle sont des phénomènes d'une même nature— ce sont des tourbillons d'un ordre supérieur, naissant dans les parties périphériques des grands cyclons et particulièrement dans leurs parties dangereuses. Il est à remarquer que les terribles tourbillons qui s'appellent tornados se forment dans la même partie du cyclon. Ainsi l'on dirait qu'il y existe un point d'attouchement entre la formation de nos orages et ces fléaux qu'on appelle tornados.

Къ вопросу о разложеніи аналитическихъ функцій въ непрерывныя дроби.

И. Слешинскій.

При разложеніи нѣкоторыхъ аналитическихъ функцій въ непрерывныя дроби получаются для числителей и знаменателей подходящихъ дробей линейныя однородныя дифференціальныя уравненія втораго порядка съ алгебраическими коэффиціентами.

Еще Gauss въ сочиненіи «Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi» нашелъ, что знаменатели подходящихъ дробей разложенія $\frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}$ въ непрерывную дробь удовлетворяютъ уравненіямъ вида

$$(1-x^2)\frac{d^2Q_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dQ_n(x)}{dx} + n(n+1)Q_n(x) = o$$

Laguerre въ нѣсколькихъ мемуарахъ[1]) разсматриваетъ частные случаи, приводящіе къ дифференціальнымъ уравненіямъ подобнаго вида. Наиболѣе общій изъ разсматриваемыхъ имъ случаевъ есть разложеніе въ непрерывную дробь функціи $e^{F(x)}$, гдѣ $F(x)$—цѣлая алгебраическая функція. Пріемъ, посредствомъ

---

[1]) Bul. de la Soc. m. T. V стр. 79—92. Journal de math. Série III T. VI стр. 99—110.

котораго онъ получаетъ дифференціальныя уравненія для числителей и знаменателей подходящихъ дробей, сходенъ съ пріемомъ, употребляемымъ Heine[1]) при разложеніи въ непрерывную дробь функціи

$$\int_0^1 \frac{dz}{(x-z)\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

Работы Laguerr'а приводятъ къ вопросу: въ какихъ случаяхъ получаются для числителей и знаменателей подходящихъ дробей дифференціальныя уравненія разсматриваемаго вида съ алгебраическими коэффиціентами.

Стараясь найти рѣшеніе этого вопроса, я обратилъ вниманіе на извѣстный мемуаръ Lagrange'а о непрерывныхъ дробяхъ[2]).

Въ этомъ мемуарѣ, который носитъ заглавіе «Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral», Lagrange указываетъ пріемъ разложенія въ непрерывную дробь функція, опредѣляемой дифференціальнымъ уравненіемъ. Онъ прилагаетъ свой пріемъ къ весьма общему дифференціальному уравненію

$$N+Py+Qy^2+R\frac{dy}{dx}=o$$

гдѣ N, P, Q, R суть какія либо функціи перемѣнной независимой x. Если въ этомъ уравненіи положить

$$y=\frac{\xi}{1+y_1}$$

гдѣ ξ данная функція, а y_1 — новая неизвѣстная функція, то получится уравненіе:

---

[1]) Handbuch der Kugelfunctionen 1878. Bd. 1. стр. 295.

[2]) Oeuvres. T. IV. стр. 301.

$$N_1+P_1y_1+Q_1y_1{}^2+R_1\frac{dy_1}{dx}=o\,,$$

причемъ:

$$N_1=N+P\xi+Q\xi^2+R\frac{d\xi}{dx}$$

$$P_1=2N+P\xi+R\frac{d\xi}{dx}$$

$$Q_1=N$$

$$R_1=-R\xi$$

т. е. разсматриваемое уравненіе сохраняетъ свой видъ при такомъ преобразованіи.

Я разсматривалъ вообще аналитическую функцію, какъ опредѣляемую уравненіемъ этого вида, и пришелъ къ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ для числителей и знаменателей подходящихъ дробей. При этомъ оказалось, что въ общемъ случаѣ получаются уравненія четвертаго порядка, въ двухъ частныхъ случаяхъ, однако, получаются уравненія втораго порядка.

Этотъ пріемъ полученія дифференціальныхъ уравненій приложенъ мною ко всѣмъ разложеніямъ, которыя разсматривалъ Laguerre. Сверхъ того тѣмъ же путемъ найденъ результатъ Heine, относящійся къ разложенію гипергеометрическаго ряда въ непрерывную дробь [1]).

Разсужденія, касающіяся этихъ вопросовъ имѣютъ формальный характеръ, т. е. въ нихъ не принимается во вниманіе область сходимости разсматриваемыхъ безконечныхъ формъ (рядовъ и непрерывныхъ дробей).

---

[1]) Handbuch стр. 275.

Желая разъяснить себѣ вопросъ сходимости непрерывныхъ дробей, я обратился къ изслѣдованіямъ Thomé[1]). Эти изслѣдованія привели меня къ нѣкоторымъ общимъ заключеніямъ, которыя изложены ниже.

Когда работа моя была уже окончена, я познакомился съ новой статьей Laguerre'a въ Journal d. Math. T. 1. 1885 года, изъ которой увидѣлъ, что Laguerre также обратился къ функціямъ, опредѣляемымъ дифференціальнымъ уравненіемъ, ограничиваясь, впрочемъ, уравненіями, не содержащими квадрата функціи.

Работу свою я раздѣлилъ на двѣ главы. Въ первой главѣ изложено: въ первомъ § пріемъ Lagrange'a въ примѣненіи къ разсматриваемому мною уравненію, во второмъ § разсмотрѣны нѣкоторые частные случаи, въ §§ отъ 3 до 6 выведены дифференціальныя уравненія для числителей и знаменателей подходящихъ дробей, въ седьмомъ § общія формулы прилагаются къ нѣсколькимъ частнымъ случаямъ, въ восьмомъ § указанъ переходъ къ другой формѣ разложенія. Во второй главѣ, въ первомъ § разсматривается сходимость разложенія корня квадратнаго уравненія въ непрерывную дробь, во второмъ § изложены нѣкоторыя общія соображенія по вопросу о сходимости.

27 ноября 1885 года.

---

[1]) Crelle Bd. 66. Ueber die Kettenbruchentwickelung der Gausschen Function $F(\alpha, 1, \gamma, x)$. Crelle Bd. 67. Ueber die Kettenbruchentwickelung des Gausschen Quotienten $\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}$

ГЛАВА I.

§ 1.

1. Разсмотримъ дифференціальное уравненіе

$$xf(x)+\varphi(x)y+\psi(x)y^2+x\theta(x)\frac{dy}{dx}=o \quad ,$$

гдѣ $f(o)$, $\varphi(o)$, $\psi(o)$ и $\theta(o)$ неравны нулю. Приложимъ къ этому уравненію пріемъ Lagrange'а для разложенія интеграловъ дифференціальныхъ уравненій въ непрерывныя дроби[1]). Введемъ обозначеніе

$$\varphi(x)+\theta(x)=\Phi(x).$$

Полагая
$$y=-\frac{f(o)x}{\Phi(o)(1+y_1)} \, ,$$

найдемъ уравненіе:

$$xf_1(x)+\varphi_1(x)y_1+\psi_1(x){y_1}^2+x\theta(x)\frac{dy_1}{dx}=o \quad ,$$

гдѣ

$$\psi_1(x)=\frac{\Phi(o)f(x)}{f(o)}$$

$$\varphi_1(x)=2\psi_1(x)-\Phi(x)=\frac{2\Phi(o)f(x)}{f(o)}-\Phi(x)$$

---

[1]) l. c.

$$f_1(x)=\frac{f(x)\Phi(o)-f(o)\Phi(x)}{xf(o)}+\frac{f(o)\psi(x)}{\Phi(o)}.$$

Отсюда вообще, предполагая, что всякій разъ $f_\nu(o), \varphi_\nu(o), \psi_\nu(o)$ неравны нулю, послѣ ν преобразованій вида

$$y_{\nu-1}=-\frac{f_{\nu-1}(o)x}{\Phi_{\nu-1}(o)(1+y_\nu)}$$

находимъ уравненіе вида:

$$xf_\nu(x)+\varphi_\nu(x)y_\nu+\psi_\nu(x)y_\nu^2+x\theta(x)\frac{dy_\nu}{dx}=o$$

причемъ

$$\Phi_\nu(x)=\varphi_\nu(x)+\theta(x)$$

$$\psi_\nu(x)=\frac{\Phi_{\nu-1}(o)f_{\nu-1}(x)}{f_{\nu-1}(o)}$$

$$\varphi_\nu(x)=\frac{2\Phi_{\nu-1}(o)f_{\nu-1}(x)}{f_{\nu-1}(o)}-\Phi_{\nu-1}(x)$$

$$f_\nu(x)=\frac{f_{\nu-1}(x)\Phi_{\nu-1}(o)-f_{\nu-1}(o)\Phi_{\nu-1}(x)}{xf_{\nu-1}(o)}+\frac{f_{\nu-1}(o)\psi_{\nu-1}(x)}{\Phi_{\nu-1}(o)}$$

2. Отсюда слѣдуетъ, что

$$y=\cfrac{-\frac{f(o)}{\Phi(o)}x}{1-\cfrac{\frac{f_1(o)}{\Phi_1(o)}x}{1-\ldots 1-\cfrac{\frac{f_\nu(o)x}{\Phi_\nu(o)}}{1+y_{\nu+1}}}}$$

Изъ этого равенства получается формально разложеніе функціи y въ безконечную непрерывную дробь

$$y=\cfrac{-\dfrac{f(o)}{\Phi(o)}x}{1-\cfrac{\dfrac{f_1(o)}{\Phi_1(o)}x}{1-\ldots}}$$

3 Изъ весьма сложныхъ уравненій, опредѣляющихъ функціи $\varphi_\nu, f_\nu, \psi_\nu$, удается найти эти функціи лишь въ нѣкоторыхъ весьма частныхъ случаяхъ. Изъ нихъ однако въ общемъ случаѣ слѣдуетъ, что

$$\psi_\nu(o)=\varphi_\nu(o)=\Phi_{\nu-1}(o)=\Phi(o)+(\nu-1)\theta(o)=\varphi(o)+\nu\theta(o)$$

Такъ что въ выраженіяхъ числителей звеньевъ

$$-\frac{f_\nu(o)x}{\Phi_\nu(o)}$$

знаменатели опредѣляются весьма просто. Принявъ въ соображеніе послѣднее равенство, можемъ придать уравненіямъ, опредѣляющимъ функціи f_ν, φ_ν и ψ_ν, слѣдующій видъ:

$$\psi_\nu(x)=\{\varphi(o)+\nu\theta(o)\}\frac{f_{\nu-1}(x)}{f_{\nu-1}(o)}$$

$$\varphi_\nu(x)=2\psi_\nu(x)-\Phi_{\nu-1}(x)$$

$$xf_\nu(x)=\psi_\nu(x)-\Phi_{\nu-1}(x)+\frac{f_{\nu-1}(o)}{\varphi(o)+\nu\theta(o)}x\psi_{\nu-1}(x)$$

Послѣднее уравненіе можетъ быть также написано такъ:

$$xf_\nu(x)=\psi_\nu(x)-\Phi_{\nu-1}(x)+xf_{\nu-1}(x)\frac{\psi_{\nu-1}(x)}{\psi_\nu(x)}$$

§ 2.

4. Разсмотримъ теперь одинъ частный случай. Пусть будетъ дано уравненіе:

$$A_0x+(B_0+B_1x)y+C_0y^2+(D_0+D_1x)xy'=o\ ,$$

гдѣ A_0, B_0, B_1, C_0, D_0 и D_1—постоянныя величины. Развернемъ въ непрерывную дробь тотъ интегралъ этого уравненія, который при $x=o$ обращается въ o.

Для этого случая по общимъ формуламъ имѣемъ:

$$f(x)=A_0\ ,\ \varphi(x)=B_0+B_1x\ ,\ \psi(x)=C_0$$

$$\theta(x)=D_0+D_1x\ ,\ \Phi(x)=B_0+D_0+(B_1+D_1)x$$

$$f(o)=A_0\ ,\ \varphi(o)=B_0\ ,\ \psi(o)=C_0\ ,\ \theta(o)=D_0\ ,\ \Phi(o)=B_0+D$$

$$\varphi_\nu(o)=B_0+\nu D_0\ ,\ \psi_\nu(o)=B_0+\nu D_0 \text{ при } \nu>o$$

$$\Phi_\nu(o)=B_0+(\nu+1)D_0\ ,\qquad \psi_0(o)=\psi(o)=C_0$$

$$\varphi_\nu(x)=2\psi_\nu(x)-\Phi_{\nu-1}(x)$$

$$\varphi_\nu(x)=2B_0+2\nu D_0-\Phi_{\nu-1}(x)\ ,\ \nu>o.$$

Слѣдовательно:

$$\varphi'_\nu(x)=-\Phi'_{\nu-1}(x)=-\varphi'_{\nu-1}(x)-\theta'(x)$$

$$=-\varphi'_{\nu-1}(x)-D_1$$

Откуда

$$\varphi'_\nu=-\frac{D_1}{2}+(-1)^\nu\left(B_1+\frac{D_1}{2}\right)$$

Слѣдовательно

$$\varphi_\nu(x)=\varphi_\nu(o)+x\varphi_\nu'(o)=B_0+\nu D_0+x\left(-\frac{D_1}{2}+(-1)^\nu\left(B_1+\frac{D_1}{2}\right)\right)$$

Отсюда

$$\Phi_\nu(x)=B_0+(\nu+1)D_0+x\left(\frac{D_1}{2}+(-1)^\nu\left(B_1+\frac{D_1}{2}\right)\right)$$

Поэтому

$$f_\nu(o)=-\left(\frac{D_1}{2}+(-1)^{\nu-1}\left(B_1+\frac{D_1}{2}\right)\right)+$$

$$\frac{f_{\nu-1}(o)(B_0+(\nu-1)D_0)}{B_0+\nu D_0} \text{ при } \nu>1$$

$$\text{и} \quad f_1(x)=-(B_1+D_1)+\frac{A_0C_0}{B_0+D_0}$$

Положивъ на время

$$(B_0+\nu D_0)f_\nu(o)=F_\nu$$

получаемъ:

$$F_\nu-F_{\nu-1}=-(B_0+\nu D_0)\left(\frac{D_1}{2}+(-1)^{\nu-1}\left(B_1+\frac{D_1}{2}\right)\right),$$

$$F_1=A_0C_0-(B_0+D_0)\left(\frac{D_1}{2}+(-1)^0\left(B_1+\frac{D_1}{2}\right)\right),$$

Отсюда

$$f_\nu(o)=\frac{F_\nu}{B_0+\nu D_0}=$$

$$\frac{A_0C_0-\frac{1+(-1)^{\nu-1}}{2}\left(B_0+\frac{D_0}{2}\right)\left(B_1+\frac{D_1}{2}\right)}{B_0+\nu D_0}-$$

$$\frac{\left\{\frac{D_1B_0+(-1)^{\nu-1}D_0B_1}{2}-\frac{1+(-1)^{\nu-1}}{2}\frac{D_0D_1}{2}\right\}\nu+\frac{D_0D_1}{4}\nu^2}{B_0+\nu D_0}$$

т. е.

$$f'_{2p-1}(o)=\frac{A_0C_0-B_0B_1-(B_0D_1+B_1D_0)p-D_0D_1p^2}{B_0+(2p-1)D_0}$$

$$f_{2p}(o)=\frac{A_0C_0+(B_1D_0-B_0D_1)p-D_0D_1p^2}{B_0+2pD_0}$$

Слѣдовательно:

$$y=\cfrac{-\cfrac{Ax}{B_0+D_0}}{1-\cfrac{\cfrac{A_0C_0-(B_0+D_0)(B_1+D_1)}{(B_0+D_0)(B_0+2D_0)}x}{1-\cfrac{\cfrac{(A_0C_0-B_0B_1+(B_0+D_0)(B_1-D_1)}{(B_0+2D_0)(B_0+3D_0)}x}{1-\ldots}}}$$

Или

$$y=-\cfrac{A_0x}{B_0+D_0-\cfrac{\{A_0C_0-(B_0+D_0)(B_1+D_1)\}x}{B_0+2D_0-\cfrac{\{A_0C_0-B_0B_1+(B_0+D_0)(B_1-D_1)\}x}{B_0+3D-\ldots}}}$$

Вообще $2p$-ый числитель равенъ

$$-\frac{A_0C_0-B_0B_1-(B_0D_1+B_1D_0)p-D_0D_1p^2}{\{B_0+(2p-1)D_0\}(D_0+2pD_0)}x$$

или

$$-\frac{A_0C_0-(B_0+pD_0)(B_1+pD_1)}{\{B_0+(2p-1)D_0\}(B_0+2pD_0)}x\ ,$$

а $2p+1$-ый числитель равенъ

$$-\frac{A_0C_0+(B_1D_0-B_0D_1)p-D_0D_1p^2}{(B_0+2pD_0)\{B_0+(2p+1)D_0\}}x$$

или

$$-\frac{A_0C_0-B_0B_1+(B_0+pD_0)(B_1-pD_1)}{(B_0+2pD_0)\{B_0+(2p+1)D_0\}}x$$

Должно замѣтить, что если

$$D_1+2B_1=o$$

то въ выраженіи для F_ν исчезаютъ члены, различающіе четный указатель отъ нечетнаго. Въ этомъ случаѣ числители послѣдовательныхъ звеньевъ слѣдуютъ одному закону и для всякаго ν опредѣляются формулой:

$$\frac{A_0C_0-\frac{D_1}{2}\left(B_0\nu+D_0\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)}{(B_0+\nu D_0)(B_1+(\nu+1)D_1)}x$$

5. Въ частности, при

$$A_0=\alpha(\gamma-\beta)\ ,\ B_0=\gamma^2\ ,\ B_1=\gamma(\alpha-\beta)\ ,$$

$$C_0=\gamma^2\ ,\ D_0=\gamma\ ,\ D_1=-\gamma\ ,$$

получимъ разложеніе, въ которомъ $2p$-ый числитель равенъ

$$-\frac{(\beta+\nu)(\gamma-\alpha+\nu)}{(\gamma+2\nu-1)(\gamma+2\nu)}x$$

а $2p+1$-ый числитель равенъ

$$-\frac{(\alpha+\nu)(\gamma-\beta+\nu)}{(\gamma+2\nu)(\gamma+2\nu+1)}x\,.$$

Если обозначимъ разлагаемую функцію чрезъ y и сравнимъ наше разложеніе съ извѣстнымъ разложеніемъ Gauss'a [1]), то найдемъ

$$u=\frac{1}{1+y}=\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}\,.$$

Можно также непосредственно убѣдиться въ томъ, что $y=-1+\frac{1}{u}$ удовлетворяетъ разсматриваемому дифференціальному уравненію.

Изъ формулъ, которыя даетъ Gauss въ указанной выше статьѣ, легко получить зависимость:

$$(\alpha-\gamma)F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)=$$

$$\alpha(1-x)F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)-\gamma F(\alpha,\beta,\gamma,x) \qquad \text{(a)}$$

Такъ какъ $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ удовлетворяетъ, какъ извѣстно, уравненію

$$F''+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}F'-\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}F=0\,,$$

то частное $z=\frac{F'}{F}$ удовлетворяетъ уравненію

$$z'+z^2+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(x-1)}z-\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}=0 \qquad \text{(b)}$$

Но

---

[1]) Bd. III. Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+..$

$$z = \frac{F'(\alpha,\beta,\gamma,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}\,\frac{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)} \;;$$

Слѣдовательно

$$\frac{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)} = \frac{\gamma z}{\alpha\beta} \;.$$

Внося это выраженіе въ уравненіе (a), получимъ

$$u = \frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)} = \frac{\gamma(1-x)z-\gamma\beta}{\beta(\alpha-\gamma)}$$

Поэтому въ силу уравненія (b):

$$\gamma x(1-x)u'+\beta(\alpha-\gamma)xu^2+\gamma(\gamma+[\beta-\alpha]x)u-\gamma^2=o \;.$$

Отсюда же, полагая

$$u=\frac{1}{1+y} \;,$$

находимъ для y уравненіе вида

$$A_0x+(B_0+B_1x)y+C_0y^2+(D_0+D_1x)xy'=o \;,$$

гдѣ

$$A_0=\alpha(\gamma-\beta) \;,\; B_0=-\gamma^2 \;,\; B_1=\gamma(\alpha-\beta)$$

$$C_0=\gamma^2 \;,\; D_0=\gamma \;,\; D_1=-\gamma \;.$$

6. Изъ разложенія функціи

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}$$

получается при $\beta=o$ разложеніе функціи

$$F(\alpha,1,\gamma+1,x)$$

Отмѣтимъ одинъ изъ предѣльныхъ случаевъ этого разложенія:

$$\lim_{g=\infty} F\left(\frac{A}{B}, 1, \frac{g}{B}, gx\right)$$

Въ этомъ случаѣ получимъ формально

$$1+Ax+A(A+B)x^2+A(A+B)(A+2B)x^3+\ldots$$

$$=\cfrac{1}{1-\cfrac{Ax}{1-\cfrac{Bx}{1-\cfrac{(A+B)x}{1-\cfrac{2Bx}{1-\cfrac{(A+2B)x}{1-\cfrac{3Bx}{1-\ldots}}}}}}}$$

При $A=B=1$ получаемъ:

$$1+x+2!.x^2+3!.x^3+\ldots=\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1-\cfrac{x}{1-\cfrac{2x}{1-\cfrac{2x}{1-\cfrac{3x}{1-\cfrac{3x}{1-\ldots}}}}}}}$$

При $A=1$, $B=2$, находимъ:

$$1-x+3x^2-3.5x^3+3.5.7x^4-\ldots$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{3x}{1+\ldots}}}}$$

Эти разложенія представляютъ интересъ по отношенію къ

вопросу о сходимости разложеній, ибо ряды, обращаемые здѣсь въ непрерывныя дроби, вовсе не имѣютъ областей сходимости.

7. Пусть вообще $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\theta(x)$ будутъ цѣлыми алгебраическими функціями.

Обозначимъ порядки этихъ функцій соотвѣтственно чрезъ p, q, r, s. Изъ формулъ члена 1 заключаемъ непосредственно, что $f_\nu(x)$, $\varphi_\nu(x)$, $\psi_\nu(x)$ будутъ также цѣлыми алгебраическими функціями. Притомъ порядки этихъ функцій будутъ слѣдующіе:

порядокъ	$f_{2\nu}(x)$	будетъ	наибольшее	изъ	чиселъ	$p, q-1, r-1, s-1$
»	$\varphi_{2\nu}(x)$	»	»	»	»	p, q, s, r
»	$\psi_{2\nu}(x)$	»	»	»	»	$p-1, q-1, s-1, r$
»	$f_{2\nu+1}(x)$	»	»	»	»	$p-1, q-1, s-1, r$
»	$\varphi_{2\nu+1}(x)$	»	»	»	»	p, q, s, r
»	$\psi_{2\nu+1}(x)$	»	»	»	»	$p, q-1, r-1, s-1$

при $\nu > o$.

Въ частности, если $p=q=r=s$, всѣ эти функціи будутъ порядка p.

Внося въ формулы члена 1 вмѣсто функцій $f_\nu(x)$, $\varphi_\nu(x)$, $\psi_\nu(x)$ ихъ выраженія съ неопредѣленными коэффиціентами и уравнивая коэффиціенты одинаковыхъ степеней x въ обѣихъ частяхъ каждаго уравненія, получимъ возвратныя формулы для вычисленія коэффиціентовъ этихъ функцій.

§ 3.

8. Разсмотримъ функцію y, удовлетворяющую дифференціальному уравненію

$$y' = A + By + Cy^2 \,, \qquad (1)$$

гдѣ A, B и C суть данныя функціи независимой перемѣнной x.

Допустимъ, что эта функція разложена въ непрерывную дробь вида:

$$y = \frac{\xi_1}{1+} \frac{\xi_2}{1+} \frac{\xi_3}{1+\ldots} \tag{2}$$

Числителей и знаменателей послѣдовательныхъ подходящихъ дробей будемъ обозначать соотвѣтственно чрезъ P и Q. Такъ что

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{0}{1}; \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{\xi_1}{1}; \quad \ldots \quad \frac{P_n}{Q_n} = \frac{\xi_1}{1+\ldots} + \frac{\xi_n}{1}$$

Остальную часть дроби назовемъ чрезъ y_{n-1} т. е. положимъ:

$$y_{n-1} = \frac{\xi_n}{1+} \frac{\xi_{n+1}}{1+\ldots}$$

Такъ что

$$y = \frac{\xi_1}{1+} \frac{\xi_2}{1+\ldots} + \frac{\xi_n}{1+y_n}.$$

Отсюда, какъ извѣстно, слѣдуетъ

$$y = \frac{P_{n-1}y_n + P_n}{Q_{n-1}y_n + Q_n} \tag{3}$$

9. При помощи уравненій (1) и (3) легко найти дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяетъ y_n.

Представимъ уравненіе (1) въ формѣ

$$\frac{y'}{y} = \frac{A}{y} + B + Cy \tag{4}$$

Прологариѳмируемъ и продифференцируемъ обѣ части уравненія (3); затѣмъ при помощи полученнаго такимъ образомъ уравненія, вмѣстѣ съ уравненіемъ (3), исключимъ y и y' изъ уравненія (4). Такимъ образомъ найдемъ уравненіе вида

$$y_n' = A_n + B_n y_n + C_n y_n^2 \tag{5}$$

Если введемъ обозначеніе

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = T_n \quad , \tag{6}$$

то для коэффиціентовъ A_n, B_n и C_n получимъ выраженія

$$A_n T_n = -AQ_n^2 - BP_n Q_n - CP_n^2 + Q_n P_n' - P_n Q_n' \tag{7}$$

$$\begin{gathered} B_n T_n = -2AQ_n Q_{n-1} - B(P_n Q_{n-1} + Q_n P_{n-1}) - 2CP_n P_{n-1} + \\ Q_n P_{n-1}' + Q_{n-1}' P_n - P_n Q_{n-1}' - P_{n-1} Q_n' \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} C_n T_n = -AQ_{n-1}^2 - BP_{n-1} Q_{n-1} - CP_{n-1}^2 + \\ Q_{n-1} P'_{n-1} - P_{n-1} Q'_{n-1}. \end{gathered} \tag{9}$$

10. Обратно, по даннымъ уравненіямъ (5) и (3), можно совершенно также найти уравненіе (1). Замѣтивъ, что (3) можетъ быть написано такъ:

$$y_n = \frac{Q_n y - P_n}{-Q_n y + P_{n-1}} \tag{10}$$

видимъ, что результатъ преобразованія можетъ быть полученъ замѣной количествъ Q_n, P_n, Q_{n-1}, P_{n-1}, A, B, C, A_n, B_n, C_n въ уравненіяхъ (7), (8) и (9) соотвѣтственно количествами P_{n-1}, $-P_n$, $-Q_{n-1}$, Q_n, A_n, B_n, C_n, A, B, C. Выраженіе T_n останется при этомъ безъ перемѣны. Такимъ образомъ получаемъ:

$$(11)\ AT_n = -A_n P^2_{n-1} + B_n P_n P_{n-1} - C_n P_n^2 - P'P_{n-1} + P_n P_{n-1}'.$$

$$(12)\ BT_n = 2A_n P_{n-1} Q_{n-1} - B_n(P_n Q_{n-1} + Q_n P_{n-1}) + 2C_n P_n Q_n$$

$$+ P_{n-1} Q_n' + Q_{n-1} P_n' - P_n Q_{n-1}' - Q_n P_{n-1}'$$

$$(13)\ CT_n = -A_n Q^2_{n-1} + B_n Q_n Q_{n-1} - C_n Q_n^2 - Q_{n-1} Q_n' + Q_n Q'_{n-1}$$

Тѣже формулы получатся, если рѣшимъ уравненія (7) (8) и (9) относительно количествъ A, B и C.

11. Изъ уравненій (7), (8) и (9) или (11), (12) и (13) можно вывести дифференціальныя уравненія для P^- и Q_n.

Продифференцировавъ уравненіе (6), получимъ:

$$(14)\qquad Q_n P'_{n-1} - P_n Q_{n-1}' = P_n' Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n' - T_n'$$

Поэтому изъ (8) найдемъ:

$$(15)\ (BQ_n + 2CP_n + 2Q_n')P_{n-1} + (2AQ_n + BP_n - 2P_n')Q_{n-1}$$

$$= -T_n B_n - T_n'$$

Присоединяя къ этому уравненію уравненіе (6), находимъ:

$$(16)\qquad P_{n-1} = \frac{1}{2A_n}\left\{ B_n + B + \frac{T_n'}{T_n} \right\} P_n + \frac{A}{A_n} Q_n - \frac{1}{A_n} P_n'$$

$$(17)\qquad Q_{n-1} = \frac{1}{2A_n}\left\{ B_n - B + \frac{T_n'}{T_n} \right\} Q_n - \frac{C}{A_n} P_n - \frac{1}{A_n} Q'_n$$

Или

$$(18)\qquad P_{n-1} = \sigma_n P_n + \lambda_n Q_n - \alpha_n P_n'$$

$$(19)\qquad Q_{n-1} = \delta_n Q_n + \mu_n P_n - \alpha_n Q_n'$$

гдѣ

$$(20)\begin{cases} \sigma_n=\dfrac{1}{2A_n}\left\{B_n+B+\dfrac{T_n'}{T_n}\right\} \\ \delta_n=\dfrac{1}{2A_n}\left\{B_n-B+\dfrac{T_n'}{T_n}\right\} \\ \alpha_n=\dfrac{1}{A_n}\ ,\ \lambda_n=\dfrac{A}{A_n}\ ,\ \mu_n=-\dfrac{C}{A} \end{cases}$$

§ 4.

12. Разсмотримъ сначала случай

$$y=e^{F(x)}\ ,$$

гдѣ $F(x)$ какая либо аналитическая функція.

Въ этомъ случаѣ

$$y'=F'(x)y$$

слѣдовательно

$$A=C=o\ ,\ B=F'(x)$$

Поэтому формулы (12) и (14) обращаются въ

$$0=-A_nP_{n-1}^2+B_nP_nP_{n-1}-C_nP_n^2-P_n'P_{n-1}+P_nP_{n-1}' \quad (21)$$

$$0=-A_nQ_{n-1}^2+B_nQ_nQ_{n-1}-C_nQ_n^2-Q_{n-1}Q_n'+Q_nQ_{n-1}' \quad (22)$$

Формулы (18) и (19) обращаются въ

$$P_{n-1}=\sigma_nP_n-\alpha_nP_n' \quad (23)$$

$$Q_{n-1}=\delta_nQ_n-\alpha_nQ_n' \quad (24)$$

Продифференцируемъ уравненіе (23). Съ помощью полученнаго уравненія, вмѣстѣ съ уравненіемъ (23), исключимъ ко-

личества P_{n-1} и P'_{n-1} изъ уравненія (21). Послѣ упрощеній, состоящихъ въ томъ, что коэффиціетъ при $P_n'^2$ сводится къ 0 и уравненіе можно раздѣлить на P_n, получимъ:

$$P''_n+\left(B_n-2A_n\sigma_n+\frac{\alpha_n'}{\alpha_n}\right)P_n'+\frac{1}{\alpha_n}(A_n\sigma_n^2-B_n\sigma_n+C_n-\sigma_n')P_n=0$$

Это уравненіе въ силу уравненій (20) приметъ видъ

$$P_n''+K_nP_n'+L_nP_n=o \quad, \tag{25}$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} K_n&=-\frac{A_n'}{A_n}-\frac{T_n'}{T_n}-B \\ L_n&=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{T_n'}{T_n}+B\right)^2-(B_n^2-4A_nC_n)+2\left\{\frac{A_n'}{A_n}B_n-B_n'\right.\right. \\ &\left.\left.+\frac{A_n'}{A_n}B-B'+\frac{A_n'}{A_n}\frac{T_n'}{T_n}-\left(\frac{T_n'}{T_n}\right)'\right\}\right] \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Совершенно также изъ уравненій (22) и (24) получимъ уравненіе

$$Q_n''+M_nQ_n'+N_nQ_n=o \quad, \tag{27}$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} M_n&=-\frac{A_n'}{A_n}-\frac{T_n'}{T_n}+B \\ N_n&=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{T_n'}{T_n}-B\right)^2-(B_n^2-4A_nC_n)\right. \\ &\left.+2\left\{\frac{A_n'}{A_n}B_n-B_n'-\frac{A'_n}{A_n}B+B'+\frac{A_n'}{A_n}\frac{T_n'}{T_n}-\left(\frac{T_n'}{T_n}\right)'\right\}\right] \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Замѣтимъ, что уравненіе (27) получается изъ уравненія

(25) замѣной P чрезъ Q и B чрезъ $-B$, потому что замѣна B чрезъ $-B$ или $F'(x)$ чрезъ $-F'(x)$ ведетъ къ замѣнѣ $e^{F(x)}$ чрезъ $e^{-F(x)}$ т. е. y чрезъ $\frac{1}{y}$.

13. Выраженіе

$$R_n = Q_n y - P_n \tag{29}$$

принято называть остаткомъ разложенія. Легко видѣть, что остатокъ удовлетворяетъ тому же дифференціальному уравненію (25), которому удовлетворяетъ P_n.

Въ самомъ дѣлѣ изъ (29) имѣемъ:

$$P_n = -R_n + Q_n y$$

$$P_n' = Q_n' y - R'_n + Q_n y'$$

$$P_n'' = Q_n'' y - R_n'' + 2Q_n' y' + Q_n y''.$$

Внесемъ эти выраженія вмѣсто P_n, P_n', P_n'' въ уравненіе (25) и исключимъ, y' и y'' при помощи соотношенія

$$y' = By$$

Тогда получимъ

$$O = Q_n'' + (K_n + 2B)Q_n' + (L_n + K_n B + B' + B^2)Q_n$$
$$-(R_n'' + K_n R_n' + L_n R_n)$$

Но изъ равенствъ (26) и (28) слѣдуетъ, что

$$\left\{\begin{aligned} K_n + 2B &= M_n \\ L_n + K_n B + B' + B^2 &= N_n. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Вслѣдствіе этихъ соотношеній и уравненія (27), наше уравненіе обратится въ

$$R_n'' + K_n R_n' + L_n R_n = 0$$

т. е. R_n удовлетворяетъ уравненію (25).

14. Такъ какъ одному и тому же линейному однородному дифференціальному уравненію удовлетворяютъ

$$P_n \text{ и } R_n = Q_n y - P_n$$

то ему же должна удовлетворять сумма

$$P_n + R_n = Q_n y \quad ,$$

въ чемъ можно убѣдиться также непосредственно.

Такимъ же образомъ убѣждаемся, что уравненію для Q_n удовлетворяетъ функція

$$\frac{P_n}{y}$$

Замѣтимъ при этомъ слѣдующее. Если употребить обозначенія

$$z'' + K_n z' + L_n z = F(z)$$

$$z'' + M_n z' + N_n z = \Phi(z)$$

то результаты подстановленій, при помощи которыхъ убѣждаемся, что P_n и $Q_n y$ съ одной стороны, Q_n и $\frac{P_n}{y}$ съ другой, удовлетворяютъ одному дифференціальному уравненію, могутъ быть выражены такъ:

$$F\left(ze^{\int B dx}\right) = \Phi(z) e^{\int B dx}$$

$$\Phi\left(ze^{-\int B dx}\right) = F(z) e^{-\int B dx}$$

15. Уравненія (21) и (22) могутъ быть написаны такъ

$$\left(-\frac{P_n}{P_{n-1}}\right)' = A_n + B_n\left(-\frac{P_n}{P_{n-1}}\right) + C_n\left(-\frac{P_n}{P_{n-1}}\right)^2$$

$$\left(-\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\right)' = A_n + B_n\left(-\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\right) + C_n\left(-\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\right)^2$$

т. е. функціи: y_n , $-\frac{P_n}{P_{n-1}}$ и $-\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ удовлетворяютъ одному и тому же дифференціальному уравненію.

§ 5.

16. Уравненія (25), (27) и вытекающія изъ нихъ соображенія установлены для частнаго случая $A = C = o$. Перейдемъ теперь къ общему случаю, когда A и C — какія угодно величины.

Напишемъ уравненіе (18) такъ:

$$P_{n-1} = \sigma_n P_n - \alpha_n P_n' + H \text{ , гдѣ } H = \lambda_n Q_n.$$

Отсюда

$$P_{n-1}' = \sigma_n' P_n + \sigma_n P_n' - \alpha_n' P_n' - \alpha_n P_n'' + H'.$$

$$P^2_{n-1} = \sigma_n^2 P_n^2 - 2\alpha_n \sigma_n P_n P_n' + \alpha_n^2 P_n'^2 + G, \text{ гдѣ}$$

$$G = 2\sigma_n P_n H - 2\alpha P_n' H + H^2$$

Внося эти выраженія въ уравненіе (11), получимъ результатъ, которому можно придать видъ

$$L_n P_n [P_n'' + K_n P_n' + L_n P_n] = -A T_n - A_n G$$

$$+ B_n P_n H - P_n' H + P_n H'$$

Внесемъ вмѣсто H и G ихъ значенія и исключимъ изъ

полученнаго выраженія членъ съ Q_n^2 при помощи уравненія (7). Тогда правая часть послѣдняго равенства приметъ видъ

$$\lambda_n P_n \left[CP_n + \left(B_n + B - 2A_n\sigma_n + \frac{\lambda_n'}{\lambda_n} \right) Q_n + 2Q_n' \right]$$

Слѣдовательно получимъ

$$P_n'' + K_n P_n' + L_n P_n$$

$$= A\left[CP_n + \left(B_n + B - 2\sigma_n A_n + \frac{\lambda_n'}{\lambda_n} \right) Q_n + 2Q_n' \right]$$

или

$$P_n'' + K_n P_n' + L_n P_n = A\left[CP_n - \left(\frac{T_n'}{T_n} + \frac{A_n'}{A_n} - \frac{A'}{A} \right) Q_n + 2Q_n' \right]$$

Точно также найдемъ

$$Q_n'' + M_n Q_n' + N_n Q_n = C\left[AQ_n + \left(\frac{T_n'}{T_n} + \frac{A_n'}{A_n} - \frac{C'}{C} \right) Q_n - 2P_n' \right]$$

Изъ этихъ уравненій получаемъ непосредственно уравненія (25) и (27) при $A = C = o$. Но если эти количества неравны нулю, то для полученія искомыхъ уравненій должно выполнить исключеніе. Продифференцировавъ каждое изъ этихъ уравненій дважды по x, мы получимъ 6 уравненій, содержащихъ P, P^{I}, P^{II}, P^{III}, P^{IV} и Q, Q^{I}, Q^{II}, Q^{III}, Q^{IV}. Изъ нихъ можно исключить разъ всѣ P, другой разъ всѣ Q. Такъ какъ разсматриваемыя уравненія линейныя и однородныя относительно количествъ P и Q, то, въ результатѣ исключенія для каждой изъ функцій P и Q, найдемъ линейное однородное дифференціальное уравненіе 4-го порядка.

17. Важно отмѣтить еще тотъ случай, когда одно изъ количествъ A и C равно нулю. Пусть напримѣръ $C = o$. Тогда уравненіе знаменателей обращается въ

$$Q_n''+M_nQ_n'+N_nQ_n=o\,; \qquad \text{(a)}$$

между тѣмъ какъ уравненіе числителей принимаетъ видъ

$$P_n''+K_nP_n'+L_nP_n=2AQ_n'-A\left(\frac{T_n'}{T_n}+\frac{A_n'}{A_n}-\frac{A'}{A}\right)Q_n \qquad \text{(b)}$$

Если, найдя изъ перваго уравненія Q_n, подставимъ его во второе, то получимъ для опредѣленія P_n линейное неоднородное уравненіе втораго порядка:

$$P_n''+K_nP_n'+L_nP_n=S_n\ ,$$

отличающееся лишь второй частью отъ уравненія (25).

18. Въ этомъ случаѣ уравненію знаменателей не удовлетворяетъ функція $\frac{P_n}{y}-Q_n$, какъ въ случаѣ $A=C=o$. Легко, однако, убѣдиться, что ему удовлетворяетъ функція:

$$e^{-\int Bdx}(P_n-yQ_n)\ ,$$

которая при $A=o$ обращается въ $\frac{P_n}{y}-Q_n$. Въ самомъ дѣлѣ, подставляя въ уравненіе (a) вмѣсто Q_n выраженіе:

$$e^{-\int Bdx}(P_n-yQ_n),$$

получимъ уравненіе:

$$P''_n+(M_n-2B)P_n'+(N_n-BM_n+B^2-B')P_n$$

$$=2(y'-By)Q_n'+(y''+(M_n-2B)y'+$$

$$(B^2-B'-BM_n)y_n)Q_n=o\ ,$$

которое въ силу зависимостей:

$$y'=A+By$$

$$K_n+2B=M_n$$

$$L_n+K_nB+B'+B^2=N_n$$

обращается въ уравненіе (b).

Далѣе, такъ какъ

$$\Phi\left(e^{-\int Bdx}z\right)=e^{-\int Bdx}F(z)$$

$$\text{и}\quad \Phi\left(e^{-\int Bdx}(P_n-yQ_n)\right)=o\ ,$$

то

$$F(P_n-yQ_n)=o$$

т. е. остатокъ P_n-yQ_n удовлетворяетъ уравненію

$$z''+K_nz'+L_nz=o$$

точно такъ, какъ въ частномъ случаѣ, разсмотрѣнномъ раньше

Замѣтимъ также, что уравненіе (2) удовлетворится, если вмѣсто P_n поставимъ Q_ny, или

$$Q_n\left(y+He^{\int Bdx}\right)\ ,$$

гдѣ H— произвольное постоянное число, ибо

$$F\left(Q_ny+HQ_ne^{\int Bdx}\right)=F(Q_ny)+F\left(HQ_ne^{\int Bdx}\right)\ ,$$

$$F\left(HQ_n e^{\int Bdx}\right)=H\Phi(Q_n)=o\ .$$

19. Въ разсматриваемомъ теперь случаѣ $C=o$. Поэтому общее уравненіе (13) обращается въ уравненіе (22). Отсюда, какъ въ членѣ 15, заключаемъ, что функціи y_n и $-\dfrac{Q_n}{Q_{n-1}}$ удовлетворяютъ одному дифференціальному уравненію.

20. Остановимся теперь на заключеніяхъ, вытекающихъ изъ дифференціальныхъ уравненій для числителей и знаменателей подходящихъ дробей.

Разлагая по способу Lagrange'а интегралъ дифференціальнаго уравненія

$$y'=A+By+Cy^2$$

въ непрерывную дробь вида

$$y=\frac{\xi_1}{1+}\frac{\xi_2}{1+}\cdots+\frac{\xi_{n-1}}{1+y_n}\ ,$$

мы находимъ для y_n уравненіе

$$y'_n=A_n+B_ny_n+C_ny_n^2 \qquad (a)$$

Если y, слѣдовательно также y_n, — функція трансцендентная или даже алгебраическая, но неудовлетворяющая квадратному уравненію съ коэффиціентами, составленными раціонально изъ функцій A, B, C и ихъ производныхъ, то уравненіе (a) вполнѣ опредѣляется этой функціей, т. е. она не можетъ удовлетворять двумъ различнымъ уравненіямъ этого вида. Въ самомъ дѣлѣ изъ уравненія

$$y_n'=\overline{A_n}+\overline{B_n}y_n+\overline{C_n}y_n^2$$

въ связи съ уравненіемъ (а), слѣдовало бы

$$0=A_n-\overline{A_n}+(B_n-\overline{B_n})y_n+(C_n-\overline{C_n})y_n^2\ ,$$

что, въ силу сдѣланныхъ предположеній, привело бы къ

$$A_n=\overline{A_n}\ ,\ B_n=\overline{B_n}\ ,\ C=\overline{C_n}\ .$$

Отсюда заключаемъ, что количества A_n, B_n, C_n, содержащіяся въ дифференціальныхъ уравненіяхъ для P_n и Q_n, вполнѣ опредѣляются по способу Lagrange'a.

Замѣтимъ, для сравненія съ прежними обозначеніями, что

$$A_\nu=-\frac{f_\nu(x)}{\theta(x)}\ ,\ B_\nu=-\frac{\varphi_\nu(x)}{x\theta(x)}\ ,\ C_\nu=-\frac{\psi_\nu(x)}{x\theta(x)}$$

21. Обратимся сначала къ уравненіямъ (25) и (27).

Представимъ разлагаемую въ непрерывную дробь функцію y подъ видомъ

$$e^{F(x)}$$

гдѣ $F(x)=log y$. Въ этомъ случаѣ

$$B=F'(x)$$

Количества A_n, B_n и C_n, на основаніи формулъ § 1, суть выраженія, раціонально составленныя изъ B. Количества ξ вообще имѣютъ видъ ax. Поэтому

$$T_n=(-1)^n\xi_1\ \xi_2\ \ldots\ \xi_n$$

даетъ

$$\frac{T_n'}{T_n}=\frac{n}{x}$$

Изъ формулъ (26) и (28) видно, что коэффиціенты уравненій (25) и (27) будутъ раціональными функціями перемѣнной x, если только $F(x)$—раціональная алгебраическая функція или интегралъ такой функціи. Наоборотъ если $F(x)$ не удовлетворяетъ этимъ условіямъ, то B не будетъ раціональной алгебраической функціей и въ такомъ случаѣ уравненія (25) и (27) не имѣютъ раціональныхъ коэффиціентовъ. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ противное, мы имѣли бы, по причинѣ

$$M_n - K_n = 2B \quad ,$$

что разность двухъ раціональныхъ функцій не будетъ раціональной функціей.

Итакъ числители и знаменатели послѣдовательныхъ подходящихъ дробей удовлетворяютъ однороднымъ линейнымъ уравненіямъ съ раціональными коэффиціентами только тогда, когда разлагаемая функція имѣетъ видъ

$$e^{F(x)}$$

гдѣ $F(x)$—раціональная алгебраическаская функція или интегралъ такой функціи.

22. Разсмотримъ теперь болѣе общій случай, когда лишь знаменатели удовлетворяютъ дифференціальному уравненію разсматриваемаго вида.

Въ этомъ случаѣ изъ формулъ § 1 и изъ (28) видно, что для функціи y, удовлетвовяющей уравненію

$$y' = A + By$$

съ раціональными алгебраческими коэффиціентами A и B, коэффиціенты уравненія знаменателей подходящихъ дробей будутъ также раціональными функціями.

§ 7.

23. Разсмотримъ теперь нѣсколько примѣровъ, представляющихъ нѣкоторый интересъ.

Прежде всего разсмотримъ наиболѣе простой случай

$$y=e^x$$

Замѣтивъ, что при $x=o$ будетъ $y=1$, получимъ по § 1 разложеніе:

$$y=\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{1}{3}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{1}{3}\frac{x}{2}}{1-\dots}}}}}$$

Въ этомъ случаѣ имѣемъ слѣдующую систему уравненій:

$$-y+\frac{dy}{dx}=o \;;\; 1+y_1+\frac{dy_1}{dx}=o \;;$$

$$-x+(1-x)y_2+y_2{}^2+x\frac{dy_2}{dx}=o;$$

$$(-1)^{n-1}\frac{n-1+\varepsilon_n}{2n-2}x+(n-1+(-1)^{n-1}x)y_n$$

$$+(n-1)y_n{}^2+x\frac{dy_n}{dx}=o$$

$$\xi=1 \;,\; \xi_1=-x \;,\; \xi_n=(-1)^n\frac{n-1+\varepsilon_n}{2n(n-1)}x \quad (n=2,3,\dots),$$

причемъ

$$\varepsilon_n=\frac{1}{2}(1+(-1)^n)$$

т. е. 1 при четномъ n и o при — нечетномъ.

Уравненія для P_n и Q_n по (25) и (27) суть:

$$P_n'' - \frac{n-1+x}{x} P_n' + \frac{n-1-\varepsilon_n}{2x} P_n = o$$

$$Q_n'' - \frac{n-1-x}{x} Q_n' - \frac{n-1+\varepsilon_n}{2x} Q_n = o$$

Въ предѣлѣ при $n=\infty$ получаемъ

$$P'_\infty = \frac{1}{2} P_\infty, Q'_\infty = -\frac{1}{2} Q_\infty$$

Рѣшенія этихъ уравненій, обращающіяся въ 1 при $x=o$, суть

$$P_\infty = e^{\frac{1}{2}x}, \quad Q_\infty = e^{-\frac{1}{2}x}$$

Частное ихъ

$$\frac{P_\infty}{Q_\infty} = \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{e^{-\frac{1}{2}x}} = e^x$$

Интегрированіе уравненій для P_n и Q_n даетъ для четнаго указателя формулы

$$P_{2n} = 1 + \frac{n-1}{2n-1} x + \frac{(n-1)_2}{(2n-1)(2n-2)} x^2$$

$$+ \frac{(n-1)_3}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)} x^3 + \ldots$$

$$Q_{2n} = 1 - \frac{n}{2n-1} x + \frac{(n)_2}{(2n-1)(2n-2)} x^2$$

$$-\frac{(n)_3}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}x^3+\ldots,$$

гдѣ вообще

$$(a)_b=\frac{a(a-1)\ldots(a-b+1)}{1.2.3..b}$$

Подобныя же выраженія получатся для нечетнаго указателя. Въ предѣлѣ эти выраженія обращаются въ

$$P_{\infty}=e^{\frac{1}{2}x}, \quad Q_{\infty}=e^{-\frac{1}{2}x}$$

24. Для приложенія нашихъ заключеній къ функціи Gauss'а $y=F(\alpha,1,\gamma,x)$ найдемъ дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяетъ эта функція.

Извѣстно, что

$$\text{(a)} \qquad y'=F'(\alpha,1,\gamma,x)=\frac{\alpha}{\gamma}F(\alpha+1,2,\gamma+1,x)$$

Извѣстна также формула[1]).

$$[(\alpha-\beta)x+2\beta-\gamma]F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\beta(1-x)F(\alpha,\beta+1,\gamma,x)$$
$$-(\gamma-\beta)F(\alpha,\beta-1,\gamma,x)$$

Положимъ $\beta=1$, увеличивая при этомъ α и γ на 1. Получимъ

$$\text{(b)} \qquad (1-x)F(\alpha+1,2,\gamma+1,x)=\gamma+$$
$$(\alpha x+1-\gamma)F(\alpha+1,1,\gamma+1,x)$$

Изъ выраженія $F(\alpha,1,\gamma,x)$ помощью безконечнаго ряда находимъ непосредственно

[1]) Heine. Theorie der Kugelf. 1878 стр. 103.

$$F(\alpha,1,\gamma,x)=1+\frac{\alpha}{\gamma}\,xF(\alpha+1,1,\gamma+1,x)$$

или

$$\frac{\alpha x}{\gamma}F(\alpha+1,1,\gamma+1,x)=F(\alpha,1,\gamma,x)-1.$$

На основаніи этихъ формулъ получимъ послѣдовательно

$$x(1-x)y'=\frac{\alpha x}{\gamma}(1-x)F(\alpha+1,2,\gamma+1,x) \qquad \text{(по (a))}$$

$$=\alpha x+(\alpha x+1-\gamma)\frac{\alpha x}{\gamma}F(\alpha+1,1,\gamma+1,x) \qquad \text{(по (b))}$$

$$=\alpha x+(\alpha x+1-\gamma)\{F(\alpha,1,\gamma,x)-1\} \qquad \text{(по (c))}$$

или, послѣ упрощеній,

$$x(1-x)y'=\gamma-1+(\alpha x+1-\gamma)y \qquad \text{(d)}$$

25. Найденное уравненіе представляетъ частный случай уравненія, разсматриваемаго въ § 2.

Прилагая найденныя тамъ формулы къ данному случаю, получимъ:

$$F(\alpha,1,\gamma,x)=\frac{1}{1-\cfrac{\frac{\alpha}{\gamma}x}{1-\cfrac{\frac{1.(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)}x}{1-\cfrac{\frac{\gamma(\alpha+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}x}{1-\cfrac{\frac{2(\gamma-\alpha+1)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}x}{1-\dots}}}}}$$

$$\tan x = \cfrac{x}{1-\cfrac{\frac{1}{1.3}x^2}{1-\cfrac{\frac{1}{3.5}x^2}{1-\cfrac{\frac{1}{5.7}x^2}{1-\dots}}}}$$

Отсюда

$$\sqrt{x}\operatorname{Cot}\sqrt{x}-1 = \cfrac{-\frac{1}{1.3}x}{1-\cfrac{\frac{1}{3.5}x}{1-\cfrac{\frac{1}{5.7}x}{1-\dots}}}$$

Эта функція удовлетворяетъ уравненію

$$x+y+y^2+2xy'=0$$

ν-ое преобразованное уравненіе будетъ

$$\frac{x}{2\nu+1}+(2\nu+1)y+(2\nu+1)y^2+2xy'=0$$

т. е.

$$A=-\frac{1}{2}\,,\ B=-\frac{1}{2x}\,,\ C=-\frac{1}{2x}$$

$$A_\nu=-\frac{1}{2(2\nu+1)}\,,\ B_\nu=-\frac{2\nu+1}{2x}\,,\ C_\nu=-\frac{2\nu+1}{2x}$$

Поэтому уравненія члена 16 будутъ:

$$(a)\quad \begin{cases} P_n''-\dfrac{2n-1}{2x}P'_n-\dfrac{n+1}{2x^2}P_n=\dfrac{n}{2x}Q_n-Q_n' \\[2ex] Q''_n-\dfrac{2n+1}{2x}Q_n'=-\dfrac{n+1}{2x^2}P_n+\dfrac{1}{x}P_n' \end{cases}$$

Исключая изъ этихъ уравненій одинъ разъ P, другой разъ Q, находимъ:

$$4x^4P_n^{IV}-8(n-1)x^3P^{III}+(4x+4n^2-6n-5)x^2P_n^{II}$$

$$+(-(4n-2)x+2n^2+7n+5)xP_n'$$

$$+((n^2+n)x-2n^2-7n-5)P_n=o$$

$$4x^3Q_n^{IV}-8(n-2)x^2Q^{III}+(4x+4n^2-18n+5)xQ_n^{II}$$

$$+(-(4n-6)x+6n^2+3n)Q_n'+n(n-1)Q_n=o$$

Въ предѣлѣ, для $n=\infty$ находимъ уравненія

$$4x^2P_\infty''+2xP_\infty'+(x-2)P_\infty=o$$

$$4xQ_\infty''+6Q_\infty'+Q_\infty=o\ ,$$

которымъ удовлетворяютъ

$$\left.\begin{aligned} P_\infty &= \mathrm{Cos}\sqrt{x}-\frac{\mathrm{Sin}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ Q_\infty &= \frac{\mathrm{Sin}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ , \end{aligned}\right\}\ (b)$$

Частное ихъ

$$\frac{P_\infty}{Q_\infty}=\sqrt{x}\,\mathrm{Cot}\sqrt{x}-1.$$

Замѣтимъ, что предѣльныя уравненія можно также получить полагая $n=\infty$ въ уравненіяхъ (a), что даетъ

$$P_\infty=2xQ_\infty'$$

$$2xP_\infty'+P_\infty+xQ_\infty=o$$

Откуда исключеніемъ найдемъ проще уравненія (b).

Интегрируя по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ уравненіе для P_n и полагая

$$P_n=b_0+b_1x+\dots,$$

находимъ

$$b_0=o \qquad b_1\text{—произвольно}$$

$$b_\nu=-\frac{(n-2\nu+2)(n-2\nu+3)}{(\nu-1)(2\nu+1)(n-\nu+1)(2n-2\nu+5)}b_{\nu-1}$$

Поэтому

$$P_n=\sum_{p=1}\frac{(-1)^{p-1}\,3(n-p)_{p-1}(2n-2p+3)x^p}{3.5.7\dots(2p+1).(2n-2p+3)(2n-2p+5)\dots(2n+1)}$$

Такъ какъ $(n-p)_{p-1}=o$ для $n-p<p-1$, то высшій показатель здѣсь будетъ $\frac{n}{2}$ или $\frac{n+1}{2}$, смотря потому, которое изъ этихъ чиселъ будетъ цѣлымъ. Переходя къ предѣлу для $n=\infty$, и, необращая вниманія на постоянный множитель, находимъ

$$-\sum_{p=1}^{\infty}(-1)\frac{p_x p}{(2p-1)!(2p+1)}$$

или

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}x^p-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^p$$

т. е.

$$\operatorname{Cos}\sqrt{x}-\frac{\operatorname{Sin}\sqrt{x}}{x}$$

Точно также уравненіе для

$$Q_n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

при произвольномъ c_0 даетъ

$$c_\nu = -\frac{(n-2\nu+1)(n-2\nu+2)}{\nu(2\nu+1)(n-\nu+1)(2n-2\nu+3)}\, c_{\nu-1}$$

Слѣдовательно

$$Q_n = \sum_{\nu=0} (-1)^\nu \frac{(n-\nu)_n x^\nu}{3.5\ldots(2\nu+1)(2n-2\nu+3)\ldots(2n+1)}$$

Первый членъ здѣсь $=1$. Послѣдній отвѣчаетъ $\nu = \frac{n}{2}$ или $\nu = \frac{n-1}{2}$. Для $n = \infty$ находимъ

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^\nu}{(2\nu+1)!} = \frac{\operatorname{Sin}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

§ 8.

27. До сихъ поръ мы разсматривали дроби вида

$$\frac{a_1 x}{1+}\,\frac{a_2 x}{1+\ldots}$$

Кромѣ этихъ дробей въ анализѣ разсматриваются часто дроби вида

$$\frac{c_0}{x+b_0+}\,\frac{c_1}{x+b_1+\ldots}$$

Переходъ отъ одного вида къ другому, какъ показалъ Lagrange[1]) совершается очень просто. Посмотримъ, какъ перейти отъ уравненій для P_n и Q_n въ одномъ случаѣ къ уравненіямъ для соотвѣтственныхъ функцій въ другомъ случаѣ.

28. Пусть будетъ дана дробь

$$\frac{a_0}{1+\frac{a_1x}{1+\frac{a_2x}{1+\ldots}}}$$

Обозначимъ числителей и знаменателей послѣдовательныхъ подходящихъ дробей соотвѣтственно черезъ

$$P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad \ldots$$

$$Q_0 \quad Q_1 \quad Q_2 \quad \ldots$$

Законъ образованія этихъ функцій даетъ:

$$P_{2\nu}=P_{2\nu-1}+a_{2\nu}xP_{2\nu-2}$$

$$P_{2\nu-1}=P_{2\nu-2}+a_{2\nu-1}xP_{2\nu-3}$$

$$P_{2\nu-2}=P_{2\nu-3}+a_{2\nu-2}xP_{2\nu-4}$$

Умножая послѣднее равенство на $-a_{2\nu-1}x$ и складывая съ первыми двумя почленно, найдемъ:

$$P_{2\nu}=\{1+(a_{2\nu-1}+a_{2\nu})x\}P_{2\nu-2}-a_{2\nu-2}a_{2\nu-1}x^2P_{2\nu-4}$$

Совершенно также получимъ:

$$Q_{2\nu}=\{1+(a_{2\nu-1}+a_{2\nu})x\}Q_{2\nu-2}-a_{2\nu-2}a_{2\nu-1}x^2Q_{2\nu-4}$$

---

[1]) l. c.

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_4}{Q_4}, \ldots$$

суть послѣдовательныя подходящія дроби разложенія

$$a_0 - \frac{a_0 a_1 x}{1+(a_1+a_2)x - \frac{a_2 a_3 x^2}{1+(a_3+a_4)x - \ddots}}$$

Замѣняя здѣсь x чрезъ $\frac{1}{x}$, получимъ, послѣ упрощеній,

$$a_0 - \frac{a_0 a_1}{x+a_1+a_2 - \frac{a_2 a_3}{x+a_3+a_4 - \ddots}}$$

Обозначимъ числителей и знаменателей послѣдовательныхъ подходящихъ дробей этого разложенія чрезъ

$$l_0, l_1, l_2 \ldots.$$

$$m_0, m_1, m_2, \ldots,$$

Легко убѣдиться, что между этими и прежними функціями имѣетъ мѣсто слѣдующая простая зависимость

$$l_\nu(x) = x^\nu P_{2\nu}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$m_\nu(x) = x^\nu Q_{2\nu}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Остановимся на доказательствѣ перваго равенства. Второе доказывается также. Такъ какъ

$$l_0(x)=a_0 \qquad l_1(x)=a_0x+a_0a_2$$

$$P_0\left(\frac{1}{x}\right)=a_0 \qquad P_2\left(\frac{1}{x}\right)=a_0+\frac{a_0a_2}{x},$$

то доказываемое равенство очевидно справедливо для l_0 и l_1. Допустимъ, что оно справедливо для всѣхъ указателей до $\nu-1$ включительно и докажемъ справедливость для указателя ν. Извѣстно, что

$$l_\nu(x)=(x+a_{2\nu-1}+a_{2\nu})l_{\nu-1}(x)-a_{2\nu-2}a_{2\nu-1}l_{\nu-2}(x)$$

Слѣдовательно, по предположенію,

$$l_\nu(x)=(x+a_{2\nu-1}+a_{2\nu})x^{\nu-1}P_{2\nu-2}\left(\frac{1}{x}\right)-a_{2\nu-2}a_{2\nu-1}x^{\nu-2}P_{2\nu-4}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Съ другой стороны

$$P_{2\nu}(x)=\{1+(a_{2\nu-1}+a_{2\nu})x\}P_{2\nu-2}(x)-a_{2\nu-2}a_{2\nu-1}x^2P_{2\nu-4}(x)$$

Отсюда

$$P_{2\nu}\left(\frac{1}{x}\right)=\left\{1+\frac{a_{2\nu-1}+a_{2\nu}}{x}\right\}P_{2\nu-2}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{a_{2\nu-2}\,a_{2\nu-1}}{x^2}P_{2\nu-4}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Слѣдовательно

$$x^\nu P_{2\nu}\left(\frac{1}{x}\right)=(x+a_{2\nu-1}+a_{2\nu})x^{\nu-1}P_{2\nu-2}\left(\frac{1}{x}\right)-a_{2\nu-1}a_{2\nu}x^{\nu-2}P_{2\nu-4}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Поэтому

$$l_\nu(x)=x^\nu P_{2\nu}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Точно также докажемъ, что

$$m_\nu(x)=x_\nu Q_{2\nu}\left(\frac{1}{x}\right)$$

29. Совершенно также получимъ зависимости

$$P_{2\nu-1}=\{1+(a_{2\nu-2}+a_{2\nu-1})x\}P_{2\nu-3}-a_{2\nu-3}a_{2\nu-2}x^2P_{2\nu-5}$$

$$Q_{2\nu-1}=\{1+(a_{2\nu-2}+a_{2\nu-1})x\}Q_{2\nu-3}-a_{2\nu-3}a_{2\nu-2}x^2Q_{2\nu-5}.$$

Отсюда заключаемъ, что

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_3}{Q_3},\ \frac{P_5}{Q_5},\ldots$$

суть послѣдовательныя подходящія дроби разложенія, которое послѣ замѣны x чрезъ $\frac{1}{x}$ обращается въ:

$$\cfrac{a_0x}{x+a_1-\cfrac{a_1a_2}{x+a_2+a_3-\cfrac{a_3a_4}{x+a_4+a_5-\ldots}}}$$

Обозначимъ числителей и знаменателей послѣдовательныхъ подходящихъ дробей чрезъ:

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ldots$$

$$\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2,\ldots$$

Совершенно также, какъ въ членѣ 28, убѣдимся въ справедливости соотношеній

$$\lambda_\nu(x)=x^{\nu+1}P_{2\nu+1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\mu_\nu(x)=x^{\nu+1}Q_{2\nu+1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

40. При помощи зависимостей, найденныхъ выше, легко перейти отъ дифференціальныхъ уравненій для P и Q къ такимъ же уравненіямъ для l и m или для λ и μ.

Раньше мы нашли дифференціальныя уравненія для P_n и Q_n въ разложеніи e^x въ непрерывную дробь. При теперешнихъ обозначеніяхъ слѣдуетъ вмѣсто P_n и Q_n написать P_{n-1} и Q_{n-1}. Возьмемъ $n-1=2p$. Получимъ уравненіе

$$P''_{2\nu}(x)-\frac{2\nu+x}{x}P'_{2\nu}(x)+\frac{\nu}{x}P_{2\nu}(x)=o$$

Слѣдовательно:

$$P''_{2\nu}\left(\frac{1}{x}\right)-(2\nu x+1)P'_{2\nu}\left(\frac{1}{x}\right)+\nu xP_{2\nu}\left(\frac{1}{x}\right)=o$$

Но

$$l_\nu(x)=x^\nu P_{2\nu}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Слѣдовательно

$$l'_\nu(x)=\nu x^{\nu-1}P_{2\nu}\left(\frac{1}{x}\right)-x^{\nu-2}P'_{2\nu}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$l''_\nu(x)=\nu(\nu-1)x^{\nu-2}P_{2\nu}\left(\frac{1}{x}\right)-(2\nu-2)x^{\nu-3}P'_{2\nu}\left(\frac{1}{x}\right)+$$

$$+x^{\nu-4}P''_{2\nu}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Поэтому получимъ:

$$x^2l''_\nu(x)+(2x+1)l'_\nu(x)-\nu(\nu+1)l_\nu(x)=o$$

Откуда

$$l_\nu(x)=1+(\nu+1)(\nu)_1x+(\nu+1)(\nu+2)(\nu)_2x^2+\ldots+$$

$$+(\nu+1)(\nu+2)\ldots(2\nu)(\nu)_\nu x^\nu$$

Причемъ въ даннномъ случаѣ

$$m_\nu(x)=(1)^\nu l^\nu(-x)$$

ГЛАВА II.

§ 1.

.31. Выше не было рѣчи о сходимости разсматриваемыхъ безконечныхъ непрерывныхъ дробей. Въ этой области до сихъ поръ немного сдѣлано. Общіе результаты, полученные Schlömilch'омъ [1]) Seidel'емъ [2]) и Stern'омъ [3]) предполагаютъ ариеметическую непрерывную дробь т. е. дробь съ вещественными числителями и знаменателями звеньевъ. Въ соображеніяхъ по этому предмету, изложенныхъ ниже, перемѣнное и коэффиціенты разсматриваемыхъ функцій предполагаются комплексными числами.

32. Остановимся прежде на одномъ давно извѣстномъ, частномъ разложеніи. Разложимъ въ непрерывную дробь корень квадратнаго уравненія

$$z^2+2pz+x=o,$$

гдѣ p—данное число. Имѣемъ

$$z=-p\pm\sqrt{p^2-x}$$

Данное уравненіе можетъ быть написано такъ

$$z(z+2p)=-x$$

---

[1]) Handbuch der algebr. Analysis.

[2]) Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Kettenbrüche 1846.

[3]) Crelle. Bd. 37.

Отсюда

$$z = -\frac{x}{2p+z}$$

Поэтому формально

$$z = -\frac{x}{2p - \frac{x}{2p - \frac{x}{2p - \dots}}}$$

Для изслѣдованія сходимости этой дроби найдемъ законъ составленія послѣдовательныхъ подходящихъ дробей. Имѣемъ

$$P_0 = o,\ Q_0 = 1;\ P_1 = -x,\ Q_1 = 2p;\ P_2 = -2px \text{ и т. д.}$$

Вообще

$$P_n = 2pP_{n-1} - xP_{n-2}$$

$$Q_n = 2pQ_{n-1} - xQ_{n-2}$$

Во первыхъ замѣчаемъ, что

$$P_2 = -xQ_1$$

Отсюда индуктивно убѣждаемся въ справедливости соотношенія

$$P_n = -xQ_{n-1}$$

Остается найти выраженія для Q_n. Равенству

$$Q_n = 2pQ_{n-1} - xQ_{n-2}$$

удовлетворяетъ n-ая степень корня уравненія

$$y^2 = 2py - x,$$

потому что изъ этого уравненія слѣдуетъ

$$y^n = 2py^{n-1} - xy^{n-2}$$

т. е. y^n составляется изъ y^{n-1} и y^{n-2} такъ, какъ Q_n составляется изъ Q_{n-1} и Q_{n-2}. Но

$$y=p\pm\sqrt{p^2-x}$$

Поэтому можно положить

$$Q_n=\alpha(p+\sqrt{p^2-x})^n+\beta(p-\sqrt{p^2-x})^n$$

гдѣ постоянныя α и β должны быть выбраны такъ, чтобы $Q_0=1$, $Q_1=2p$. Выбирая такимъ образомъ α и β, находимъ

$$\alpha=\frac{\sqrt{p^2-x}+p}{2\sqrt{p^2-x}},\ \beta=\frac{\sqrt{p^2-x}-p}{2\sqrt{p^2-x}}$$

Слѣдовательно:

$$Q_n=\frac{1}{2\sqrt{p^2-x}}\left\{(p+\sqrt{p^2-x})^{n+1}-(p-\sqrt{p^2-x})^{n+1}\right\}$$

Или

$$Q_n=(n+1)_1p^n+(n+1)_3p^{n-2}r^2+(n+1)_5p^{n-4}r^4+\ldots,$$

гдѣ

$$r=\sqrt{p^2-x}$$

Поэтому

$$P_n=-\frac{x}{2\sqrt{p^2-x}}\left\{(p+\sqrt{p^2-x})^n-(p-\sqrt{p^2-x})^n\right\}$$

или

$$P_n=-x\{(n)_1p^{n-1}+(n)_3p^{n-3}r^2+\ldots\}$$

33. Поэтому

$$\frac{P_n}{Q_n}=-x\frac{(p+\sqrt{p^2-x})^n-(p-\sqrt{p^2-x})^n}{(p+\sqrt{p^2-x})^{n+1}-(p-\sqrt{p^2-x})^{n+1}}$$

это выраженіе можно написать въ двухъ формахъ

$$\frac{P_n}{Q_n}=-x\frac{\left(\frac{p+\sqrt{p^2-x}}{p-\sqrt{p^2-x}}\right)^n-1}{(p+\sqrt{p^2-x})\left(\frac{p+\sqrt{p^2-x}}{p-\sqrt{p^2-x}}\right)^n-(p-\sqrt{p^2-x})}$$

или

$$\frac{P_n}{Q_n}=-x\frac{1-\left(\frac{p-\sqrt{p^2-x}}{p+\sqrt{p^2-x}}\right)^n}{p+\sqrt{p^2-x}-(p-\sqrt{p^2-x})\left(\frac{p-\sqrt{p^2-x}}{p+\sqrt{p^2-x}}\right)^n}$$

Перейдемъ къ предѣлу $n=\infty$. Будемъ обозначать абсолютныя значенія комплексныхъ количествъ скобками вида $|\quad|$. Если

$$|p+\sqrt{p^2-x}|<|p-\sqrt{p^2-x}|,$$

то изъ первой формы для $\frac{P_n}{Q_n}$ слѣдуетъ:

$$\lim_{n=\infty}\frac{P_n}{Q_n}=-p-\sqrt{p^2-x}$$

Если

$$|p+\sqrt{p^2-x}|>|p-\sqrt{p^2-x}|$$

то изъ второй формы получаемъ:

$$\lim_{n=\infty}\frac{P_n}{Q_n}=-p+\sqrt{p^2-x}$$

Отсюда заключаемъ, что всякій разъ, когда два корня квадратнаго уравненія, изъ котораго формально получается разсматриваемая непрерывная дробь, не равны между собой по абсолют-

ной величинѣ, дробь наша, сходясь, выражаетъ, тотъ изъ нихъ, который по абсолютной величинѣ меньше.

34. Посмотримъ теперь, для какихъ значеній x оба корня имѣютъ одинаковую абсолютную величину. Для искомыхъ значеній должно имѣть мѣсто равенство

$$|p-\sqrt{p^2-x}|=|p+\sqrt{p^2-x}|$$

или

$$\frac{|p-\sqrt{p^2-x}|}{|p|}=\frac{|p+\sqrt{p^2-x}|}{|p|}$$

$$\left|1-\sqrt{1-\frac{x}{p^2}}\right|=\left|1+\sqrt{1-\frac{x}{p^2}}\right|.$$

Но, вообще, если

$$|1+(\alpha+\beta i)|=|1-(\alpha+\beta i)|$$

то есть

$$(1+\alpha)^2+\beta^2=(1-\alpha)^2+\beta^2$$

то

$$\alpha=0.$$

Слѣдовательно, въ данномъ случаѣ квадратный корень не долженъ содержать вещественной части, т. е. подкоренное выраженіе должно быть вещественнымъ отрицательнымъ числомъ. Значитъ

$$1-\frac{x}{p^2}=-t^2,$$

гдѣ t—вещественное число. Отсюда

$$x=\varepsilon\,.\,p^2,$$

гдѣ

$$\varepsilon=1+t^2$$

вещественное число, больше 1.

Геометрически это значитъ, что x лежитъ на продолженіи прямой, соединяющей начало координатъ съ точкой p^2. Это протяженіе будетъ называться исключаемымъ отрѣзкомъ.

35. Посмотримъ теперь, во что обращается $\frac{P_n}{Q_n}$ для тѣхъ значеній x, при которыхъ

$$|p+\sqrt{p^2-x}|=|p-\sqrt{p^2-x}|$$

Пусть

$$p=\alpha(\operatorname{Cos}\beta+i\operatorname{Sin}\beta)$$

$$1+\sqrt{1-\frac{x}{p^2}}=R(\operatorname{Cos}T+i\operatorname{Sin}T)$$

Мы видѣли, что $\sqrt{1-\frac{x}{p^2}}$ для разсматриваемыхъ значеній x не имѣетъ вещественной части. Поэтому $1-\sqrt{1-\frac{x}{p^2}}$ будетъ выраженіемъ, сопряженнымъ съ $1+\sqrt{1-\frac{x}{p^2}}$. Слѣдовательно

$$1-\sqrt{1-\frac{x}{p^2}}=R(\operatorname{Cos}T-i\operatorname{Sin}T)$$

Отсюда

$$p+\sqrt{p^2-x}=\alpha R\{\operatorname{Cos}(\beta+T)+i\operatorname{Sin}(\beta+T)\}$$

$$p-\sqrt{p^2-x}=\alpha R\{\operatorname{Cos}(\beta-T)+i\operatorname{Sin}(\beta-T)\}$$

$$(p+\sqrt{p^2-x})^n=\alpha^n R^n\{\operatorname{Cos}n(\beta+T)+i\operatorname{Sin}n(\beta+T)\}$$

$$(p-\sqrt{p^2-x})^n=\alpha^n R^n\{\operatorname{Cos}n(\beta-T)+i\operatorname{Sin}n(\beta-T)\}$$

$$(p+\sqrt{p^2-x})^n-(p-\sqrt{p^2-x})^n=2i\alpha^n R^n \mathrm{Sin}\, n\beta(\mathrm{Sin}\, nT+i\mathrm{Cos}\, nT)$$

Поэтому

$$\frac{(p+\sqrt{p^2-x})^n-(p-\sqrt{p^2-x})^n}{(p+\sqrt{p^2-x})^{n+1}-(p-\sqrt{p^2-x})^{n+1}}=\frac{\mathrm{Cos}\, T-i\mathrm{Sin}\, T}{\alpha R}\cdot\frac{\mathrm{Sin}\, n\beta}{\mathrm{Sin}(n+1)\beta}$$

Отсюда видно, что разсматриваемое выраженіе не имѣетъ предѣла при $n=\infty$. Въ самомъ дѣлѣ дробь

$$\frac{\mathrm{Sin}(n+1)\beta}{\mathrm{Sin}\, n\beta}=\mathrm{Cos}\beta+\mathrm{Sin}\beta\mathrm{Cot}\, n\beta$$

при $n=\infty$ не имѣетъ опредѣльнной величины.

36. Изъ этихъ соображеній слѣдуетъ, что разсматриваемая непрерывная дробь сходится при всевозможныхъ конечныхъ значеніяхъ x за исключеніемъ тѣхъ, для которыхъ оба корня квадратнаго уравненія равны между собой по абсолютной величинѣ. Проведемъ прямую, на которой абсолютныя величины корней равны между собой. Всякій разъ, обходя точку развѣтвленія функціи p^2 и возвращаясь въ начальную точку, получаемъ, какъ извѣстно, вмѣсто взятаго корня квадратнаго уравненія другой его корень. Назовемъ одинъ изъ корней чрезъ u_0, другой чрезъ u_1 и положимъ, что для разсматриваемаго значенія x будетъ $|u_0|<|u_1|$. Въ такомъ случаѣ наша дробь изображаетъ въ данной точкѣ корень u_0. Если x будетъ двигаться по какой либо кривой, не встрѣчающей исключаемаго отрѣзка, то корень u_0, измѣняясь непрерывно, будетъ постоянно по абсолютной величинѣ меньше другаго корня u_1. Поэтому дробь будетъ выражать постоянно тотъ же корень. Положимъ теперь, что путь x пересѣкаетъ исключаемый отрѣзокъ. Въ моментъ пересѣченія абсолютныя величины корней стаютъ равными между собой. Послѣ перехода абсолютная величина корня

u_0 становится больше абсолютной величины корня u_1. Въ самомъ дѣлѣ корень u_0 послѣ перехода не можетъ быть по абсолютной величинѣ меньше другаго корня, потому что, возвратясь въ начальную точку послѣ одного оборота около p^2, мы получили бы въ этой точкѣ корень меньшій по абсолютной величинѣ, между тѣмъ какъ, выйдя изъ нея съ меньшимъ корнемъ, мы должны вернуться въ нее съ большимъ. Поэтому дробь, расходясь въ моментъ перехода, дѣлаетъ скачокъ и послѣ перехода начинаетъ изображать другой корень u_1, имѣющій теперь меньшую абсолютную величину.

37. Разсмотримъ корни уравненія

$$Q_n(x)=o\,.$$

Удерживая прежнія обозначенія, будемъ имѣть

$$Q_n(x)=\frac{(p+r)^{n+1}-(p-r)^{n+1}}{p+r-(p-r)}$$

$$=(p+r)^n+(p+r)^{n-1}(p-r)+\ldots+(p-r)^n$$

$$=(p-r)^n\left\{\left(\frac{p+r}{p-r}\right)^n+\left(\frac{p+r}{p-r}\right)^{n-1}+\ldots+\frac{p+r}{p-r}+1\right\}$$

Если x— корень уравненія

$$Q_n(x)=o\;,$$

то $p-r\gtrless o$, ибо $p=r$ т. е. $p^2=p^2-x$ требуетъ $x=o$, а $x=o$ не удовлетворяетъ этому уравненію, потому что $Q_n(o)=1$. Поэтому наше уравненіе приводится къ

$$\left(\frac{p+r}{p-r}\right)^n+\left(\frac{p+r}{p-r}\right)^{n-1}+\ldots,+\frac{p+r}{p-r}+1=o$$

Обозначимъ

$$\frac{p+r}{p-r}=\xi \qquad (a)$$

Тогда имѣемъ уравненіе

$$\xi^n+\xi^{n-1}+\ldots+\xi+1=o$$

Итакъ корни разсматриваемаго уравненія суть $n+1$-ые корни единицы, за исключеніемъ 1. Изъ уравненія (a) находимъ

$$x=\frac{4\xi}{(1+\xi)^2}p^2$$

Здѣсь

$$\xi=\text{Cos}\,\frac{2\nu\pi}{n+1}+i\,\text{Sin}\,\frac{2\nu\pi}{n+1},$$

гдѣ ν должно давать значенія отъ 1 до n.

Отсюда

$$\frac{1}{x}=\frac{(1+\xi)^2}{4\xi p^2}=\frac{\frac{1}{4}(\xi+\xi^{-1})+\frac{1}{2}}{p^2}=\frac{1}{2}\left(1+\text{Cos}\,\frac{2\nu\pi}{n+1}\right):p^2$$

Или

$$x=\frac{p^2}{\text{Cos}^2\,\frac{\nu\pi}{n+1}} \qquad (b)$$

При $n=2\mu$, μ корней уравненія μ-ой степени $Q_{2\mu}=o$ получатся, если въ этой формулѣ дадимъ ν значенія $1, 2, 3, \ldots \mu$. Остальныя значенія отъ $\mu+1$ до 2μ доставляютъ для x тѣже значенія. При $n=2\mu-1$, μ корней уравненія μ-ой степени $Q_{2\mu-1}=o$ получатся при значеніяхъ $1, 2, 3, \ldots \mu$ для ν. Значенія отъ $\mu+1$ до $2\mu-1$ даютъ x тѣже значенія.

Изъ выраженія (b) видно, что x отличается отъ p^2 лишь вещественнымъ множителемъ, равнымъ положительной неправиль-

ной дроби. Это показываетъ, что всѣ корни уравненія $Q_n=o$ лежатъ на исключаемомъ отрѣзкѣ.

Изъ того же выраженія видно, что, по мѣрѣ увеличенія n, разность между двумя послѣдовательными корнями безпредѣльно уменьшается. Корень, отвѣчающій $\nu=1$, въ предѣлѣ обращается въ p^2; корень, отвѣчающій $\nu=\frac{n}{2}$ или $\frac{n-1}{2}$, въ предѣлѣ равенъ ∞. Такимъ образомъ корни уравненія

$$Q_n(x)=o,$$

по мѣрѣ возрастанія n, стремятся покрыть сплошнымъ образомъ исключаемый отрѣзокъ отъ точки p^2 до ∞ т. е. нѣтъ ни одного сколь угодно малаго на немъ промежутка, въ которомъ, при достаточно большомъ n, не лежалъ бы по крайней мѣрѣ одинъ изъ корней этого уравненія.

§ 2.

38. Обратимся теперь къ общему случаю. Разложеніе функціи въ непрерывную дробь какого бы то ни было вида равносильно разложенію ея въ рядъ, состоящій изъ раціональныхъ функцій, слѣдующихъ опредѣленному закону. Замѣтимъ, что, въ частности, тѣ разложенія, которыя равносильны степеннымъ рядамъ, не обладаютъ свойствомъ выражать разлагаемую функцію съ наибольшей точностью своими подходящими дробями. Поэтому изслѣдованіе сходимости дробей приводится къ изслѣдованію сходимости рядовъ, состоящихъ изъ раціональныхъ функцій. Эти ряды по отношенію къ дробямъ весьма сложны. Такъ что въ вопросѣ о выводѣ признаковъ сходимости постоянныхъ дробей такое сведеніе не имѣетъ значенія. Однако въ вопросѣ объ области сходимости перемѣнной непрерывной дроби оно ведетъ къ нѣкоторымъ довольно общимъ заключеніямъ.

39. Пусть

$$y=\frac{a_0}{1+}\frac{a_1x}{1+}\frac{a_2x}{1+\ldots}$$

$$P_0=a_0\,,\ P_1=a_0\ ;\ \ldots$$

$$Q_0=1\ \ ,\ Q_1=a_1x+1\ ,\ \ldots$$

Изъ тождества

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_0}{Q_0}+\left(\frac{P_1}{Q_1}-\frac{P_0}{Q_0}\right)+\left(\frac{P_2}{Q_2}-\frac{P_1}{Q_1}\right)+\ldots+\left(\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)$$

получается формально

$$y=\frac{P_0}{Q_0}+\left(\frac{P_1}{Q_1}-\frac{P_0}{Q_0}\right)+\left(\frac{P_2}{Q_2}-\frac{P_1}{Q_1}\right)+\ldots.$$

или

$$y=\frac{P_0}{Q_0}+\frac{T_1}{Q_0Q_1}+\frac{T_2}{Q_2Q_1}+\frac{T_3}{Q_3Q_2}+\cdot-$$

Отношеніе n-го члена къ n—1 будетъ здѣсь

$$\frac{T_{n+1}Q_{n-1}}{T_nQ_{n+1}}\ \text{или}\ \frac{a_{n+1}x\,Q_{n-1}}{Q_{n+1}}$$

Но

$$Q_{n+1}=Q_n+a_{n+1}x\,Q_{n-1}$$

Слѣдовательно

$$a_{n+1}xQ_{n-1}=Q_{n+1}-Q_n$$

Поэтому отношеніе n-го члена къ $n-1$-му будетъ

$$\frac{Q_{n+1}-Q_n}{Q_{n+1}}\ \text{или}\ \ 1-\frac{Q_n}{Q_{n+1}}$$

40. Мы предположимъ, что количество a_n съ возрастаніемъ n или стремится къ конечному предѣлу, или, по-крайней мѣрѣ, остается по абсолютной величинѣ меньше нѣкотораго конечнаго числа. Въ этомъ предположеніи можно доказать, что для разсматриваемой дроби необходимо существуетъ нѣкоторая область сходимости, содержащая въ себѣ значеніе $x=o$.

Обозначимъ, для краткости, отношеніе послѣдующаго члена къ предыдущему въ вышеприведенномъ ряду чрезъ—r_n, полагая

$$r_n=\frac{Q_n}{Q_{n+1}}-1.$$

Тогда

$$\frac{Q_n}{Q_{n+1}}=1+r_n\ ,\ \frac{Q_{n-1}}{Q_{n+1}}=\frac{Q_{n-1}}{Q_n}\cdot\frac{Q_n}{Q_{n+1}}=(1+r_n)(1+r_{n-1}).$$

Поэтому равенство

$$Q_{n+1}=Q_n+a_{n+1}\,x\,Q_{n-1}$$

обратится въ

$$1=1+r_n+a_{n+1}x(1+r_n)(1+r_{n-1}).$$

Отсюда

$$r_n=-\frac{1}{1+\dfrac{1}{a_{n+1}x(1+r_{n-1})}}$$

Съ уменьшеніемъ абсолютной величины x, количество r_n также стремится къ нулю, потому что $Q_n(o)=1$. Поэтому при достаточно малой $|x|$ второй членъ въ знаменателѣ правой части равенства будетъ по абсолютной величинѣ меньше 1.

Слѣдовательно можно написать:

$$\left|1+\frac{1}{a_{n+1}x(1+r_{n-1})}\right| \geqq \frac{1}{|a_{n+1}||x||1+r_{n-1}|}-1$$

Поэтому

$$|r_n| \leqq \frac{1}{-1+\frac{1}{|a_{n+1}||x||1+r_{n-1}|}}$$

Вслѣдствіе предположенія, сдѣланнаго относительно a_n, можно выбрать столь малое по абсолютной величинѣ значеніе x, чтобы, начиная съ опредѣленнаго n, постоянно выполнялось неравенство

$$|a_{n+1}|\,|x|<\frac{1}{6}$$

Можно при этомъ, уменьшивъ если понадобится абсолютное значеніе x, достигнуть выполненія неравенства

$$|r_{n-1}|<1$$

для разсматриваемаго x и всѣхъ меньшихъ по абсолютной величинѣ значеній. Тогда для всѣхъ n, начиная съ выбраннаго нами, будемъ имѣть

$$|r_n|<1\,.$$

Въ самомъ дѣлѣ при сдѣланныхъ предположеніяхъ имѣемъ последовательно

$$|1+r_{n-1}| \leqq 1+|r_{n-1}|<2$$

$$|a_{n+1}|\,|x|\,|1+r_{n-1}|<\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{|a_{n+1}|\,|x|\,|1+r_{n-1}|}>3$$

Слѣдовательно

$$|r_n|<\frac{1}{2}$$

Итакъ для разсматриваемой области значеній x, абсолютная величина отношенія послѣдующаго члена къ предыдущему постоянно <1. Поэтому рядъ абсолютныхъ значеній членовъ даннаго ряда сходится равномѣрно. Значитъ разсматриваемый рядъ также сходится равномѣрно внутри той же области.

Замѣтимъ, что предшествующее разсужденіе, доказывая существованіе области сходимости, не даетъ никакихъ заключеній ни о размѣрахъ, ни о формѣ ея.

41. Равенство

$$Q_n=Q_{n-1}+a_n x Q_{n-2}\ ,$$

представленное въ формѣ

$$a_n=\frac{Q_n-Q_{n-1}}{xQ_{n-2}}\ ,$$

позволяетъ сдѣлать слѣдующее заключеніе: если съ увеличеніемъ n до ∞ функція Q_n, покрайней мѣрѣ, для одного значенія x, неравнаго нулю, стремится къ конечному неравному нулю предѣлу, то

$$\lim_{n=\infty} a_n=0$$

42. Тоже самое равенство напишемъ теперь такъ

$$a_n=\frac{1}{x}\left(\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\frac{Q_{n-1}}{Q_{n-2}}-\frac{Q_{n-1}}{Q_{n-2}}\right)$$

Отсюда заключаемъ: если съ возрастаніемъ n до ∞ функція Q_n возрастаетъ по абсолютной величинѣ безпредѣльно или остается неопредѣленной, но отношеніе $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$, по крайней мѣрѣ, для одного конечнаго значенія x, отличнаго отъ нуля, стремится къ конечному предѣлу, то и количество a_n имѣетъ конечный предѣлъ. Обозначимъ этотъ предѣлъ чрезъ a. Такъ что

$$\lim_{n=\infty} a_n = a$$

Обозначимъ предѣлъ отношенія $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ чрезъ $-\eta$, полагая

$$\eta = \lim_{n=\infty} -\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$$

для тѣхъ значеній x, для которыхъ таковой существуетъ.

Разсматриваемое равенство обращается въ предѣлѣ для такихъ значеній x въ

$$ax = \eta^2 + \eta$$

Откуда

$$\eta = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4ax}}{2}.$$

Будемъ разумѣть подъ

$$\sqrt{1+4ax}$$

то значеніе этой функціи, которое при $x=o$ обращается въ $+1$. Введемъ также обозначенія

$$\eta_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4ax}}{2}, \quad \eta_2 = \frac{-1-\sqrt{1+4ax}}{2}$$

Такъ какъ функція $-\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ при $x=0$ обращается въ -1, то изъ двухъ значеній η должно выбрать η_2. Такъ что

$$\lim_{n=\infty} -\frac{Q_n}{Q_{n-1}}=\eta_2$$

Отсюда

$$\lim_{n=\infty} -\frac{Q_{n-1}}{Q_n}=\frac{1}{\eta_2}$$

$$\lim_{n=\infty} \left\{1-\frac{Q_{n-1}}{Q_n}\right\}=\frac{\eta_2+1}{\eta_1}$$

т. е.

$$\lim_{n=\infty} \left\{1-\frac{Q_{n-1}}{Q_n}\right\}=-\frac{\eta_1}{\eta_2}$$

43. Обращаясь къ случаю, разсмотрѣнному въ членѣ 41, замѣчаемъ, что предѣлъ отношенія послѣдующаго члена къ предыдущему въ разсматриваемомъ ряду т. е.

$$1-\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$$

стремится къ нулю. Итакъ дробь разсматриваемаго вида сходится для всѣхъ тѣхъ значеній x, для которыхъ Q_n стремится къ конечному предѣлу.

44. Останавливаясь теперь на предположеніи, сдѣланномъ въ членѣ 42, видимъ, что для разсматриваемыхъ тамъ значеній x предѣлъ отношенія послѣдующаго члена къ предыдущему равенъ

$$-\frac{\eta_1}{\eta_2}$$

Такъ какъ для достаточно малыхъ $|x|$ это отношеніе по абсолютной величинѣ меньше 1, то, за исключеніемъ извѣстной прямой, на которой $|\eta_1| = |\eta_2|$, при всѣхъ измѣненіяхъ x-а будетъ

$$\left|-\frac{\eta_1}{\eta_2}\right| < 1.$$

Отсюда заключаемъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ дробь сходится для всѣхъ тѣхъ значеній x, для которыхъ $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ имѣетъ конечный предѣлъ, кромѣ исключаемаго отрѣзка. Что же касается исключаемаго отрѣзка, то сравнивая уравненіе

$$\eta^2 + \eta = ax$$

съ раньше разсмотрѣннымъ (членъ 32)

$$y^2 - 2py = -x,$$

находимъ, что въ данномъ случаѣ $p = -\frac{1}{2}$, а x должно замѣнить чрезъ $-ax$. Вслѣдствіе чего исключаемый отрѣзокъ въ данномъ случаѣ есть продолженіе прямой, соединяющей начало координатъ съ точкой $\frac{-1}{4a}$.

Замѣтимъ, что для тѣхъ же значеній существуетъ предѣлъ $-\frac{P_n}{P_{n-1}}$ при $n = \infty$ и равенъ предѣлу $-\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$. Въ самомъ дѣлѣ возьмемъ тождество

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \cdot \frac{Q_{n-1}}{Q_n} \left(\frac{P_n}{P_{n-1}} - \frac{Q_n}{Q_{n-1}} \right)$$

Для разсматриваемыхъ значеній $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$ имѣютъ предѣлы. Поэтому изъ тождества слѣдуетъ

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{P_n}{P_{n-1}}-\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\right)=0$$

т. е.

$$\lim_{n=\infty}\frac{P_n}{P_{n-1}}=\lim_{n=\infty}\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$$

45. Приложимъ эти общія заключенія къ двумъ частнымъ случаямъ.

Разсмотримъ разложеніе $\sqrt{x}\operatorname{Cot}\sqrt{x}-1$, приведенное выше (членъ 26). Полагая

$$Q_n=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots,$$

мы нашли

$$b_\nu=-\frac{(n-2\nu+1)(n-2\nu+2)}{\nu(2\nu+1)(n-\nu+1)(2n-2\nu+3)}b_{\nu-1},$$

причемъ наибольшее значеніе ν равняется $\frac{n}{2}$ или $\frac{n-1}{2}$, смотря потому, которое изъ нихъ будетъ цѣлымъ числомъ. Во всякомъ случаѣ

$$2\nu<n+1$$

Легко видѣть, что Q_n съ увеличеніемъ n до ∞ стремится къ конечному предѣлу для всѣхъ конечныхъ значеній x. Въ самомъ дѣлѣ [1]) для каждаго ν имѣемъ

$$|b_\nu|=\frac{2(n-2\nu+1)(n-2\nu+2)}{\nu(2\nu+1)(2n-2\nu+2)(2n-2\nu+3)}|b_{\nu-1}|$$

Но $2\nu<n+1$, слѣдовательно

$$n-2\nu+1<n$$

$$n-2\nu+2<n$$

[1]) Cp. *Thomé*. Ueber die Kettenbruchentwickelung der Gausschen Function F (α, 1, γ, x). Crelle. Bd. 66.

$$2n-2\nu+2=n+(n-2\nu+2)>n$$

$$2n-2\nu+3=n+(n-2\nu+3)>n$$

Поэтому

$$\left|b_\nu\right|<\frac{2}{\nu(2\nu+1)}\left|b_{\nu-1}\right|$$

При сколь угодно маломъ положительномъ ε, можно выбрать ν столь большимъ, чтобы

$$\frac{2}{\nu(2\nu+1)}<\varepsilon.$$

Тогда

$$|b_\nu|<\varepsilon|b_{\nu-1}|$$

Какъ бы ни было велико число ν, величина $|b_\nu|$ при всякомъ n конечна. Поэтому можно указать такое конечное число A, для котораго справедливы неравенства

$$|b_1|<A\varepsilon\,,\ |b_2|<A\varepsilon^2\,,\ldots\ |b_{\nu-1}|<A\varepsilon^{\nu-1}$$

Тогда изъ найденнаго выше неравенства получимъ

$$|b_\nu|<A\varepsilon^\nu\,,\ |b_{\nu+1}|<A\varepsilon^{\nu+1}\ \text{и т. д.}$$

Вслѣдствіе чего

$$|\Sigma b_\nu x^\nu|<A\Sigma\varepsilon^\nu x^\nu$$

при всѣхъ значеніяхъ n. Поэтому

$$\lim_{n=\infty}\left|\Sigma b_\nu x^\nu\right|<A\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon^\nu x^\nu$$

Рядъ, стоящій съ правой стороны, сходится внутри круга ра-

діуса $\frac{1}{\varepsilon}$ т. е. сколь угодно большаго радіуса. Отсюда заключаемъ, что

$$\lim_{n=\infty} Q_n(x)$$

есть величина конечная при всѣхъ конечныхъ значеніяхъ перемѣнной.

Поэтому (членъ 43) разсматриваемая дробь сходится для всѣхъ конечныхъ значеній перемѣнной.

46. Разсмотримъ теперь разложеніе функціи $F(\alpha, 1, \gamma, x)$. Въ этомъ случаѣ $\lim\limits_{n=\infty} Q_n(x)$ не существуетъ. Можно однако показать, что $\lim\limits_{n=\infty} \frac{Q_n(x)}{Q_{n-1}(x)}$ существуетъ внутри извѣстной области. Для изслѣдованія этого вопроса должно на основаніи общихъ соображеній, изложенныхъ въ членѣ 44, разсматривать значенія x внѣ исключаемаго отрѣзка. Въ этой цѣли ведетъ преобразованіе перемѣнной, выражающееся формулами

$$x = \frac{4z}{(1+z)^2}, \quad z = \frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}},$$

представляющее частный случай болѣе общаго преобразованія

$$z = \frac{1-\sqrt{1+4ax}}{1+\sqrt{1+4ax}}$$

Это послѣднее выраженіе, при условіи, что $\sqrt{1+4ax}$ обращается въ $+1$ при $x=o$, обладаетъ свойствомъ оставаться по абсолютной величинѣ <1 для всѣхъ значеній x внѣ исключаемаго отрѣзка. Въ разсматриваемомъ случаѣ $a=-\frac{1}{4}$. Разсматриваемое преобразованіе обращаетъ $Q_n(x)$ въ $(1+z)^{-n}$

$\varphi_n(z)$, гдѣ $\varphi_n(z)$—цѣлая раціональная, функція перемѣнной z. Изъ дифференціальнаго уравненія, которому удовлетворяетъ Q_n, легко получается дифференціальное уравненіе для φ_n. Интегрируя это послѣднее по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, получаемъ возвратную формулу для опредѣленія коэффиціентовъ функціи φ_n. На основаніи этой формулы Thomé въ статьѣ, указанной выше, доказываетъ, что $\varphi_n(z)$ при $|z|<1$ стремится съ возрастаніемъ n къ конечному предѣлу. Изъ этого слѣдуетъ, что отношеніе $\dfrac{Q_n(x)}{Q_{n-1}(x)}$ для всѣхъ значеній x внѣ исключаемаго отрѣзка имѣетъ конечный предѣлъ. Поэтому разсматриваемое разложеніе сходится (44) для всѣхъ значеній перемѣнной внѣ исключаемаго отрѣзка. Исключаемый отрѣзокъ въ этомъ случаѣ представляетъ часть вещественной положительной оси отъ 1 до ∞. Этотъ результатъ впервые былъ опубликованъ Thomé[1]).

47. Выше указана область сходимости непрерывной дроби въ двухъ частныхъ случаяхъ. Остановимся теперь на общемъ вопросѣ: выражаетъ ли непрерывная дробь внутри области сходимости ту функцію, изъ которой она получена. Останавливаясь на болѣе общемъ случаѣ, разсмотримъ тѣ значенія x внѣ исключаемаго отрѣзка, для которыхъ $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{Q_n}{Q_{n-1}}$ существуетъ. Извѣстная зависимость

$$y=\frac{P_n+P_{n-1}y_n}{Q_n+Q_{n-1}y_n}$$

можетъ быть написана такъ

$$y_n=-\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\cdot\frac{y-\dfrac{P_n}{Q_n}}{y-\dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}}$$

---

1) l. c. *Heine*. Handbuch der Kugelfunctionen 1878. стр. 270.

Отсюда видно, что при возрастаніи n до ∞, отношеніе $\frac{P_n}{Q_n}$ приближается безпредѣльно къ y. Въ самомъ дѣлѣ въ противномъ случаѣ, такъ какъ для разсматриваемыхъ значеній $\lim\limits_{n=\infty} \frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ и $\lim\limits_{n=\infty} \frac{P_n}{Q_n}$ существуютъ, мы получили бы изъ нашего равенства

$$(A) \qquad \lim_{n=\infty} y_n = \lim_{n=\infty} \left(-\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\right)$$

Но, коль скоро, $\lim y_n$ существуетъ, то изъ равенства

$$y_n = \frac{a_n x}{1+y_{n+1}}$$

слѣдуетъ, что онъ удовлетворяетъ уравненію

$$y^2+y=ax$$

и равенъ тому изъ корней этого уравненія, который обращается въ нуль при $x=o$. Между тѣмъ какъ $\lim\limits_{n=\infty} \frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ есть тотъ корень того же уравненія, который обращается въ 1 при $x=o$. Слѣдовательно равенство (A) возможно лишь при значеніи

$$x=-\frac{1}{4a},$$

которое принадлежитъ къ исключаемымъ значеніямъ.

Итакъ въ разсматриваемомъ случаѣ непрерывная дробь выражаетъ внутри области сходимости разлагаемую функцію.

Списокъ сочиненій по теоріи непрерывныхъ дробей, съ которыми авторъ предлагаемой статьи успѣлъ познакомиться.

1737. **Euler**, L. De fractionibus continuis. Com. ac. sc. Imp. Petr. T. IX стр. 98.

1739. **Euler**, L. De fractionibus continuis observationes. Ibid., T. XI стр. 32—82.

1748. **Euler**, L. Introductio in analysin infinitorum.

1762. **Euler**, L. De progressionibus arcum circularium, quorum tangentes secundum certam legem procedunt. Novi Com. ac. petr. T. IX стр. 40—53.

Euler, L. Specimen algorithmi singularis. Ibid. стр. 53—70.

1765. **Euler**, L. De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo. Ibid. T. XI. стр. 28—66.

1775. **Bernoulli**, D. Aduersaria analytica miscellanea de fractionibus continuis. Ibid. T. XX. стр. 3—24.

Bernoulli, D. Disquisitiones ulteriores de indole fractionum consinuarum. Ibid. стр. 24—48.

1776. **Lagrange**, J. Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral. Nouveaux mém. de l'ac. de Berlin, стр. 236—265.

1779. **Euler**. L. De formatione fractionum continuarum. Acta ac. pert. Pars prior, стр. 3—30.

Condorcet. Sur les fonctions indéfinies. Ibid. pars posterior, стр. 3—29.

1783. **Euler, L.** De seriebus, in quibus producta ex binis terminis contiguis datam constituunt progressionem. Opuscula analytica. T. I.
Euler, L. Observationes analiticae. Ibid.
Euler, L. De transformatione serierum in fractiones continuas, ubi simul haec Theoria non mediocriter amplificatur. Ibid. T. II.
Euler, L. Methodus inveniendi formulas integrales, quae certis casibus datam inter se teneant rationem; ubi simul methodus traditur fractiones continuas summandi. Ibid.
Euler, L. Summatio fractionis continuae, cuius indices progressionem arithmeticam constituunt, dum numeratores omnes sunt unitates; ubi simul resolutio aequationis Riccatianae per huiusmodi fractiones docetur. Ibid.
1794. **Trembley.** Recherches sur les fractions continues. Mém. de l'ac. de Berlin. стр. 109—142.
1810. **Kramp.** Recherches sur les fractions continues périodiques. Annales r. p. Gergonne T. I, стр. 261—285.
1812. **Gauss, F.** Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots$ Sämmtl. W. Bd. III. стр. 125—128.
1819. **Bret.** Théorie générale des fractions continues. Annales de mathém. Gergonne. T. 9. стр. 37—51.
1820. **Eytelwein.** Von den Kettenbrüchen und deren Anwendung auf die Bestimmung der Näherungswerthen gegebener Reihen. Abhandlungen der Königl. Ak. d. Wiss. zu Berlin, стр. 15—38.
1823. **M**.** Sur le développement en fractions continues des racines des équations numériques du second degré. Annales r. p. Gergonne. T. XIV, стр. 239—334.

M**. Sur le calcul des fractions continues periodiques. Ibid. стр. 337—347.

1828. **Clausen**. Die Function $\frac{1}{a+\frac{1}{a+\dots}}$ durch die Anzahl der a ausgedrückt Crelle's Journ. Bd. III. стр. 87—89.

Galois, E. Demonstration d'un théoreme sur des fractions continues périodiques. Annales r. p. Gergonne T. XIX. Также Journ. de Liouville T. XI стр. 385—392.

1830. **Möbius**. Beiträge zu der Lehre von den Kettenbrüchen, nebst einem Anhange dioptrischen Jnhalts. Crelle's Journ. Bd. VI, стр. 215—255.

1834. **Jacobi**. De fractione continua, in quam integrale $\int_x^\infty e^{-x^2} dx$ evolvere liceat. Ibid. Bd. 12. стр. 346—348.

Stern. Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung. Berlin.

1835. **Löwenstern**. Einige mathematische Sätze. Crelle's Journ. Bd. 13. стр. 159—162.

1838. **Stern**. Zur Theorie der Kettenbrüche Ibid. Bd. 18 стр. 69—75.

1840. **Ramus**. Remarques sur les fractions continues périodiques. Ibid. Bd. 20, стр. 13—28.

1844. **Eisenstein**. Théoremes sur les formes cubiques et solution d'une équation du quatrième degré a quatre indeterminées Ibid. Bd. 27, стр. 75—79.

Eisenstein. Transformations remarquables des quelques séries. Ibid., стр. 193—198.

Eisenstein. Transformations remarquables des quelques séries. Ibid. Bd. 28, стр. 36—40.

1845. **Eisenstein**. Theorema. Ibid. Bd. 29. стр. 96—97.

1846. **Heine**. Verwandlung von Reihen in Kettenbrüche. Ibid Bd. 32. стр. 205—210.

Siebeck. Ueber periodische Kettenbrüche Ibid. Bd. 33. стр. 68—70.
Siebeck. Die recurrenten Reihen vom Standpunkte der Zahlentheorie aus betrachtet. Ibid. стр. 71—77.
Heilermann. Ueber die Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche. Ibid. стр. 174—188.
1848, **Stern**. Ueber die Kennzeichen der Konvergenz eines Kettenbruchs. Ibid. Bd. 37, стр. 255—272.
1852. **Heilermann**. Ueber die Reste, welche bei der Anwendund des Sturmschen Satzes vorkommen. Ibid. Bd. 43, стр. 43—59.
1853. **Heilermann**. Ueber die Verwandlung der Kettenbrüche in Reihen. Ibid. Bd. 46, стр. 88—95.
1854. **Heilermann**. Independente Berechung der Sturm'schen Reste. Ibid. Bd. 48, стр. 190—206.
Borchardt. Application des transcendantes abeliennes à la théorie des fractions continues Ibid., стр. 69—104.
1855. **Öttinger**. Beiträge zur Lehre von den Kettenbrüchen, nebst einigen Anwendungen auf die Berechnung der Wurzeln von Gleichungen Ibid. Bd. 49, стр. 66—93 и 95—118.
Чебышевъ. О непрерывныхъ дробяхъ. Ученыя Зап. Имп. ак. н. Т. III.
Seidel. Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen dem Bildungsgesetze eines Kettenbruches und der Art des Fortgangs seiner Näherungsbrüche. München.
1857. **Heine**. Auszug eines Schreibens über Kettenbrüche. Crelle's Journ. Bd. 53 стр 284—285.
Tchebichev. Sur une formule d'analyse. Ibid. стр. 286.
1860. **Heine**. Ueber die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche von Kettenbrüchen. Ibid. Bd. 57, стр. 231—247.
1866. **Thomé**. Ueber die Kettenbruchentwickelung der Gaus'schen Function $F(\alpha,1,\gamma,x)$. Ibid. Bd. 66, стр. 322—336.

Чебышевъ. Разложеніе въ ряды при помощи непрерывныхъ дробей. Математ. сборникъ. Т. I. стр. 291—297.

1867. **Thomé**. Ueber die Kettenbruchentwickelung des Gaus-schen Quotienten $\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}$. Crelle's Journ., Bd. 67, стр. 299—309.

Heine. Mittheilung über Kettenbrüche. Ibid, стр. 315—326.

1868. **Jacobi**. Allgemeine Theorie der Kettenbruchähnlichen Algorithmen in welchen jede Zahl aus drei vorstehenden gebildet wird. Ibid. Bd. 69, стр. 29—64.

Чебышевъ. Объ опредѣленіи функцій по значеніямъ, которыя онѣ имѣютъ при нѣкоторыхъ величинахъ перемѣнной. Математич. сборникъ Т. IV, стр. 231—245.

1872. **Bauer**. Von einem Kettenbruche Euler's und einem Theorem von Wallis. München.

1873. **Bachmann**. Zur Theorie von Jacobi's Kettenbruch-Algorithmen. Crelle's Journ. Bd. 75, стр. 25—34.

Günther. Beiträge zur Theorie der Kettenbrüche. Grunert's Archiv Th. 55, стр. 392—404.

Günther. Darstelluug der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form. Erlangen.

1875. **Schendel**. Ueber eine Kettenbruchentwickelung. Crelle's Journ. Bd. 80. стр. 95—96.

1875. **Laguerre**. Sur l'approximation des fonctions d'une variable au moyen des fractions rationelles. Bulletin de la Soc. math. d. Fr. T. V, стр. 78—92.

Laguerre. Sur le développement en fraction continue de $e^{\operatorname{arctan}\frac{1}{x}}$ Ibid. стр. 92.

1877. **Чебышевъ**. О приближенныхъ выраженіяхъ линей-

ныхъ относительно двухъ полиномовъ. Записки Имп. ак. наукъ. Томъ 30, стр. 1—24.

1878. **Borchardt**. Zur Theorie der Elimination und Kettenbruch-Entwickelung. Abhandlungen der Königl. Ak. d. Wiss. zu Berlin стр. 1—17.

1879. **Hermite**. Sur une extension donnée à la théorie des franctions continues par M. Tchebychef. Crelle's Journ. Bd. 88. стр. 10—15.

Frobenius und Stickelberger. Ueber die Addition und Multiplication der elliptischen Functionen. Ibid. стр. 146—184.

Hoffmann. Ueber die Kettenbruchentwickelung für die Irrationale 2 Grades. Grunet's Archiv. Th. 64. стр. 1—8.

Hoffmann. Die Verwandlung der Irrationalen n-ten Grades in einen Kettenbruch Ibid. стр. 9—18.

1880. **Laguerre**. Sur la réduction en fractions continues de $e^{F(x)}$, $F(x)$ désignant un polynome entier. Journal de Liouville 3. Série T. 6, стр. 99—110.

1881. **Frobenius**. Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen. Crelle's Journ. Bd. 90 стр. 1—17.

1884. **Марковъ**. О нѣкоторыхъ приложеніяхъ алгебраическихъ непрерывныхъ дробей. Санктпетербургъ.

1885. **Laguerre**. Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationels. Journ. d. Math. T. I, стр. 135—165.

Les orages au Sud de la Russie.

A. Klossovsky.

Les très riches matériaux recueillis pendant les années 1884 et 1885 dans le district d'Elisabethgrad, gouvernement de Kherson, nous mettent dans la possibilité de nous occuper de l'étude des conditions de la formation des orages au sud de la Russie. 82 stations d'orages ont fonctionné durant ces deux années et nous ont fourni la description de plus de 800 cas. Ces bulletins d'orages tout d'abord nous offrent le moyen de suivre la période diurne dans la marche des orages. Il est connu que les décharges électriques sont intimement liées aux heures de la journée; les orages sont les plus fréquents à 3—4 heures de l'après-midi et très rares la nuit. Le tableau suivant nous fait voir le nombre des orages *commencés* pendant les différentes heures de la journée dans le district d'Elisabethgrad l'année 1884 et 1885.

	après minuit				après midi							
heures	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
Mars .	—	—	1	1	4	1	2	—	—	1	1	—
Avril .	—	—	—	1	1	2	—	1	5	4	5	5
Mai .	4	3	6	11	23	16	16	26	18	9	5	5

Juin .	6	12	23	30	40	33	33	30	25	10	9	8
Juillet	2	1	10	11	6	17	16	16	21	15	12	9
Août .	—	—	—	—	1	6	4	—	2	—	—	2
Sept. .	—	—	—	—	—	—	1	3	7	6	—	—
Total.	12	16	40	54	75	75	72	76	78	45	32	29

	après midi				après minuit							
heures. .	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8
Mars . .	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
Avril . .	6	—	1	—	2	1	—	1	—	—	1	—
Mai . .	8	1	2	1	—	1	—	—	—	1	3	3
Juin . .	6	4	6	3	—	1	1	—	—	—	3	4
Juillet. .	7	1	4	—	2	1	—	1	1	3	1	1
Août . .	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Septembre	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Total . .	28	9	13	4	4	4	1	2	1	4	8	9

Nous trouvons pour des intervalles de trois heures les chiffres suivants:

heures	9—12	12—3	3—6	6—9	9—12	12—3	3—6	6—9
Nombre d'orages. .	68	204	226	106	50	12	4	21
ou bien en %. . .	9,9	29,6	32,7	15,3	7,2	1,7	0,6	3,0

Le tableau que nous venons d'indiquer fait voir que le plus grand nombre des orages est pour 3—6 heures du soir; d'un autre côté, les orages sont très peu fréquents entre 3—6 heures du matin. Ces résultats sont entièrement conformes à ceux que nous avions reçus dans un précédant ouvrage sur les orages du service météorologique en Russie[1]).

Nous avons trouvé également une période diurne pour les orages avec grêle.

[1]) Klossovsky. Les orages en Russie (Etude de l'énergie électrique dans l'atmosphère dans le texte russe) Odessa 1881 p. 12.

	après midi				après minuit			
heures	9—12	12—3	3—6	6—9	9—12	12—3	3—6	6—9
Nombre d'orages . .	14	40	38	11	5	1	—	—
ou bien en °/₀ . . .	12,9	36,7	34,8	10,1	4,6	0,9	—	—

Comme on le voit on n'a point observé la grêle pendant les heures de la nuit (de 3 à 9 h. après minuit) durant les deux dernières années.

La quantité générale des orages est loin d'être la même pour les différents mois. Les manifestations électriques atteignent leur plus grande intensité aux mois de juin et de juillet et s'éteignent progressivement vers le mois de septembre; les orages sont très rares en hiver et, pour ainsi dire, exceptionnels. Les jours d'orage dans le district d'Elisabethgrad se sont distribués par mois de la manière suivante.

Années	1884	1885	Total	en °/₀
Mars . .	—	9	9	1,2
Avril . .	34	26	60	8,3
Mai . . .	119	78	197	27,4
Juin. . .	168	84	252	35,0
Juillet . .	70	99	169	23,5
Août . .	10	8	18	2,5
Septembre .	—	15	15	2,1
Total . .	401	319	720	—

Ces périodes de la fréquence des orages sont intimement unies à la marche des autres facteurs météorologiques notamment aux changements de la température et de l'humidité. On sait que la température et l'humidité absolue atteignent leur plus grande intensité entre 3—6 heures de l'après-midi, et qu'elles sont les plus faibles entre 3 — 6 heures du matin. Ce maximum des orages correspond à celui des dits éléments météorologiques; d'un autre côté, juin et juillet sont

les mois les plus chauds de l'été et c'est encore à cette époque que nous remarquons l'apogée de l'activité orageuse.

Mes recherches antérieures ont fait voir que les différents points de l'horizon ne nous envoient pas la même quantité d'orages; et que sous ce rapport le sud-ouest et le sud sont les mieux partagés. Les résultats suivants sont trouvés pour le district d'Elisabethgrad. Les orages venus des différents points de l'horizon se distribuent de la manière suivante:

point de départ de l'orage.	N	NE	E	SE	S	SO	O	NO
Mars.	—	—	—	—	—	3	2	2
Avril.	2	—	1	—	—	5	5	3
Mai	7	4	15	15	28	34	16	13
Juin	24	25	43	44	49	28	27	12
Juillet	10	12	19	19	29	15	24	9
Août	1	1	—	—	3	2	3	3
Septembre	1	—	—	—	1	4	—	4
Total.	45	42	78	78	110	91	77	46
En %	8	7	14	14	19	16	14	8

Comme on le voit le plus grand pourcent des orages nous vient du sud de l'horizon, pour 100 orages

viennent du SE, S et SO...49
» » NE, N et NO...23

14 orages de l'est et autant de l'ouest.

Sous ce rapport la distribution des orages du district d'Elisabethgrad pendant les années 1884 et 1885 diffère quelque peu de la distribution moyenne des orages du sud de la Russie, trouvée d'après des observations de plus longue durée. Dans la moyenne générale de la distribution des orages ils se concentrent d'une manière plus prononcée vers les points

situés entre le sud et le sud-ouest, comme on peut en juger d'après ce qui suit[1]).

Du	N	NE	E	SE	S	SO	O	NO
Nombre d'orages en %	7	5	6	10	18	23	21	10

Les bulletins des orages nous donnent également la possibilité de déterminer la direction du vent en temps d'orage. Dans le tableau suivant on voit le nombre des orages selon le vent qui les accompagne.

Points de l'horizon	N	NE	E	SE	S	SO	O	NO	Calme
Mars	—	—	—	3	—	3	3	1	1
Avril	4	3	2	2	1	6	6	8	4
Mai	4	10	18	11	33	27	15	16	23
Juin	26	34	53	39	47	24	20	15	27
Juillet	19	17	24	15	29	9	18	13	14
Août	4	—	1	—	5	1	7	4	1
Septembre	3	—	—	—	1	4	3	3	—
Total	60	64	98	70	116	74	72	60	70
En %	9	9	14	10	17	11	11	9	10

ou bien du SO, S et SE dans 37 cas sur 100 } rapport équi-
» » » NE, N » NO » 28 » » » } valant à 1,3.

Dans les gouvernements du centre de la Russie les résultats sont autres; les vents du sud et du sud-ouest sont des vents orageux par excellence, et réellement:

Direction du vent	N	NE	E	SE	S	SO	O	NO	Calme
Nombre d'orag. en %	5	6	7	9	13	24	18	12	6

ou bien du SO, S et SE 46%
» » » NE, N » NO 23 »

---

[1]) Klossovsky. Orages en Russie v. p. 25.

La question de la liaison directe qui existe entre la formation des orages et l'état général de l'atmosphère présente le plus vif intérêt du point de vue de la théorie et de la pratique. Le principal agent qui détermine l'état général de l'atmosphère est, sans aucun doute, la pression de l'air, mesurée par la hauteur barométrique. Ce disant, il est indispensable d'étudier quelles sont les pressions barométriques qui accompagnent les orages et s'il est possible d'y prévoir les symptômes de l'approche du météore. Les observations barométriques sont faites tous les jours à la station d'Elisabethgrad; j'ai trouvé pour les observations de 7 h. du matin le nombre des orages effectués avec des pressions barométriques de 750 mm., 751—755 mm., 756—760 mm., 761—765 mm., plus de 765 mm.[1]).

	Moins de 751 mm.	751-756	756-760	761-765	plus de 765 mm.
Avril .	—	3	21	3	—
Mai . .	—	35	115	31	1
Juin. .	—	59	183	49	1
Juillet .	8	29	56	58	3
Août .	6	5	9	1	—
Total .	14	131	384	142	5
Ou bien en %	2	19	57	21	1

Par conséquent, les orages pour la plupart ont lieu avec des pressions inférieures aux normales, se trouvant entre 755 et 760 mm. Les orages sont très rares avec des pressions très basses et très hautes du baromètre; l'activité orageuse cesse entièrement lorsque la pression barométrique est supérieure à 766 mm. Les pressions les plus favorables à la formation des orages, selon toute évidence, sont proches de

[1]) Au niveau de la mer.

759 mm. Il n'est pas difficile de trouver les pressions moyennes pour les jours d'orages:

	L'année 1884	1885	Moyenne
Avril . .	—	759,0 mm.	—
Mai . . .	758,7 mm.	759,6 »	759,1 mm.
Juin. . .	756,8 »	759,4 »	758,1 »
Juillet . .	759,9 »	757,2 »	758,6 »
Août . .	752,4 »	757,3 »	754,9 »
Total . .	756,9 »	758,5 »	757,8 »

Les mêmes pressions accompagnent les orages à grêle:

750 mm. moins de	751—755 mm.	756—760 mm.	761—765 mm.
nombre d'orages	31	53	18
en % —	30	52	18

La pression moyenne d'un orage à grêle équivaut à 757,3 mm.

Les décharges électriques ont été observées avec un baromètre en baisse ainsi qu'en hausse, c'est ce que nous allons voir d'après les données du district d'Elisabethgrad; il y a eu

326	ou bien	50%	avec	un	baromètre	en hausse,
293	» »	45%	»	»	»	» baisse,
30	» »	5%	»	»	»	stationnaire

Il est à remarquer que le rapport (1,11 : 1) entre le nombre des orages avec un baromètre en hausse et celui des orages avec un baromètre en baisse équivaut au rapport des vents de la partie est et de la partie ouest de l'horizon, vents accompagnant les orages (p. 8).

Le nombre des points frappés d'orages varie notablement selon les différents jours; on dirait qu'il existe des pé-

riodes orageuses séparées entre elles par des périodes d'une accalmie électrique. Ce calme arrive dès que le temps se maintient au beau avec un ciel sans nuages et de hautes pressions. Ces sortes de changement dans la distribution des orages font supposer que les mouvements généraux de l'atmosphère offrent des conditions propres à déterminer un différent degré de l'intensité orageuse. Dans mon ouvrage sur les matériaux, dus aux observations du service russe des orages, j'ai fait voir[1]) que nos orages nous sont exclusivement apportés par les cyclones; l'activité orageuse cesse dès qu'une région de hautes pressions s'établit en Russie, elle s'affaiblit ou cesse également si une aire de hautes pressions s'étend en zône étroite dans la direction nord-sud à travers l'Europe occidentale. Mais tous les cyclones n'amènent pas des orages; les manifestations électriques marquent le passage du tourbillon s'il y a des conditions de température et d'humidité (température élevée, humidité faible) favorables à leur activité. Les périodes successives de la tension et du calme de l'activité électrique d'un certain point s'explique également par la marche et la formation des cyclones. Cette conclusion est justifiée par l'observation parallèle de l'activité tourbillonnaire et de l'orageuse pour les mois de mai—juillet de l'année 1884 et 1885. Les jours du mois se trouvent dans la première rubrique, la hauteur barométrique (au niveau de la mer) de 7 h. du matin, station d'Elisabethgrad, dans la seconde; les écarts de la température, comparativement à la température normale à 7 h. du matin, dans la troisième; le nombre des points frappés d'orage, dans la quatrième; l'état général de la pression barométrique en Europe—dans la cinquième.

---

[1]) Klossovsky. Orages en Russie p. 13.

Mai	mm.	Année 1884		
1	765,9	— 6,0	0	Une aire de haute pression est au centre de l'Europe.
2	767,2	— 6,3	0	La pression est haute dans le centre et au sud de l'Europe.
3	759,2	— 2,2	0	Un minimum de peu de valeur (755,4 mm.) se trouve près de Kiew.
4	758,4	— 2,4	8	Au nord de l'Europe la pression est faible.
5	762,3	— 3,0	0	Une aire de hautes pressions envahit l'Autriche et la presqu'île des Balkans.
6	764,0	0,1	0	La haute pression s'accentue.
7	767,4	0,3	0	Idem.
8	767,7	3,3	0	Idem.
9	765,9	3,0	1	Une aire de hautes pressions règne sur toute l'Europe.
10	765,8	— 1,1	0	La pression est haute (jusqu'à 776 mm.).
11	768,4	— 4,8	0	Idem.
12	769,0	— 6,8	0	Un cyclone a apparu au-dessus de la Finlande.
13	761,7	— 2,5	8	Le cyclone s'est transporté dans la direction de Biélosersk.
14	757,4	— 3,3	0	Un minimum de peu de valeur (755,5 mm.) s'est formé près de Kiew.
15	761,5	— 8,1	3	Ce minimnm s'est transporté vers Tambof; la pression gagne en force à l'ouest de l'Europe.
16	766,4	— 6,9	0	Une pression relativement haute règne au sud de la Russie et le long du littoral occidental de l'Europe.
17	762,5	— 5,3	0	Un minimum de peu de valeur (759 mm.) s'est formé au-dessus des monts Carpathes.
18	760,4	— 4,0	1	Ce minimum s'est transporté vers Varsovie.

19	762,5	— 4,9	0	Un minimum se trouve au centre de la Russie.
20	764,7	— 3,0	0	Une aire de hautes pressions s'étend entre la mer Noire et la Baltique.
21	763,2	0,5	0	A l'ouest de l'Europe la pression est faible et augmente vers l'est.
22	758,7	1,4	9	Une aire de hautes pressions s'étend sur le sud-est de la Russie; un minimum se trouve en France (749,4 mm.).
23	758,1	— 1,2	1	Le minimum (746,7 mm.) s'est transporté vers l'Autriche.
24	754,2	0,4	23	Le minimum s'est déplacé dans la direction de Varsovie (748,2 mm.).
25	756,5	— 1,3	0	Le minimum (747,0 mm.) est refoulé vers les provinces de la Baltique.
26	759,5	— 1,3	8	Un minimum est près de (Moscou (749,9 mm.), un autre près de Stockholm (749,0 mm.).
27	758,0	— 0,7	6	Un minimum (749,6 mm.) plane au-dessus du golfe de Bothnie.
28	758,9	— 1,4	2	Le minimum d'hier s'est porté ver Archangel; un nouveau minimum surgit en Autriche (753,8 mm.).
29	759,2	— 0,8	14	Il y a un minimum au sud de la mer Baltique (755,4 mm.), un autre—en Autriche (755,5 mm.)
30	757,1	— 0,2	13	Il y a un faible minimum en Hongrie (752,3 mm.).
31	758,4	— 0,8	11	Le minimum se trouvent entre Odessa et Sévastopol. La pression augmente à l'ouest de l'Europe.
Juin	mm.			
1	762,5	0,4	3	Le minimum est au nord de la Finlande,

				la pressiou est haute à l'ouest de l'Europe.
2	762,0	0,4	0	Le cyclone est au nord-est de la Russie; une aire de hautes pressions est à l'ouest de l'Europe.
3	760,3	— 0,6	5	Le cyclone plane au nord de l'Europe; un autre minimum de peu de valeur est sur la mer Noire (758,8 mm.).
4	754,6	1,3	17	Il y a un minimum sur la mer Blanche et un autre à l'entrée du golfe de Finlande (750,4 mm).
5	752,1	— 1,7	16	Le cyclone plane au-dessus de Kiew (750,7 mm.).
6	751,9	— 3,1	19	Le cyclone se trouve entre Kiew et Elisabethgrad (750,4 mm.).
7	752,5	— 4,2	5	Un nouveau minimum surgit près de Lemberg (743,6 mm.).
8	752,5	— 3,4	1	Le cyclone reste stationnaire (748,3 mm.).
9	754,5	— 3,3	0	Le minimum s'est transporté vers Varsovie (750,9 mm.).
10	757,2	— 1,1	6	Le minimnm s'est vu transféré à Libau (752,6 mm.).
11	756,8	— 1,0	4	Ce minimum est à Dorpat (749,8 mm.).
12	757,3	— 2,8	13	Le minimum est dans la Scandinavie du sud (751,5 mm.).
13	757,2	— 1,2	19	Le minimum s'cst retiré dans le nord-ouest. Un cyclone de peu de valeur est sur la mer Noire (753,1 mm.).
14	757,0	—2,5	23	Un cyclone de peu d'intensité est sur la mer Noire (754,3 mm.); un autre au nord de la Scandinavie.
15	758,0	— 0,6	1	Un minimum se trouve au nord de la Norvège (750 mm.), en Russie la pres-

				sion est assez uniformément distribuée; elle diminue vers la mer Noire; une aire de hautes pressions est au-dessus de l'Europe occidentale.
16	758,5	— 3,5	0	L'aire des hautes pressions reste stationnaire au-dessus de l'Europe occidentale; des pressions moins hautes envahissent le sud-est de la Russie.
17	758,7	— 2,3	17	Un minimum de peu d'importance est en Hongrie (756,7 mm.).
18	759,1	3,3	27	Le minimum s'est transporté vers la mer Noire (755 mm.); une aire de hautes pressions est au nord de la Russie.
19	760,9	1,2	22	Il y a un faible minimum en Hongrie (756 mm.); une aire de hautes pressions se répand à l'ouest de l'Europe.
20	762,5 (?)	0,5	1	Une aire de hautes pressions (771 mm.) envahit toute l'Europe, sauf les régions du sud-est.
21	764,7	— 07	0	Les régions des hautes pressions se trouvent dans les provinces occidentales de la Russie.
22	764,5	1,1	0	Les hautes pressions sont dans les provinces sud-ouest de la Russie.
23	763,2	— 0,1	0	Les hautes pressions dominent sur toute l'Europe; les gouvernements du centre de l'est de la Russie sont hors de son influence.
24	761,1	1,3	4	Une aire de basses pressions est à l'est de la Russie.
25	755,5	— 0,7	6	Une vaste région de basses pressions s'étend à l'est de la Russie.

26	754,4	— 0,9	0	La pression barométrique gagne en force dans la direction de l'ouest.
27	759,1	— 3,4	0	Idem.
28	759,4	— 4,5	0	Les basses pressions occupent l'est de la Russie et le sud-ouest de l'Europe.
29	757,8	— 4,4	1	La pression barométrique a baissé dans toute l'Europe.
30	759,2	— 4,6	0	La pression est haute dans l'Europe centrale; elle est basse dans la Russie orientale.
Juillet	mm.			
1	763,5	— 3,1	1	Un maximum traverse l'Autriche et l'Italie.
2	763,4	— 1,7	0	Une aire de hautes pressions s'étend sur l'Europe occidentale et sur la Russie méridionale; un minimum apparaît en Finlande (752,4 mm.).
3	759,8	0,4	15	L'aire des basses pressions se trouve au nord-est de la Russie.
4	761,2	— 0,1	2	Le minimum est en Finlande; une pression relativement haute est en Autriche (763,6 mm.).
5	764,0	— 0,3	0	Un maximum barométrique se trouve au sud de la Russie; un cyclone côtoie les bords de la Norvège.
6	762,9	3,9	6	Idem.
7	760,9	5,2	12	Le minimum s'est transporté vers Archangel; la pression s'est affaiblie au sud.
8	758,0	4,7	5	Il y a un minimum dans les environs de Pinsk (755,8 mm.), un autre sur la mer Noire (756,7 mm.).
9	754,6	2,3	2	Le minimum est sur le lac d'Onéga (749,1 mm.), un autre près de Novorosseisk (750,2 mm.)

10	750,6	1,8	9	Il y a un minimum sur la mer Noire (749,6 mm.), un autre sur le golfe de Bothnie.
11	751,5	— 1,1	1	Un minimum s'étend entre Elisabethgrad, Charkof et Sévastopol; une aire de hautes pressions plane au-dessus de l'Autriche et de la Suisse.
12	755,1	— 8,3	2	Un minimum est près des bords de la Norvège; à l'ouest de l'Europe la pression est haute (jusqu' à 764 mm).
13	755,8	— 4,9	1	Une aire de basses pressions occupe le nord de l'Europe et le sud-est de la Russie.
14	758,8	— 3,0	0	?
15	759,7	— 0,5	2	Au nord de l'Europe la pression est basse; elle est haute au sud-ouest.
16	760,2	— 1,8	2	En Europe la pression est assez uniformément répandue.
17	764,8	— 3,7	8	Au nord de l'Europe et sur la presqu' île des Balkans s'étend une aire de faibles pressions.
18	762,4	1,4	5	Une région de hautes pressions occupe les provinces centrales de la Russie; un minimum de peu d'importance est sur la mer Noire (755,7 mm.).
19	755,8	— 4,4	0	?
20	758,0	— 0,7	0	?
21	761,8	— 3,1	0	Le maximum est à l'ouest de l'Europe; le minimum—sur les provinces de la Baltique.
22	763,4	— 2,1	1	Il y a un cyclone au nord de l'Europe; un maximum domine l'ouest et le sud-ouest.

23	766,9	— 1,7	0	Idem.
24	765,9	— 0,2	2	Idem.
25	763,8	1,0	1	Le minimum et refoulé dans le nord-est de la Russie; les pressions sont hautes dans toute l'Europe.
26	765,2	— 0,2	0	Toute l'Europe est dominée par une aire de hautes pressions (jusqu' à 773 mm.).
27	766,3	1,8	0	La pression barométrique gagne en force.
28	769,2	— 4,1	0	Les hautes pressions dominent toute l'Europe.
29	771,5	— 4,8	0	Idem.
30	768,8	— 3,2	0	Idem.
31	762,1	— 2,1	0	Les hautes pressions s'affaiblissent.
Mai	mm.	l'année 1885.		
1	754,6	— 1,1	2	Il y a un minimum au nord-ouest de l'Europe (750,5 mm.), un autre dans les environs de Sévastopol (752,8 mm.).
2	760,5	— 6,5	0	Il y a un minimum en France, un second en Italie et un troisième sur le Volga.
3	761,0	— 2,2	0	Il y a un cyclone en Hongrie (739,0 mm.).
4	754,1	— 2,2	9	Un minimum est dans les environs de Varsovie (744,4 mm.).
5	757,4	— 4,3	0	Le minimum plane au-dessus du golfe de Riga.
6	767,0	— 5,5	0	Le minimum est en Finlande.
7	766,4	— 1,3	0	Le minimum reste stationnaire, un maximum apparaît au sud.
8	759,1	0,7	21	Il y a un minimum en Hongrie (753,2 mm).
9	759,4	— 2,9	0	Un minimum se trouve près de Pinsk (751,2 mm.).
10	762,7	— 2,2	1	Un minimum s'étend sur l'Ecosse (742,9 mm.).

11	758,8	3,4	20	Il y a un minimum sur la mer Noire (756,7 mm.).
12	762,5	— 0,2	1	Un minimum de peu d'importance se trouve entre Odessa et Sulina (758,2 mm.); une aire de hautes pressions s'étend tout autour.
13	762,8	— 2,7	4	La pression augmente au sud.
14	761,7	— 1,5	5	La pression barométrique est relativement haute dans l'Europe centrale; il y a un minimum près du lac d'Onéga.
15	761,1	— 0,3	0	Dans la région méridionale de l'Europe la pression est relativement haute, elle est faible au nord-ouest.
16	763,2	— 0,6	3	On aperçoit un maximum planant au-dessus de l'Europe centrale; la pression est faible au nord de la Russie (753,6 mm.).
17	765,9	— 2,0	0	Une aire de hautes pressions dominent sur toute l'Europe occidentale.
18	767,7	— 1,5	0	Le baromètre reste stationnaire dans l'Europe occidentale.
19	765,8	— 1,3	0	Une aire de hautes pressions s'étend sur la Russie sud-ouest.
20	760,7	0,9	0	Un minimum plane au-dessus du lac d'Onéga (749,4 mm.).
21	755,4	— 1,0	1	Il y a un maximum dans l'Europe occidentale, et un minimum à l'est et au nord-est.
22	759,8	— 3,5	0	Un minimum se trouve en Allemagne et en Autriche; à l'est de la Russie la pression est faible.
23	764,7	— 4,2	0	Il y a un maximum dans l'Europe centrale.
24	768,4	— 4,2	0	Les pressions sont faibles au nord et au

				nord-est. Un maximum apparaît au sud-ouest de la Russie.
25	764,8	0,7	0	Un maximum se trouve dans l'Europe centrale; un minimum plane au nord de la Norvège.
26	765,0	2,2	6	Le maximum s'est éloigné vers le sud; le minimum est au nord (746,1 mm.).
27	764,0	3,0	4	Le minimum s'est retiré vers l'est; un nouveau cyclone s'étend sur la Manche.
28	760,9	4,5	2	Un minimum aborde le Danemark (753,3 mm.).
29	759,2	3,7	1	Le minimum s'est transporté vers le golfe de Bothnie.
30	758,5	3,3	0	Le minimum couvre la Finlande; un maximum existe au large de la mer du Nord.
31	762,7	— 2,6	1	Le minimum gagne l'est; une aire de fortes pressions s'étend sur l'Europe occidentale (jusqu' à 771,6 mm.).
Juin	mm.			
1	765,9	— 6,6	0	Le minimum est à Archangel; la zône des fortes pressions persiste sur l'ouest de l'Europe.
2	758,0	— 2,7	0	La pression est faible à l'est de l'Europe. Le baromètre reste très élevé à l'ouest de l'Europe.
3	765,6	— 6,4	1	L'aire des hautes pressions couvre le sud-ouest.
4	764,3	— 1,7	3	Un minimum aborde le golfe de Bothnie.
5	760,3	— 0,9	2	Le minimum atteint Pétersbourg (743,0 mm.).
6	760,2	— 2,4	10	Le minimum se trouve refoulé vers Viatka (745,6 mm.).

7	757,8	1,1	2	Le minimum est à l'Oural tandis qu'un nouveau minimum s'étend entre Varsovie, Pinsk et le Vieux Bichof.
8	755,6	— 0,7	4	Le minimum aborde Moscou (751,1 mm.).
9	756,7	— 3,8	0	Une vaste aire de basses pressions couvre le nord de l'Europe (741,1 mm.).
10	756,2	1,9	0	Les basses pressions sont au nord-ouest de l'Europe (746,6 mm.); un minimum de peu d'importance aborde la Hongrie (752,6 mm.).
11	758,9	3,7	13	Le minimum côtoie la mer Noire (754 mm). Les hauteurs barométriques sont au centre et au nord de la Russie.
12	761,1	3,5	11	Le minimum est près de Sévastopol (755,6 mm.).
13	759,2	5,0	4	L'aire des basses pressions plane au-dessus de Hongrie et de la partie est de la mer Noire (756,9 mm.); le maximum est au nord de l'Europe.
14	758,1	6,4	11	Le minimum est dans les environs d'Odessa (755 mm.); le maximum persiste sur le nord de l'Europe.
15	757,8	4,7	5	Le minimum est à Sévastopol (754,7 mm.).
16	756,3	6,5	0	Le minimum gagne la mer Noire (751,6 mm.)
17	756,9	4,7	0	Idem.
18	759,0	0,3	0	Un maximum couvre le centre de la Russie, un minimum occupe la Prusse et le Danemark (753,5 mm.)
19	763,3	2,1	0	Le minimum s'est porté vers le nord; il y a un maximum au centre de la Russie.
20	764,5	0,1	0	Le minimum est sur la mer Blanche; le maximum est dans les provinces sud de la Russie.

21 765,6	2,9	0	Les hautes pressions sont à l'ouest de l'Europe.
22 763,5	6,0	2	L'aire des fortes pressions persiste à l'ouest de l'Europe; un cyclone de peu de valeur est près de Sévastopol (759,0 mm.).
23 763,4	4,7	0	Les hauteurs barométriques couvrent toujours l'Europe occidentale.
24 761,5	1,5	0	Idem.
25 759,0	2,5	2	Un minimum peu important traverse le continent de l'Europe (756,9 mm.).
26 758,0	1,9	8	Le minimum est en Gallicie (756,0 mm.).
27 ?	?	0	Le minimum est en Hongrie (756,8 mm.); un maximum apparaît à l'ouest de l'Europe.
28 760,7	6,4	0	Le minimum est sur la mer Noire (755,3 mm.); le maximum reste stationnaire dans l'Europe occidentale.
29 760,9	9,5	0	Les pressions augmentent dans l'Europe occidentale; un minimum de peu de valeur est sur la mer Noire 755,6 mm.).
30 761,5	8,5	3	Les pressions sont généralement fortes, sauf sur la mer Noire (759 mm.).
Juillet mm.			
1 762,6	3,5	0	La pression se propage dans la direction sud-nord tout en gagnant de force.
2 763,1	2,3	0	Les pressions barométriques sont fortes.
3 761,6	5,9	4	Les pressions sont assez uniformément distribuées.
4 759,6	4,2	3	Un faible cyclone apparaît sur la mer Noire (756,5 mm.).
5 ?	?	0	?
6 758,7	2,2	5	Un cyclone est près des bords de la Nor-

				vège (747,8 mm.); un autre est sur la mer Noire (755,2 mm.).
7	760,5	5,6	5	Un minimum aborde le littoral nord-ouest de l'Europe (747,4 mm.), un autre plane sur la mer Noire (756,0 mm.).
8	762,9	3,3	2	Une aire de fortes pressions couvre l'est et le centre de la Russie; un minimum peu considérable est sur la mer Noire (758,9 mm.).
9	764,6	— 0,8	3	Le minimum est sur le golfe de Bothnie (751,7 mm.); un cyclone de peu d'étendue est près de Sévastopol (759,0 mm.).
10	758,6	0,2	3	Un minimum de peu d'importance se trouve entre Sévastopol et Nikolaïef; les pressions sont hautes à l'ouest de l'Europe.
11	757,7	— 4,4	0	Le minimum est au centre de la Russie; le baromètre reste élevé à l'ouest de l'Europe.
12	762,3	— 6,4	3	Une zône de basses pressions couvre les provinces de la Baltique.
13	762,6	— 4,9	10	L'aire des basses pressions s'est transportée vers Varsovie (754,0 mm.); à l'ouest de l'Europe le baromètre est en baisse.
14	760,1	— 4,7	6	Le minimum est à Varsovie (757,3 mm.).
15	?	?	14	Le minimum est à Sévastopol (755,0 mm.).
16	752,1	— 0,4	15	Le minimum se maintient à Sévastopol (749,4 mm.).
17	742,7	1,1	8	Idem (739,0 mm.).
18	739,9	— 1,4	0	Le minimum s'est éloigné dans la direction d'Elisabethgrad (739,9 mm.).
19	744,7	— 2,6	0	Le minimum a gagné Elisabethgrad (744,7 mm.).

20 754,3 — 4,3 0 Le minimum est au Vieux Bichof (750,7 mm.).

21 760,1 — 3,1 1 Un minimum de peu d'importance est dans les provinces de l'ouest (752,0 mm.).

22 758,9 — 0,6 5 Les pressions sont faibles sur la mer Baltique et les provinces du centre de la Russie.

23 758,3 — 3,3 0 Le minimum est près de Moscou (751,2 mm.).

24 756,8 — 2,7 0 Idem (752,1 mm.).

25 757,8 — 0,6 0 Le minimum a été refoulé jusqu'à Kasan; le baromètre monte à l'ouest.

26 759,4 — 0,8 0 Le cyclone est à Kasau (749,0 mm.).

27 760,6 — 2,0 0 Un nouveau minimum est sur la mer du Nord.

28 756,3 — 0,2 1 Le minimum gagne Libau (748,1 mm.).

29 757,4 — 3,4 2 Le minimum s'est transporté à Charkof (756,0 mm.).

30 758,7 — 3,7 0 Le minimum s'est vu refoulé au sud-est de la Russie.

31 762,7 — 4,0 0 Le minimum s'est dirigé vers l'est.

L'étude minutieuse des matériaux recueillis par le service des orages de la Russie m'a amené à conclure que les orages se restreignent particulièrement au quadran sud-est du cyclone; cette tendance à la concentration au sud-est du quadran est plus facile à observer pendant les mois les moins chauds de la saison orageuse, c'est-à-dire au printemps et en automne) tandis qu'au mois de juillet les manifestations électriques sont plus probables dans tous les quadrans du cyclone. Pour juger de la position des régions orageuses par rapport au centre du cyclone on peut s'en rapporter premièrement à la direction du vent en temps d'orage et aux différents points de l'horizon servant de point de départ à l'orage;

secondement, on peut déterminer sur la carte la situation relative dans la région du cyclone des différentes stations où l'orage a eu lieu.

Nous avons déjà vu que les courants du nord-ouest, de l'ouest et du sud-ouest prédominent dans la partie méridionale du cyclone et ceux du sud-est, de l'est et du nord-est dans la partie septentrionale. A la page 9 nous avons trouvé que le nombre des orages venus du S, SO et O équivaut à 49%, c'est-à-dire que presque la moitié de tous les orages se concentre dans la partie sud du cyclone. Mais ces chiffres ne sont pas identiques à celles que nous avons trouvés pour les orages de la Russie en général, où les orages arrivent

du	N	NE	E	SE	S	SO	O	NO
En %	7,2	6,6	5,4	9,0	14,1	21,7	18,7	16,3

On dirait que les orages du district d'Elisabethgrad ne sont pas aussi nettement concentrés dans le quadran sud-est du cyclone, en d'autres termes, l'anneau orageux du sud de la Russie occupe plus uniformément toute la circonférence. Plus haut nous avons fait voir que pendant les mois les moins chauds de la saison orageuse (en automne et au printemps) les orages tendent à se restreindre au quadran sud-est; tandis que vers les milieu de l'été ils sont dispersés sur toute l'étendue de la circonférence et sont également probables dans toutes les parties du cyclone (dans la partie du sud et dans celle du nord). La même dépendance paraît exister entre la concentration des orages dans certaines parties du cyclone et la latitude du lieu, les orages des provinces méridionales de la Russie sont plus uniformément répandus tout autour de la circonférence du cyclone et ceux du nord appartiennent davantage aux parties sud et sud-est du cyclone, on en peut juger d'après les chiffres que nous trouvons dans l'article de

M. Weinberg sur les orages de l'arrondissement télégraphique de Kasan. Les orages de l'arrondissement de Kasan (année 1881—1883) sont distribués de la manière suivante:[1])

Point de départ .	N	NE	E	SE	S	SO	O	NO	Total
Nombre des orages.	328	270	272	325	544	812	850	635	4036

Nos orages nous sont apportés par trois systèmes principaux de cyclones: 1) les cyclones qui traversent le nord-ouest de l'Europe avant d'arriver jusqu' à nous, 2) les tourbillons qui nous viennent de l'Europe centrale et 3) les minima venus à travers la mer Noire. Nous avons trouvé le nombre des orages apportés par les trois systèmes différents. Voici ce qu'il en est:

192	orag.	(31,7%)	apportés par les cyclones du systemè nord-ouest
168	»	(27,8%)	» » » » » » sud
164	»	(27,1%)	» » » » » venus de l'Europe centrale.
6	»	(1,0%)	se sont effectués accompagnés d'une pression barométrique uniformément répandue.
75	»	(12,4%)	» » entre deux cyclones.

Tous les trois systèmes nous apportent à peu près le même nombre d'orages; mais il ne faut pas oublier que le nombre des cyclones appartenant à chacun de ces trois systèmes et signalés pendant la période orageuse des années 1884 et 1885 n'était pas le même; le nombre de la position matinale des minima appartenant au

système	du	nord était	56
»	»	sud »	23
»	»	centre »	19

[1]) Electrotechnische Zeitschrift. 1884, p. 255.

D'où il résulte que pour un minimum

du système du nord il y a eu 4 orages
» » » sud » » » » 9 »
» » » centre » » » » 7 »

Par conséquent, les minima, venus de l'Europe centrale ainsi que les cyclones du système sud, portent une plus grande quantité d'énergie électrique que les minima du nord-ouest de l'Europe. La liaison de la grêle avec les cyclones du système centrale est encore plus évidente; et réellement le nombre des observations de grêle est

avec des cyclones du système nord 23
» » » » central — 45
» » » » » sud 13

ou bien pour un cyclone du système nord 1,6 cas
» » » » » » » central 4,0 »
» » » » » » » sud 2,0 »

L'anneau orageux se concentre sur la circonférence du cyclone entre les isobares 750—760 mm., c'est-à-dire dans les parties du cyclone servant, pour ainsi dire, de transition vers les régions des fortes pressions; la justesse de l'opinion émise ressort du tableau qui se trouve à la page 8; on y voit que le plus grand nombre des orages a été observé avec une pression égale à 755—760 mm. (au niveau de la mer); j'en suis venu aux mêmes résultats en étudiant les observations du service général des orages en Russie. Mais alors qu'est-ce qu'un orage en sa qualité de météore? J'ai déjà exprimé la supposition, que dans la région du grand cyclone il se pouvait former de petits tourbillons secondaires, emportés par le courant général du cyclone, ces tourbillons secondaires à leur tour peuvent se dissoudre en parties tourbillonnaires

(se segmenter) et vice versa deux tourbillons selon les conditions peuvent se fondre pour n'en former qu'un.

Nous nous hasardons donc à dire qu'un orage est un petit tourbillon secondaire formé dans la région du cyclone principal. On remarque la plus grande tendance à la formation de ces tourbillons secondaires sur les bords extérieurs des grands cyclones et particulièrement dans leurs quadrans sud-est et sud-ouest; c'est ce qui explique la concentration des orages dans la partie méridionale du cyclone ainsi que dans la zône qui sert de trait-d'union entre les deux aires des différentes pressions. Tout tourbillon à orage n'a qu'un diamètre de peu d'étendue, c'est pourquoi l'orage et la grêle ne frappent qu'une zône étroite. Quelquefois plusieurs tourbillons ayant un même point de départ suivent des voies parallèles ou s'entrecroisent dans leur trajet; il en résulte une dissolution évidente de l'orage en plusieurs filaments ou branches d'orages. Enfin les changements subits dans la direction et la force du vent pendant l'orage ne sont qu'une conséquence naturelle du passage en premier lieu de la partie antérieure du tourbillon et de la partie postérieure en second. Les observations sur les orages recueillies dans le district d'Elisabethgrad m'ont fourni la possibilité de constater l'existence de ses petits tourbillons et de les suivre pas à pas dans leur marche progressive. Voici quelques exemples qu'on peut suivre sur des cartes ci-jointes.

Le 27 Avril l'année 1885. Le tourbillon à orage est entré dans le district d'Elisabethgrad du côté du sud-ouest (carte I). L'orage a éclaté à Constantinovka (№ 37) à 6 h. de l'après-midi et à Sémenovka (№ 65) à $6^1/_2$ h. de l'après-midi; avant le commencement de l'orage le vent soufflait avec une grande violence de l'ouest, peu à peu il s'était porté au nord-est tout en perdant de force; l'orage était accompagné d'une averse torrentielle.

L'orage atteignit Sémenovka du nord ouest avec un vent NO (bourrasque forte) qui s'était porté au nord-est par le nord.

A 7 h. 45′ de l'après-midi l'orage s'est avancé vers Arbousinka (№ 7); venu du nord-ouest, commencé avec un vent nord-ouest il se termina par un calme absolu; les grêlons (grêle depuis 7 h. 50′ jusqu' à 8 h du soir) ont été de la grandeur d'un oeuf de passereau et ont formé une couehe de neuf centimètres d'épaisseur.

A *8 h. 25′ de l'après-midi.* L'orage a commencé à Bratsk (№ 14) et a duré jusqu' à la tombée de la nuit; entré par le nord-ouest, il était accompagné d'un vent nord-ouest d'une extrême violence qui finit par s'adoucir. Les grêlons (grêle à 8 h. 40′) était de différente grosseur à commencer par celle d'un pois et allant jusqu' aux dimensions d'un oeuf de pigeon, ayant occasionné de grands dégâts aux ceréales; la grêle a recommencé à plusieurs reprises dans la soirée et la nuit (jusqu' à 3 h. du matin).

Vers *9 h. de l'après-midi* une averse torrentielle accompagnée de la grêle (9 h. 18′ du soir) atteignit Nikolaïevka (№ 49); l'orage vint du nord avec un vent nord assez intense; les premiers grêlons tombés ressemblaient plutôt à du grésil, mais dans la suite ils gangnèrent la forme d'une pomme polonaise tout en atteignant la grosseur d'une simple noisette, la grêle a continué aves des intermittences jusqu' à 3 h. du matin.

A *9 h. de l'après-midi* l'orage a commencé par une averse de pluie avec grêle à Bobrinetz et à Orochansk (№ 12 et 56). Il est venu du sud-ouest à Orochansk et de l'ouest à Bobrinetz; bien des vitres ont été fortement endommagées à Bobrinetz, même dans quelques bâtiments les grêlons traversèrent les vitres en les trouant mais sans les briser. Le vent à Bobrinetz était du nord-ouest d'une violence peu commune; tandis que le calme précédait l'orage à Orochansk, en temps

d'orage un vent très fort soufflait du sud-ouest et après l'orage très faible il était à l'est. Ainsi l'orage avait commencé.

A la	station	№ 37	à 6	h.	du soir	par	un	vent	NE	(fort)
»	»	№ 65	» 6	» 30′	»	»	»	»	N	»
»	»	№ 7	» 7	» 45′	»	»	»	»	NO	»
»	»	№ 14	» 8	» 25′	»	»	»	»	NO	»
»	»	№ 49	vers 9	»	»	»	»	»	N	»
»	»	№ 12	à 9	»	»	»	»	»	NO	»
»	»	№ 56	» 9	»	»	»	»	»	SO	»

La grêle a commencé.

A la	station	№ 7	à 7	h. 50′	de	l'après-midi
»	»	№ 14	» 8	» 40′	»	»
»	»	№ 49	» 9	» 18′	»	»
»	»	№ 12	» 9	» 45′	»	»
»	»	№ 56	» 9	» 30′	»	»

Le commencement de la pluie a eu lieu.

A la	station	№ 65	à 6	h.	de	l'après-midi	(averse)
»	»	№ 37	» 8	» 45′	»	»	(pluie abond)
»	»	№ 7	» 8	»	»	»	(averse)
»	»	№ 14	» 8	» 40′	»	»	(averse)
»	»	№ 49	» 9	» 13′	»	»	(averse)
»	»	№ 12	» 9	» 30′	»	»	(pluie abond.)
»	»	№ 56	» 9	» 30′	»	»	(averse)

A en juger d'après la direction du vent aux différentes stations, on peut supposer que le tourbillon orageux a traversé la voie marquée sur notre carte de la ligne rouge pointillée. Vers 9 h. de l'après-midi le centre du tourbillon se trouvait entre les stations № 12 et № 56. Selon toute pro-

babilité près de la station № 7 le tourbillon s'était partagé en deux segments dont l'un s'était dirigé vers Rovnoé (№ 63), où l'orage parvint à 9 h. 45′ du soir et plus loin à Krasnoverchsk (№ 38) l'orage fondit en une pluie abondante qui eut lieu à 11½ h. du soir. Le même jour des orages et des cas de pluie avaient été signalés dans la région nord du district, notamment

un orage	à la	station	№ 51	vers 7 h.	du	soir	avec un	vent O
»	»	»	№ 29	entre 5—8 h.	»	»	»	E
»	»	»	№ 27	» 6—8 »	»	»	»	NO

la pluie	à la station	№ 41	vers	8	h.	du	soir	avec un	vent S
»	»	№ 59	»	7	»	»	»	»	» NO
»	»	№ 36	»	6	»	»	»	»	» NE

Le tourbillon du 27 avril 1885 que nous venons de décrire s'était formé dans la partie sud-est du cyclone, dont le centre se trouvait près du golfe de Bothnie. Le baromètre à 7 h. du matin à Elisabethgrad marquait 759,7 mm.

Le 8 mai 1885. Le centre du cyclone à 7 h. du matin se trouvait en Hongrie et dans le courant de la journée s'était transporté à Pinsk. Par conséquent les orages s'étaient formés dans le quadran sud-est du cyclone. La hauteur barométrique était 759,1 mm. à Elisabethgrad. Les orages ont commencé dans le district à 1 h. de l'après-midi. L'approche du tourbillon d'orage (carte II) s'est annoncée à Olchanka (№ 55) par une pluie à 1 h. de l'après-midi accompagnée d'un vent sud-est de force moyenne. 30—40 minutes plus tard le tourbillon atteignait presqu'en même temps les stations № 41 et № 14; à la station № 41 l'orage était accompagné d'une pluie torrentielle et d'un vent nord-est d'une violence extrême tandis qu'un vent sud-est sévissait à la station № 14.

Les deux points mentionnés s'étaient par conséquent trouvés dans de différentes parties du tourbillon orageux. La grêle eut lieu à la station № 14 à 1 h. 45′ et dura jusqu' à 2 h. 10′. Les grêlons étaient de forme et de grosseur différentes, il y en avait gros comme une noix, sphériques, munis de concavités et d'autres de la grosseur d'un oeuf de pigeon, aplatis munis d'aiguilles, incolores, avec un noyau blanc dans le centre; cette grêle a causé un grand préjudice aux récoltes. A la station № 41 les grêlons avait une forme oblongue, irrégulière, de la grosseur d'un oeuf de pigeon, d'un blanc de neige, très lourds et très durs, 350 hectars de céréales ont été détruits.

L'orage avait été signalé dans le lointain à la station № 8 par un vent sud:

à la	station	№ 42	à 3 h.	de l'après-midi	par	un	vent	sud-ouest.
»	»	№ 22	entre 2—$3^{1}/_{2}$ h.	»	»	»	»	?
»	»	№ 27	vers 2 h. 30′	»	»	»	»	sud
»	»	№ 53	entre 2—4h.	»	»	»	»	?
»	»	№ 63	vers $2^{3}/_{4}$ »	»	»	»	»	calme
»	»	№ 31	à $3^{1}/_{2}$ »	»	»	»	»	?
»	»	№ 64	» 4 »	»	»	»	»	?
»	»	№ 36	» 4 »	»	»	»	»	nord-est assez faible
»	»	№ 48	» 4 »	»	»	»	»	sud-ouest fort
»	»	№ 61	» 4 h. 2′	»	»	»	»	sud fort
»	»	№ 45	» 4 h. 20′	»	»	»	»	est très fort

Chute de la grêle:

à la	station	№ 41	à 2 h. 15′	de l'après-midi
» »	»	№ 14	» 1 » 45′	»
» »	»	№ 42[1]	» 4—$4^{1}/_{2}$ h.	»

[1]) De la grosseur d'une noix.

à la station № 22 à 2—3 h. de l'après-midi
» » » № 64 » 4 » »
» » » № 36 » 8 h. 40′—8 h. 45′ de l'après-midi
» » » № 26 » ? »
» » » № 10[1]) » ? »
» » » № 27[2]) » 3 h. 40′—3 h. 43′ »
» » » № 53 etre 2—3 h. 50′ »
» » » № 61 à $3^{1}/_{2}$—4h.10′, 5h.40′—5h.55′ »

Selon toute évidence le tourbillon orageux est entré dans le district d'Elisabethgrad par l'ouest et vers 1 h. de l'après-midi son centre se trouvait entre la station № 41 et № 14; vers $2^{1}/_{2}$ il s'était avancé vers la station № 53, № 27 où il s'etait partagé en deux segments; l'un des courants s'était dirigé vers l'est et à 4 h. de l'après-midi avait atteint les stations № 36 et № 48, le second avait pénétré au nord-est où à 4 h. 20′ de l'après-midi il versa une pluie torrentielle à la station № 45.

Le second filament d'orage n'avait effleuré que les parages nord du district. Un orage accompagné de la grêle et d'une pluie torrrentielle était signalé

à Novoarchangel № 50[3]) à 1 h. 27′ de l'après-midi par un vent SSO
un orage à la stat. № 30 » 1 » 40′ » » » » » SE
orage et averse № 51 » 3 » 40′ » » » » » S

Par conséquent les filaments d'orage étaient transportés du sud-ouest au nord-ouest, c'est-à-dire en suivant le courant général qui dominait dans le quadran sud-est du cyclone principal. Quelquefois on a l'occasion de suivre tout une suite de

[1]) Grêle, très serrée, grêlons de la grosseur d'une noix et rarement de celle d'un oeuf de poule.

[2]) En forme de lentille et de la grosseur d'une bonne noisette.

[3]) Les grêlons sont en forme de boule et de lentille. La récolte du seigle est entièrement détruite, celle du froment fortement endommagée.

filaments d'orage se succédant graduellement, par exemple, le 18 juin 1884 (carte III). Une dépression existait en Hongrie le 17 juin, elle s'était transportée le 18 sur la mer Noire; la hauteur barométrique était 759,1 à Elisabethgrad; le district se trouvait dans le quadran nord-est du cyclone.

Le premier filament d'orage s'annonçait à Elisabethgrad du sud-sud-est à 10 h. 20′ du matin;

vers 11 h. du matin l'orage s'était avancé vers la station № 60
» 11 h. 30′ » » » » » » » № 51

A la station № 60 l'orage était venu du SE par le calme
» » » № 51 » » » » S » » »

Une autre branche était entrée à la station № 31 (à $10^1/_2$ h. du matin) par l'est et s'était dirigée à l'ouest; elle a été signalée

à la station № 38 à $11^1/_2$ h. du matin de l' E par un vent E fort
» » № 81 » 12 h. 50′ de l'apr.-m. du NE » » » ENE »
» » № 67[1]) à 12 h. 30′ » ? » » » le calme

La troisième branche, sortie de Bobrinetz (№ 12) à midi 48′, par un vent E, s'était dirigée vers la station № 24;

l'orage était sign. à la stat. № 24 à 1 h. de l'apr.-midi venu du NNE par un vent NE
» » » » » » № 59[2]) à 2h. » » » » E » » » E
» » » » » » № 55 à $2^1/_4$ h. » » » E » » » E

La quatrième branche s'était portée vers la partie sud-ouest du district. A 4 h. de l'après-midi l'orage a éclaté à la station № 46; venu du sud, il était accompagné d'un vent sud, dans la suite du trajet

[1]) A la station № 67 on a signalé une chute de grêle avec des grêlon gros comme un oeuf de passereau.

[2]) Chute de grêle depuis 3 h. 35′ jusqu' à 3 h. 38′ de l'après-midi.

il avait atteint la station	№ 20	à 5 h.	de l'après-midi,	venu du	SE	par un vent	S
» » » » »	№ 1	à 5 h. 40′	»	» »	E	» » »	SE
» » » » »	№ 37	» 8 h.	»	» »	SE	par le calme	
» » » » »	№ 41	» 8 h. 45′	»	» »	E	» » »	SE
» » » » »	№ 55	» 9 h. 30′	»	» »	SE	» » »	SE

La cinquième branche a été signalée

à la station	№ 43[1]	à 7 h. 15′	de l'après-midi	venue du	SE	par un vent	NE
» » »	№ 56	» 9 h. 30′	» »	» »	SE	» » »	NE[2]
» » »	№ 12	» 10 h. 12′	» »	» »	NE	» » »	E

Selon toute évidence la tendance à la formation des tourbillons orageux dans une partie du cyclone se maintient pendant un laps de temps par inertie météorologique pour ainsi dire; c'est pourquoi les manifestations orageuses ne s'épuisent pas en un effort orageux dans une certaine localité, mais on dirait qu'elles se signalent par des retours convulsifs dans les différents parages de la dite localité. Le jour, que nous venons de mentionner, des retours de l'activité orageuse mourante, pour ainsi dire, dans son cours général se font remarquer dans plusieurs points du district; par exemple une dernière manifestation orageuse a été signalée à la station № 82 à 4 h. de l'après-midi; l'orage, venu de l'est par un vent est très violent, s'était porté vers la station № 81 de l'est-sud-est par un vent ESE. Un autre orage du même genre a été signalé à la station № 38 à 6 h. 45′ de l'après-midi, il était entré par l'est et accompagné d'un vent sud-est; vers 8 h. 15′ de l'après-midi il franchit l'espace qui le séparait de la station № 51 (du sud-est par un vent tempêteux sud-est) où il était accompagné de la grêle (grêlons comme un gros pois). Enfin un orage très peu intense a été signalé à la station

---

[1]) Une chute de grêle a été signalée à la station № 43; les grêlons était de la grosseur d'une noix.

[2]) Le vent était tempêtueux.

№ 12 entre 2—3 h. de l'après-midi de l'est par un vent est très faible.

Il nous reste à noter encore une particularité des manifestations électriques. Un tourbillon orageux en avançant dans une certaine direction ne frappe pas de décharges électriques et de grêle tous les points qu'il rencontre dans son parcours; on dirait qu'il éprouve une certaine tendance au choix; par exemple, la branche, dont le trajet a été signalé entre les stations № 24 et № 59, a épargné les stations № 63 et № 53; la branche, qui avait passé entre les stations № 59 et № 55, n'a pas seulement effleuré la station № 41 ni celle du № 42. Sous ce rapport nos tourbillons orageux ont une grande ressemblance avec les tornados, qui se distinguent par les mêmes propriétés; sans aucun doute ces particularités ne peuvent être attribuées à des situations orographiques de la localité traversée par l'orage.

Le 24 mai 1884 (carte IV). Le 22 mai on signalait une dépression en France, dépression qui s'avançait progressivement vers l'est; elle atteignit l'Autriche le 23,
» » Varsovie » 24,
» » les provinces de la Baltique le 25.

A 7 h. du matin le 24 mai le district d'Elisabethgrad se trouvait dans le quadran sud-est du cyclone, isobare 754,1 mm.; l'orage a été signalé dans 23 points du district (dont 13 avec grêle) et la pluie dans 33 localités. La direction de la branche orageuse dans ses mouvements généraux était de l'ouest à l'est. L'orage a débuté par la station № 55 à la limite occidentale du district vers $10^1/_2$ h. du matin, du sud par un vent sud; l'orage a persisté presque sans intermittences jusqu'à $2^1/_2$ h. de l'après-midi, tandis que le vent avait tourné à l'ouest, et la direction des nuages avait déviée vers le sud-ouest; à $11^1/_4$ du matin on a signalé une chute de grêle durant 1 minute; les grêlons étaient ovales et d'un blanc gris;

quelquesuns des grêlons avaient des espaces vides dans le centre. Entre midi et midi et 30′ l'orage s'était propagé presque sur toute l'étendue de la limite occidentale du district en atteignant au nord la station № 67 (où par un vent sud-ouest il est tombé de la grêle) et au sud la station № 1 (de l'ouest, par un vent ouest). La marche progressive de l'orage continue dans la direction est en se ramifiant en trois filaments. La première branche à travers les stations № 28, et № 81 s'était dirigée vers la station № 51;

l'orage est entré à la stat. № 21 à 1 h. de l'après-midi du sud par un vent S tempêt.
» » » » » № 81 » 1 h. 15′ » ouest » » » O »
(Une chute de grêle à 1 h. 35′ de l'après-midi).
à la station № 51 à 1 h. 25′ de l'après-midi du sud par un vent S faible.

La seconde branche était sortie d'Olchanka № 55. A 2 h. 50′ la grêle a été signalée à Elisabethgrad; à trois verstes, à l'est d'Elisabethgrad, la station Trépovka avait été éprouvée par un ouragan, qui avait déraciné des arbres et brisé des toitures; le vent était au SSO pendant l'orage. La troisième branche s'était dirigée des parages sud-ouest du district vers le nord-est.

De plus un orage isolé était signalé à la station № 58 depuis 1 h. jusqu'à 3 h. de l'après-midi, accompagné de grêle (grêlons de forme irrégulière et de la grosseur d'un haricot). Dans le courant de la même journée il a plu aux stations suivantes:

station	№ 20	depuis	1 h. 30′	jusqu'à	3 h.	de l'après-midi	vent S
»	№ 23	»	1 h. 10′	»	3 h. 30′	»	» O
»	№ 31	»	2 h.	»	4 h.	»	» SO
»	№ 59	»	3 h. 45′	»	4 h. 5′	»	» O
»	Chestakovka		2 h.		?		?

Ainsi l'étude des orages du district d'Elisabethgrad vient corroborer nos conclusions antérieures: il faut considérer les

orages comme des tourbillons secondaires formés sur les bords extérieurs du grand cyclone. Les tourbillons sont emportés par les courants dominant dans le cyclone principal. Pour le district d'Elisabethgrad les cyclones d'un présage orageux sont ceux qui arrivent de l'Europe centrale ainsi que les minima de la mer Noire; c'est pourquoi l'approche d'un cyclone (appartenant à l'un de ces deux systèmes) des parages ouest ou sud-ouest de la Russie s'il y a des conditions locales favorables au manifestations électriques (une température au-dessus de la normale) doit selon toute probabilité nous faire prévoir la naissane d'une période orageuse dans le dit district.

LÉGENDE DES CARTES.

Dans les quatre cartes ci-jointes nous avons tracé le trajet des tourbillons orageux pour les jours suivants le 27 avril 1885 (carte I), le 8 mai 1885 (carte II), le 18 juin 1884 (carte III) et le 24 mai 1884 (carte IV). Les flèches indiquent la direction du vent dont la force est marqué par des traits perpendiculaires aux flèches (vent faible—un trait, modéré—deux traits, fort—trois traits, ouragan—quatre traits).

Pour indiquer les différents facteurs météorologiques nous avons employés les signes suivants:

pluie	un rond rouge uni,
averse	un rond avec un point au centre,
grêle	un triangle rouge
orage	flèche cassée.

Sous la marque indiquant la grêle nous avans noté l'heure de la chute de grêle. Les heures depuis minuit jusqu'à midi sont marquées de la lettre *a* et les heures de l'après-midi jusqu'à minuit par la lettre *p*. La ligne pointillée exprime la direction de la translation des tourbillons orageux. La ligne unie avec des heures marquées aux deux bouts, indique la propagation progressive de l'orage; par exemple, à la carte I les lignes qui traversent les stations № 37, 7, 14, 12 et 56, marquent que l'orage a commencé

à la station	№ 37	à 6 h.	de l'après-midi
» » »	№ 7	» 7 h. 45′	» »
» » »	№ 14	» 8 h. 25′	» »
» » »	№ 12 et 56	» 9 h.	» »

Carte I. Le tourbillon orageux, comme on le voit en suivant la ligne pointillée, a passé au sud de la station № 37 et au nord des stations № 7, 14, 49; à 9 h. de l'après-midi le centre du tourbillon se trouvait entre les stations № 12 et 56.

Carte II. Cette carte représente trois filaments principaux d'orage:

1)	№ 50	où l'orage a commencé	à 1 h. 27′ de l'après-midi
	№ 30	» » » »	» 1 h. 40′ » »
	№ 51	» » » »	» 3 h. 40′ » »
2)	№ 41	» » » »	» 1 h. 30′ » »
	№ 53	» » » »	» 2 h. » »
	№ 61	» » » »	» 4 h. » »
	№ 45	» » » »	» 4 h. 20′ » »
3)	№ 53	» » » »	» 2 h. » »
	№ 63	» » » »	» 2 h. 45′ » »
	№ 36	» » » »	» 4 h. » »

Le tourbillon orageux à 1 h. 30′ environ avait passé entre les №№ 41 et 8 et s'était dirigé vers le nord-est; près de la station № 53 l'orage s'était partagé en deux segments et sa branche secondaire s'était dirigée vers les stations 63 et 36.

Carte III. Les filaments d'orage s'etendent vers l'ouest et le nord-ouest, notamment:

1) à la station № 26	commencement de l'orage	à 10 h. 20′	du matin
» » » № 60	» »	» 11 h.	» »

à la station № 51 commencement de l'orage à 11 h. 30′ du matin
2) » » » № 31 » » » » 10 h. 30′ » »
» » » № 38 » » » » 11 h. 30′ » »
» » » № 67 » » » » 0 h. 30′ apr. midi
3) » » » № 12 » » » » 0 h. 48′ »
» » » № 24 » » » » 1 h. 30′ »
» » » № 59 » » » » 2 h. »
» » » № 55 » » » » 2 h. 15′ »

Une branche qui s'était formée près de la station № 63 s'était dirigée vers № 33 et atteignit № 30 à 3 h. de l'après-midi.

4) à la station № 43 commencement de l'orage à 7 h. 15′ apr. midi
» » » № 56 » » » » 9 h. 30′ »
» » » № 12 » » » » 10 h. 12′ »
5) » » » № 46 » » » » 4 h. »
» » » № 20 » » » » 5 h. »
» » » № 1 » » » » 5 h. 40′ »
» » » № 37 » » » » 8 h. »
» » » № 41 » » » » 8 h. 45′ »
» » » № 55 » » » » 9 h. 30′ »

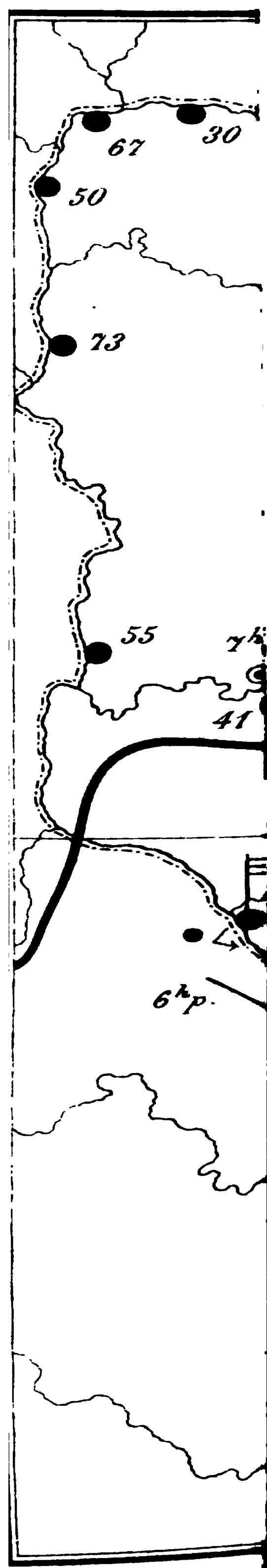
Carte IV. Trois branches d'orage se trouvent tracées sur cette carte.

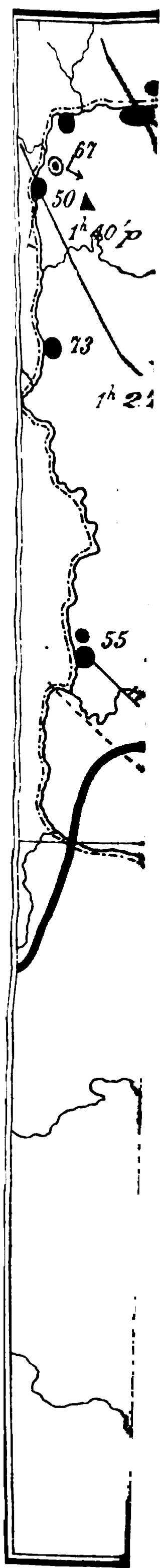
1) à la station № 67 commencement de l'orage à 0 h. 20′ apr. midi
» » » № 28 » » » » 1 h. »
» » » № 81 » » » » 1 h. 15′ »
» » » № 51 » » » » 1 h. 30′ »
2) » » » № 55 » » » » 10 h. 30′ du matin
» » » № 41 » » » » 1 h. de l'apr.-midi
» » » № 61 » » » » 1 h. 25′ »

à la station № 5 commencement de l'orage à 2 h. de l'apr.-midi
» » » № 51 » » » » 2 h. 10′ »

A 2 h. de l'après-midi environ l'orage a passé entre les stations № 51 et 5, ce dont on peut juger d'après la direction du vent (nord-ouest à la station № 51 et sud-ouest à la station № 5).

La troisième branche de la station № 1 s'était dirigée au nord-est vers les stations № 12, 24 (à 2 h. de l'après-midi) et № 26 (à 2 h. 15′ de l'après-midi).

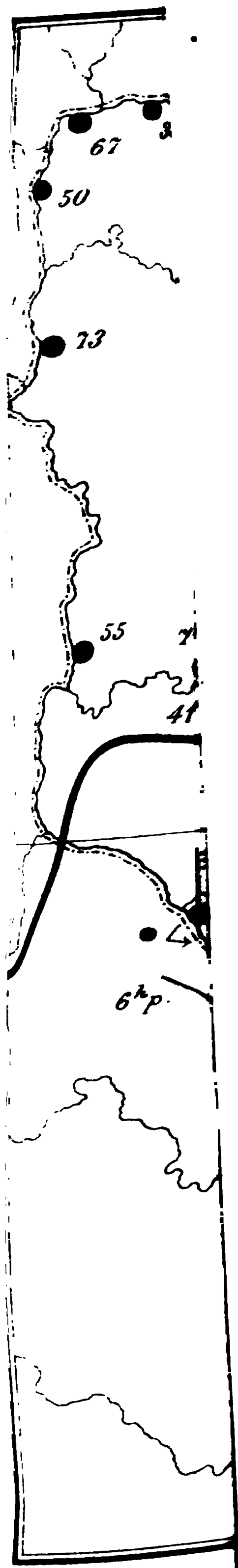

67
30
50
73
55
41
6h p.


67
50
1h 40' p
73
55

à la station № 5 commencement de l'orage à 2 h. de l'apr.-midi
» » » № 51 » » » » 2 h. 10′ »

A 2 h. de l'après-midi environ l'orage a passé entre les stations № 51 et 5, ce dont on peut juger d'après la direction du vent (nord-ouest à la station № 51 et sud-ouest à la station № 5).

La troisième branche de la station № 1 s'était dirigée au nord-est vers les stations № 12, 24 (à 2 h. de l'après-midi) et № 26 (à 2 h. 15′ de l'après-midi).


67
50
73
55
6h p.

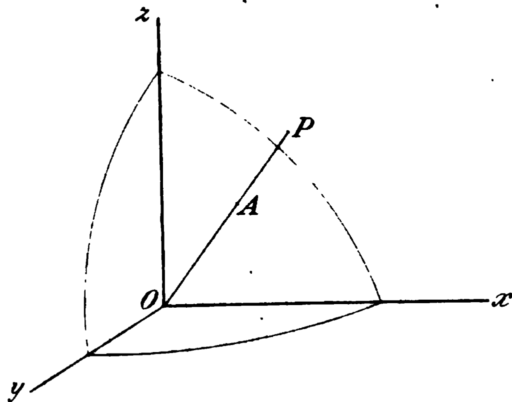
Страничка Анализа.

С. Зейлигера.

Я намѣренъ дать обобщеніе одной теоремы Вейерштрасса, съ которой я познакомился при изученіи работы по теоріи свѣта нашей многоуважаемой соотечественницы, г-жи С. Ковалевской. Теорема, о которой идетъ рѣчь, служитъ исходнымъ пунктомъ изслѣдованій вышеупомянутой ученой; поэтому я осмѣливаюсь считать свое сообщеніе не лишеннымъ интереса.

Я напомню теорему Вейерштрасса, которую я цитирую по сочиненію г-жи Ковалевской (Acta Mathematica за 1884 г.: «Ueber die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln»).

Теорема Вейерштрасса. Пусть S—замкнутая поверхность,



встрѣчающая лишь въ *одной* точкѣ всякую прямую OA, выходящую изъ начала O прямоугольныхъ координатъ.

Возьмемъ на AO точку P и обозначимъ отношеніе $\frac{OP}{OA}$ чрезъ t. Уравненіе

$$t = const.$$

представитъ нѣкоторую замкнутую поверхность σ_t.

Теперь пусть $F(x, y, z)$—конечная и непрерывная функція и R интегралъ:

$$R = \iiint\limits_{t_0 - t} \frac{dF}{dx} d\omega,$$

гдѣ $d\omega$—элементъ объема и интеграція распространяется на всѣ точки $P(x, y, z)$, лежащія внутри объема, ограниченнаго поверхностями σ_{t_0} и σ_t. Положивъ это, мы имѣемъ:

$$A) \qquad \frac{dR}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \iiint\limits_{t_0 - t} F \frac{dt}{dx} d\omega.$$

Въ этомъ и заключается теорема Вейерштрасса.

Прежде чѣмъ перейти къ ея обобщенію, я считаю необходимымъ сдѣлать одно замѣчаніе для того, чтобы указать на путь, по которому я шелъ.

Замѣчаніе. Функція t Вейерштрасса есть, по опредѣленію, однородная функція первой степени. Геометрически это очевидно. Достаточно себѣ представить, что точка P удаляется вдоль прямой OA (см. чертежъ): величины OP и какой нибудь координаты пропорціональны другъ другу, но OP, по опредѣленію, пропорціонально t, слѣд. t пропорціонально каждой изъ трехъ координатъ точки P, каковое свойство принадлежитъ функціи однородной первой степени. Если уравненіе поверхности S (см. выше).

$$\varphi(x,y,z)=0,$$

то поверхность σ_t будетъ представлена уравненіемъ:

$$\varphi\left(\frac{x}{t},\frac{y}{t},\frac{z}{t}\right)=0.$$

Естественно задать себѣ вопросъ: каковы свойства интеграла R для t функціи однородной n-ой степени? Отвѣтомъ на этотъ вопросъ является теорема, которой посвящена настоящая статья.

Теорема. Пусть t однородная функція степени n. Уравненіе

$$t=const.$$

представляетъ нѣкоторую поверхность σ_t. Если

$$R=\iiint\limits_{t_0-t}\frac{dF}{dx}d\omega,$$

гдѣ $d\omega$ элементъ объема и интеграція обнимаетъ весь объемъ, ограниченный поверхностями σ_{t_0} и σ_t, то

$$B)\qquad \frac{dR}{dt}=\frac{1}{n}\frac{d^2}{dt^2}\iiint\limits_{t_0-t}F\frac{dt}{dx}d\omega.$$

Полагая, что

$$Q=\iiint\limits_{t^1_0-t^1}\iiint\limits_{t_0^2-t^2}\cdots\iiint\limits_{t_0^n-t^n}\frac{d^nF}{dx_1dx_2\ldots dx_n}dx_1dy_1dz_1\ldots\ldots dx_ndy_ndz_n,$$

$$\text{и } S=\iiint\limits_{t^1_0-t^1}\iiint\limits_{t_0^2-t^2}\cdots\iiint\limits_{t_0^n-t^n}F\frac{dt_1dt_2}{dx_1dx_2}\cdots\frac{dt_n}{dx_n}dx_1dy_1dz_1\ldots dx_ndy_ndz_n,$$

гдѣ t_μ есть однородная функція (x_μ, y_μ, z_μ) съ показателемъ однородности m_μ, то

$$C) \qquad \frac{d^n Q}{dt_1 dt_2 \ldots dt_n} = \frac{1}{m_1 m_2 \ldots m_n} \, \frac{d^{2n} S}{dt_1^2 dt_2^2 \ldots dt_n^2}$$

Перехожу къ доказательству уравненій (B) и (C).

Разсмотримъ поверхность σ_t, представляемую уравненіемъ

$$t = const.$$

Уравненіе касательной плоскости въ точкѣ $P(x,y,z)$ этой поверхности есть:

$$1) \qquad x\frac{dt}{dx} + y\frac{dt}{dy} + z\frac{dt}{dz} = nt.$$

Разстояніе этой плоскости отъ начала координатъ равно

$$\frac{nt}{h_t},$$

гдѣ h_t есть дифференціальный параметръ функціи t (см. Lamé, «Leçons sur les coordonnées curvilignes»), т. е.,

$$h_t = \sqrt{\frac{dt^2}{dx^2} + \frac{dt^2}{dy^2} + \frac{dt^2}{dz^2}}.$$

Косинусы угловъ, составляемыхъ нормалью N поверхности съ осями координатъ, будутъ:

$$2) \qquad cos(Nx) = \frac{1}{h_t}\frac{dt}{dx}, \quad cos(Ny) = \frac{1}{h_t}\frac{dt}{dy}, \quad cos(Nz) = \frac{1}{h_t}\frac{dt}{dz}.$$

Теперь возьмемъ вторую поверхность σ_{t_1} и назовемъ *соотвѣтствующими* двѣ точки P и P_1 первой и второй поверх-

ностей, лежащія на одной прямой съ началомъ координатъ. Проведемъ касательныя плоскости къ поверхностямъ въ этихъ точкахъ. Нетрудно показать, что эти плоскости *параллельны*. Дѣйствительно, если N_1 есть нормаль къ σ_{t_1} въ P_1, то

$$3)\quad cos(N_1x)=\frac{1}{h_{t_1}}\frac{dt_1}{dx_1}, cos(N_1y)=\frac{1}{h_{t_1}}\frac{dt_1}{dy_1}; cos(N_1z)=\frac{1}{h_{t_1}}\frac{dt_1}{dz_1}.$$

Но $$x_1=kx,\ y_1=ky,\ z_1=kz,$$

такъ какъ P, P_1 и начало коррдинатъ лежатъ, по условію, на одной прямой; слѣдовательно, по извѣстному свойству однородныхъ функцій,

$$4)\quad \frac{dt_1}{dx_1}=k^{n-1}\frac{dt}{dx},\quad \frac{dt_1}{dy_1}=k^{n-1}\frac{dt}{dy},\quad \frac{dt_1}{dz_1}=k^{n-1}\frac{dt}{dz},$$

откуда

$$5)\quad h_{t_1}=k^{n-1}h_t.$$

Уравненія (4) и (5) даютъ:

$$\frac{1}{h_{t_1}}\frac{dt_1}{dx_1}=\frac{1}{h_t}\frac{dt}{dx},\quad \frac{1}{h_{t_1}}\frac{dt_1}{dy_1}=\frac{1}{h_t}\frac{dt}{dy},\quad \frac{1}{h_{t_1}}\frac{dt_1}{dz_1}=\frac{1}{h_t}\frac{dt}{dz}$$

или, на основаніи уравненіійй (2) и (3),

$$cos(Nx)=cos(N_1x),\quad cos(Ny)=cos(N_1y),\quad cos(Nz)=cos(N_1z).\quad Q.\ E.\ D.$$

Теперь возьмемъ интегралъ:

$$M=\iiint\limits_{t_0-t} Fd\omega;$$

безконечно-малое приращеніе ΔM будетъ дано уравненіемъ:

$$\Delta M = \iiint\limits_{t-(t+\Delta t)} F d\omega,$$

причемъ интеграція распространяется на всѣ точки, лежащія между поверхностями σ_t и $\sigma_{t+\Delta t}$. Безконечно-малый элементъ $d\omega$ я могу замѣнить выраженіемъ

$$\frac{n\Delta t}{h_t} \cdot d\sigma_t,$$

гдѣ $d\sigma_t$ — элементъ поверхности σ_t, а множитель $\frac{n\Delta t}{h_t}$ представляетъ разстояніе между двумя касательными плоскостями къ поверхностямъ σ_t и $\sigma_{t+\Delta t}$ въ соотвѣтствующихъ точкахъ. Эта замѣна сводится къ подстановкѣ вмѣсто $d\omega$ объема безконечно-малаго цилиндра съ основаніемъ $d\sigma_t$ и высотой $\frac{n\Delta t}{h_t}$. Слѣдовательно, ΔM приметъ слѣдующій видъ:

$$\Delta M = n.\iint F \frac{d\sigma_t}{h_t} \Delta t;$$

раздѣляя обѣ части полученнаго уравненія на Δt, найдемъ окончательно:

$$a) \qquad \frac{dM}{dt} = n \iint F \frac{d\sigma_t}{h_t},$$

причемъ интеграція распространяется на всю поверхность σ_t.

Теперь обратимся къ интегралу:

$$N = \iiint\limits_{t_0-t} \frac{dF}{dx} d\omega.$$

Очевидно,

$$N=\iint_{t} Fdydz-\iint_{t_0} Fdydz.$$

Дифференцированіе по t дастъ

6) $$\frac{dN}{dt}=\frac{d}{dt}\iint_{t} Fdydz,$$

причемъ членъ $-\iint_{t} Fdydz$, какъ величина постоянная, исчезнетъ.

Но $$dydz=d\sigma_t cos(Nx),$$

или, подставляя вмѣсто $cos(Nx)$ его выраженіе,

$$dydz=\frac{1}{h_t}\frac{dt}{dx}d\sigma_t,$$

что позволяетъ намъ написать уравненіе (6) въ видѣ:

β) $$\frac{dN}{dt}=\frac{d}{dt}\iint F\frac{1}{h_t}\frac{dt}{dx}d\sigma_t.$$

Уравненія (α) и (β) заключаютъ въ себѣ доказательство первой части нашей теоремы. Чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно подставить въ уравненіе (α) $F\frac{dt}{dx}$ вмѣсто F, что мы вправѣ сдѣлать, такъ какъ при выводѣ уравненія (α) мы F ничѣмъ не обусловили. Указанная подстановка преобразуетъ уравненіе (α) въ слѣдующее:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{t_0-t} F\frac{dt}{dx}d\omega=n\iint\frac{F}{h_t}\frac{dt}{dx}d\sigma_t.$$

Диффеpенцируя и примѣняя уравненіе (β), получимъ окончательно:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{t_0-t}\frac{dF}{dx}d\omega=\frac{1}{n}\frac{d^2}{dt^2}\iiint\limits_{t_0-t}F\frac{dt}{dx}d\omega. \qquad Q. E. D.$$

Теперь перейдемъ къ доказательству второй части нашей теоремы.

Мы предположимъ сначала, что

$$7)\qquad Q=\iiint\limits_{t^1_0-t^1}\iiint\limits_{t_0^2-t^2}\frac{d^2F}{dx_1dx_2}dx_1dy_1dz_1dx_2dy_2dz_2.$$

Дальнѣйшее обобщеніе будетъ идти по опредѣленному пути.

Диффеpенцируя по t^1 и замѣчая, что предѣлы первой тройной интеграціи отъ предѣловъ второй не зависятъ, мы получаемъ:

$$\frac{dQ}{dt_1}=\iiint\limits_{t^1_0-t^1}D_t\iiint\limits_{t_0^2-t^2}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{dF}{dx_2}\right)dx_2dy_2dz_2dx_1dy_1dz_1.$$

Примѣняя теорему (B), получимъ

$$\frac{dQ}{dt_1}=\frac{1}{m_1}\frac{d^2}{dt_1^2}\iiint\limits_{t_1}\iiint\limits_{t_2}\frac{dF}{dx_2}\frac{dt_1}{dx_1}dx_1dy_1dz_1dx_2dy_2dz_2.$$

Диффеpенцируя полученное равенство по t_2 и замѣчая, что $\frac{dt_1}{dx_1}$ отъ t_2 не зависитъ, получимъ, опять таки на основаніи уравненія (B):

$$\frac{d^2Q}{dt_1dt_2}=\frac{1}{m_1m_2}\frac{d^4}{dt_1^2dt_2^2}\iiint\limits_{t_1}\iiint\limits_{t_2}F\frac{dt_1}{dx_1}\frac{dt_2}{dx_2}dx_1dy_1dz_1dx_2dy_2dz_2$$

и т. д. $Q. E. D.$

Въ заключеніе я дамъ переводъ на геометрическій языкъ теоремы (B), что свяжетъ ее еще тѣснѣе съ теоремой Вейерштрасса. Пусть S—поверхность, уравненіе которой:

$$\varphi\,(\xi,\ \eta,\ \zeta)=0.$$

Возьмемъ на этой поверхности точку A $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ и назовемъ ея *образомъ* точку P $(x,\ y,\ z)$, которая связана съ A уравненіями:

$$\frac{Ax^n}{\xi}=\frac{By^n}{\eta}=\frac{Cz^n}{\zeta}=t,$$

гдѣ A, B, C произвольныя постоянныя величины; геометрическое мѣсто точекъ P будетъ поверхность σ_t, уравненіе которой:

$$\varphi\left(\frac{Ax^n}{t},\ \frac{By^n}{t},\ \frac{Cz^n}{t}\right)=0.$$

10 ноября 1886 г.

РУССКАЯ БИБЛІОГРАФІЯ

по

Математикѣ, Механикѣ, Астрономіи, Физикѣ и Метеорологіи

за 1885 годъ.

составили

В. Габбе и А. Старковъ.

РУССКАЯ БИБЛІОГРАФІЯ

по Математикѣ, Механикѣ, Астрономіи, Физикѣ и Метеорологіи

за 1885 годъ.

А. А. Н. Пособіе для унтеръ-офицеровъ. Чтеніе и черченіе плановъ. Спб. 1885. Ц. 30 к. (1)

Аверинъ. О нѣкоторыхъ усовершенствованіяхъ въ паровыхъ котлахъ. Морск. Сб. 1885. Апр. стр. 27. (2)

Александровъ И. Методы рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе и Сборникъ геометрическихъ задачъ съ полными и краткими рѣшеніями. Тамбовъ 1884. Ц. съ пер. 1 р. 20 к. (3)

Алтунджи П. Простой элементъ. Тех. 1885. II. стр. 71. (4)

— Электрическій будильникъ. Тамъ же стр. 170. (5)

Альбицкій В. И. Изслѣдованіе уравненій второй степени съ двумя перемѣнными въ отношеніи разложимости ихъ на два линейные множителя (Оттискъ изъ Изв. Технол. Инст. 1885). Спб. 1885. (6)

Аналитическая механика. Лекціи. Спб. 1885. (Лит.) (7)

Анисимовъ В. Нѣсколько теоремъ о кривыхъ двойной кривизны и ихъ развертках. М. 1885. (Мат. Сбор. 1885. Т. XII стр. 42). (8)

Арбузовъ В., **Мининъ** А., **Мининъ** В. и **Назаровъ** Д. Систематическій сборникъ ариѳметическихъ задачъ для гимназій и прогимназій мужскихъ и женскихъ, учительскихъ институтовъ и семинарій. Изд. 3. (29 тысяча). М. 1885. Ц. 50 к. (9)

Ариѳметическій задачникъ для письменныхъ упражненій въ классѣ. Тетр. I. Изд. 4-е. Спб. 1885. Ц. 8 к. (10)

Аронъ. Опредѣленіе постоянной Верде въ абсолютной мѣрѣ. Жур. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II стр. 12. (Изъ Wied. Ann. XXIV 161). (11)

Арсонваль д'. Опасное физіологическое дѣйствіе токовъ механическихъ источниковъ электричества и способъ избѣжать его. Журн. Ф.-Х. Общ. 1885. II, стр. 13. (Изъ C. R. T. 100. 239). (12)

Арцеуловъ А. (перевелъ). Машины съ разобщающимися цилиндрами. Морск. Сбор. 1885. Апр. стр. 37. (13)

— О котлахъ Бельвиля и объ испытаніи котла этой системы на катерѣ Его Императорскаго Высочества Великаго Князя Генералъ-Адмирала Алексѣя Александровича «Прибой». Морск. Сб. 1885. Дек. стр. 1. (14)

Арцишъ В. Паровая механика и паровозы. Курсъ III к. техническихъ желѣзно-дорожныхъ училищъ, читанный въ Кременчугскомъ училищѣ. Кременчугъ 1885. (15)

Барановскій М. и **Фроловъ** А. Записки начальной механики. По программѣ военныхъ училищъ. Спб. 1885. Ц. 2 р. (16)

Бассеинъ Караибскаго моря. **Ю. Ш.** Морс. Сборн. 1885. Окт. стр. 95. (17)

Bauschinger Julius. Untersuchungen über die Bewegung des Planeten Merkur. München. 1884. (18)

Физ.-мат. науки. Отд. науч. нов. кр. и библ. 1885. стр. 129.

Бахметьевъ Порфирій. Причина тона, издаваемаго стержнями изъ магнитныхъ металловъ подъ вліяніемъ прерывчатаго намагничиванія. Жур. Рус. Ф.-Х. Общ. 1885. II стр. 65. (19)

— Магнитизмъ какъ функція частичной структуры. Электрич. 1885. № 8, 9, 10. (20)

Безтопочный паровозъ для конно-желѣзныхъ дорогъ (Гонигмана). Техн. 1885. I. стр. 256. (21)

Беккерель Анри. Спектры лучеиспусканія паровъ металловъ въ ультра-красной части. Журн. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II. 31. (Изъ Repert. d. Ph. II 122). (22)

— Опредѣленіе длины волнъ главнѣйшихъ линій и полосъ

ультра-красной части солнечнаго спектра. Тамъ-же стр. 32. (Изъ Repert. d. Phys. II. 125). (23)

Бертранъ Жозефъ. Теоретическая ариеметика. Переводъ съ 7-го изданія съ нѣкоторыми измѣненіями и дополненіями Н. Билибина. Спб. 1885. Ц. 1 р. 50 к. съ пер. (24)

— Алгебра для гимназій и реальныхъ училищъ. Переводъ Н. Билибина. Спб. 1885. Ц. 3 р. (25)

Библіографическій указатель вышедшихъ въ Россіи въ теченіи 1884 года книгъ по физико-математическимъ наукамъ. Физ.-мат. науки. Отд. науч. нов. кр. и библ. 1885. стр. 30, 62, 79, 112, 143, 189. (26)

Библіографическій указатель русскихъ, французскихъ и нѣмецкихъ книгъ по физико-математическимъ наукамъ, вышедшихъ въ теченіе Декабря 1884 г. и 1885 г. Физ.-мат. науки. Отд. науч. нов. кр. и библ. 1885. стр. 110, 139, 222, 253, 285. (27)

Бобылевъ Д. Курсъ аналитической механики. I Часть кинематическая (съ 4-мя листами чертежей). Изд. 2-е. Спб. 1885. Ц. 2 р. 50 к. (28)

Бобынинъ В. В. Русская физико-математическая библіографія. Указатель книгъ и журнальныхъ статей по физико-математическимъ наукамъ, вышедшихъ въ Россіи съ начала книгопечатанія до послѣдняго времени. Т. I. Прил. къ Физ.-мат. наук. Отд. науч. нов. кр. и библ. 1885. (29)

Бобынинъ В. В. Философское, научное и педагогическое значеніе исторіи математики. М. 1886. Ц. 50 к. (30)

Больцманнъ Л. О количествѣ работы, получаемой при химическомъ соединеніи. Журн. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II. стр. 1. (Изъ Wien. Sitzb. B. 88. 1884. S. 861—896). (31)

Браунъ В. О зависимости между логариѳмическимъ декрементомъ колебанія въ воздухѣ и измѣненіемъ температуры. Жур. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II. стр. 1. (Изъ Rerept. d. Phys. B. XX. 1884. p. 821—824). (32)

Bredichin Th. Sur la grande comète de 1811. M. 1885. (33)

— Révision des valeurs numeriques de la force repulsive. Bul. d. l. Soc. Imp. d. natur. d. Moscou. 1885. № 1, стр. 1. (34)

— Sur les oscilation des jets d'emission dans les comètes. Тамъ-же стр. 93. (35)

Бриксъ Θ. Сферическая паровая машина системы Θ. Бриксъ. Морск. Сб. 1885. Авг. стр. 1. (36)

Бугаевъ Н. В. Общія основанія исчисленія Eφ(x) съ однимъ независимымъ перемѣннымъ. I. Основныя теоремы исчисленія Eφ(x). М. 1885. Ц. 1 р. (Изъ Мат. Сбор. 1885. Т. XII. стр. 579). (37)

— Нѣкоторыя приложенія теоріи эллиптическихъ функцій къ теоріи функцій прерывныхъ. Распространеніе общихъ числовыхъ законовъ на функціи произвольныя. М. 1885. Ц. 30 к. Изъ Мат. Сб. 1885. Т. XII стр. 1. (38)

— Одинъ общій законъ теоріи разбіенія чиселъ. М. 1885. Ц. 50 к. Тамъ-же стр. 283. (39)

Будаевъ Н. С. Аналитическая механика. Спб. 1885. Лит. (40)

Буссе Θ. Основанія геометріи. Руководство, составленное для гимназій. Изд. 7-е. Ц. въ корешкѣ 45 к. (41)

— Сокращенныя таблицы обыкновенныхъ логариѳмовъ по руководству Вега. Изд. 8. Спб. 1885. (42)

Бычковъ Θ. Сборникъ примѣровъ и задачъ относящихся къ курсу элементарной алгебры. Изд. 10. Спб. 1885. Ц. 1 р. 25 к. (43)

Бэцъ. Сухіе гальваническіе элементы и ихъ примѣненіе къ электрическимъ и гальваническимъ измѣреніямъ. Жур. Рус. Физ.-Хим. Общ. 1885. II стр. 84. (Изъ Repert. d. Phys. XXI. 9). (44)

Васильевъ А. В. Роль профессора Вейерштрасса въ современномъ развитіи математики. Рѣчь. Физ.-мат. науки. Отд. науч. нов. кр. и библ. 1885. стр. 227, 257). (45)

— По поводу предстоящаго юбилея В. Я. Буняковскаго. (Сообщеніе сдѣланное 13 апрѣлѣ 1885 г. на 45 засѣданіи физико-математической секціи Общества Естествоиспытателей при Имп. Казанскомъ универ.). Казань. 1880. (46)

Веберъ. Объ электропроводности и температурномъ коэффиціентѣ. Журн. Рус. Физ.-Хим. Общ. 1885. II. стр. 78. (Изъ Wied. Ann. 1885, 6). (47)

Вега Георгъ. Таблицы логариѳмовъ, пересмотрѣнныя К. *Бремикеромъ.* Съ предисловіемъ А. Ѳ. *Малинина.* М. 1885. Ц. 2 р. 50 к. (48)

Веребрюсовъ А. Новый способъ извлеченія корней и рѣшенія уравненій всѣхъ степеней. Харьковъ 1885. (49)

Верещагинъ И. Сборникъ ариѳметическихъ задачъ для среднихъ учебныхъ заведеній мужскихъ и женскихъ. Изд. 2-е. Спб. 1885. Ц. 80 к., съ перес. 1 р. (50)
Журн. Мин. Нар. Просв. 1885. Ч. 245. стр. 55.

Веселовскій. Отчетъ Императорской Академіи наукъ по физико-математическому и историко-филологическому отдѣленіямъ за 1884 годъ. Жур. Мин. Нар. Пр. 1885. Ч. 237. стр. 51. (51)

Westberg. Practisches Rechnenbuch. Изданіе 16. Митава. 1885. (52)

Вильгальмъ. Сборникъ ариѳметическихъ задачъ. Часть 1. Цѣлыя числа. Часть 2. Дроби. Спб. 1885. 8 д. 99 стр. Ц. 1 ч. 25 к., съ пер. 40 к. 2 ч. 35 к., съ пер. 50 к. (53)

Вильдъ Г. Наблюденія надъ атмосферными осадками въ 1884 г. Спб. 1885. (54)

— Тоже. Въ 1883 г. Спб. 1885. (55)

Wild H. Jahresbericht des physikalischen Central-Obserwatoriums für 1883 und 1884. Спб. 1885. (56)

— Einfluss des Qualität und Aufstellung auf die Angaben der Regenmesser. Метеорологическій сбор. Имп. Ак. н. Т. IX, № 9. Спб. 1885. Ц. 20 коп. (57)

— Bericht über eine neue Verification der Schwingungszahl der Normal-Stimgabel Russlands im physicalischen Central Observatorium. (Melanges physiques et chimiques tirés du Bulletin de l'Ac. Imp. d. sc. de St.-Pét. T. XII.) Спб. 1885. (58)

Виноградовъ А. Основы ариѳметики. Систематическій конспектъ для повторенія ариѳметики въ низшихъ и среднихъ учебныхъ заведеніяхъ. М. 1886. Ц. 30 коп. (59)

Висковатовъ В. Краткій курсъ начальной физики въ объемѣ городскихъ училищъ. Спб. 1885. Ц. 50 коп. (60)

Wittram Th. Zur Berechnung der Speciellen Störungen der kleinen Planeten. Спб. 1885. (61)

Вл. Т. Электризація тумана. Элект. 1885. № 9—10 стр. 80. (62)

— Земные токи. Электр. 1885. № 9—10 стр. 80. (63)

— Предохраненіе противъ опасности отъ сильныхъ токовъ. Электр. 1885. № 9—10 стр. 80. (64)

Воейковъ А. И. Снѣжный покровъ, его вліяніе на климатъ и погоду и способы изслѣдованія (Зап. Имп. Рус. Геогр. Общ. по общей географіи Т. XV № 2 изд. под. ред. Р. Ф. *Ленца*). Спб. 1885. (65)

Войславъ С. Расчетъ и построеніе частей машинъ и передаточныхъ механизмовъ. Руководство для машиностроителей, заводчиковъ, чертежниковъ, техническихъ и реально-учебныхъ заведеній, одобренное Горнымъ Учебнымъ Комитетомъ. Спб. 1886. (66)

Инженеръ (Кіев.). 1885 стр. 316.

Воитинскій С. Сборникъ упражненій и задачъ по диффеpенціальному исчисленію. Спб. 1885. Ц. 1 р. 50 к. (67)

Воленсъ В. Задачникъ для начальныхъ народныхъ училищъ. Изд. 5. Спб. 1886. Ц. 15 коп. (68)

— Собраніе ариѳметическихъ задачъ (по Грубе). Учебное пособіе при первоначальномъ преподаваніи ариѳметики. Въ 2-хъ частяхъ. Изд. 14-е. Спб. 1886. Ц. 40 коп. (69)

— Руководство къ ариѳметикѣ. 14 испр. изд. Спб. 1885. Ц. 60 коп. (70)

Вопросъ о принятіи общаго для всѣхъ націй перваго меридіана. Морск. Сб. 1885. Янв. стр. 139. (71)

Вороновъ А. Собраніе ариѳметическихъ задачъ. Ч. I. Цѣлыя числа. Изд. 5-е. Спб. 1885. Ц. 30 к. (72)

Вулихъ З. Краткій курсъ геометріи и собраніе геометрическихъ задачъ. Изд. 10. Спб. 1885. Ц. 80 коп. (73)

Wundt Wilhelm. Logik. Eine Untersuchung der Principien der Erkenntniss und der Methoden wissenschaftlicher Forchung. 2 Bände. II Bänd. Methodenlehre XIII. 620 S. 2-ter Abschnitt. Von der Logik der Mathematik S. 74 bis 219. (74)

Физ.-Мат. науки. От. науч. новос. кр. и библ. 1885. стр. 23.

Вѣтряный двигатель Данилевскаго. Техн. 1885 I. стр. 295. (75)

В. Ю. Гдѣ начинается прежде всего воскресеніе на земномъ шарѣ. 2-е исправл. и дополн. изд. М. 1886. (76)

«Hamonia» — новая машина для письма. Техн. 1885 II. стр. 4. (77)

Габбе В. Н. и **Старковъ** А. Русская библіографія по математикѣ, механикѣ, астрономіи, физикѣ и метеорологіи за 1884 годъ. Прилож. къ VI тому Зап. Мат. Отдѣл. Новорос. Общ. Естествоиспытателей. Одесса 1885 г. (78)

Гано А. Полный курсъ физики съ краткимъ обзоромъ метеорологическихъ явленій. Переводъ Ф. Павленкова и В. Черкасова. Къ курсу приложено 1232 политипажа, 2 раскрашенныя таблицы спектровъ, 170 практическихъ задачъ съ указаніемъ ихъ рѣшеній и краткій очеркъ популярной химіи. Спб. 1885. Ц. 3 р., съ пер. 4 р. (79)

Гармоническіе треугольники и четырехсторонники (тема для сотрудниковъ). Журн. Эл. Мат. 1885. стр. 186. (80)

Hasselberg B. Zusatz zu meinen Untersuchungen über zweite Spectrum des Wasserstoffs (Melanges physiques et chimiques tirés du Bulletin de l'Ac. Imp. d. Sc. de St-Pétersburg. T. XII). Спб. 1885. (81)

Гезехусъ Н. Вліяніе электрическаго тока на сопротивленіе и свѣточувствительность селена. (Объясненіе результатовъ опытовъ г. Фриттса). Спб. 1885. (Въ Жур. Рус. Физ.-Х. Общ. 1885. II стр. 215). (82)

— Лекціонный динамометръ. Жур. Рус. Ф.-Х. Общ. 1885. II, стр. 59. (83)

— О звукопроводимости тѣлъ. Жур. Рус. Физ.-Х. Общ. 1885. II 326. (84)

Heilpern J. W sprawie ujedostajnienia znako ania w naukach matematyczhnych i technicsnych. (Odb. z «Przegl. Techniczn.»). Варшава. 1885. (85)

Генъ (-Де). Теорія жидкостей. Жур. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II. стр. 37. (Изъ Ann. d. ch. et d. ph. V. 6-me série. p. 83). (86)

Герасимовъ М. Первое знакомство съ физикой посредствомъ приборовъ. Руководство для дѣтей средняго возраста пересмотрѣнное и редактированное О. *Хвольсономъ.* Спб. 1885. Ц. 50 к. (87)

Гердъ И. Собраніе ариѳметическихъ примѣровъ и задачъ съ краткими методическими замѣчаніями. Для повторительнаго курса въ старшихъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній. М. 1885. Ц. 25 к. (88)

Журн. Мин. Нар. Просв. 1885. Ч. 239. Стр. 69.

Германъ Грассманъ. Его жизнь и учено-литературная дѣятельность. (Біографическій очеркъ, составленный Р. Штурмомъ, Е. Шредеромъ и Л. Зонке). Физ.-мат. наук. Отд. научн. ст. стр. 141. (89)

Hechel C. Kompendium der Stereometrie nach Legendre für den Schulgebrauet, bearbeitet. 4-te verb. Auflage. Ревель. 1886. (90)

Guilden Hugo. Sur un cas particulier du probleme de trois corps. (91)

Физ-мат. науки. Отд. науч. нов. кр. и библ. 1885. стр. 204.

Гидравлическое передвиженіе судовъ. Техн. 1885. стр. 327. (92)

Гидрометръ Гарлахера. Техн. 1885. I. Стр. 321. (93)

Глазенапъ С. П. Сферическая астрономія. Курсъ читанный студентамъ Спб. университета въ 1884 — 1885 гг. Спб. 1885. (Лит.). (94)

Gogou. Sur une objection de M. Stockwell contre la théorie du mouvement de la lune de Delaunay. (95)

Физ.-мат. наук. Отд. науч. нов. кр. и библ. 1885. стр. 219.

Головинъ Х. С. Курсъ строительной механики. Лекціи чит. въ Спб. техн. институтѣ въ 1884—1885 г. Спб. 1885. (96)

Гольденбергъ А. И. Методика начальной ариѳметики. Руководство для учительскихъ семинарій и институтовъ, для народныхъ учителей и учительницъ. Спб. 1885. Ц. 1 р. 50 к., съ пер. 1 р. 70 к. (97)

— Сборникъ задачъ и примѣровъ для обученія начальной ариѳметикѣ въ двухъ выпускахъ. Вып. I. Задачи и примѣры на числа первой сотни. Ц. 20 к., съ пер. 35 к. Вып. II. За-

дачи и примѣры на числа любой величины. Ц. 20 к., съ пер. 35 к. Спб. 1885. (98)

Гончаревичъ Л. Л. Таблицы, показывающія, сколько причитается выдать жалованья лицамъ прослужившимъ неполный мѣсяцъ по различнымъ окладамъ начиная съ 25 коп. и кончая 3000 р. въ мѣсяцъ. Изд. 2-е. Минскъ. 1885. Ц. 30 к., съ пер. 40 к. (99)

Горбуновъ Н. О томъ что происходитъ въ воздухѣ и что нужно знать изъ того земледѣльцу. Спб. 1885. (100)

Grashof. F. О видахъ существующей въ природѣ энергіи пригодной для техническаго производства работы. Съ нѣм. пер. А. Романовъ. Спб. 1885. (101)

Графическій разсчетъ маховаго колеса. Техн. 1885. I стр. 246, 254. (102)

Гринвальде. Ариѳметическія задачи. Рига 1885. (на латыш. яз.). (103)

Громека И. О вихревыхъ движеніяхъ жидкости на шарѣ. Казань 1885. (104)

Громоотводы и градоотводы въ селеніяхъ и на поляхъ. Техн. 1885. I. стр. 358. (105)

Грузинцевъ А. П. Физическія замѣтки. Жур. Эл. Мат. 1885. стр. 174. (106)

— О совокупныхъ уравненіяхъ 2-й степени. Тамъ-же стр. 202, 295. (107)

— Доказать свойства (перечисляются) ортоцентрическаго треугольника (тема для сотрудниковъ). Журн. Эл. Мат. 1885. стр. 403. (108)

Гурьевъ С. Учебникъ механики. 2 изд. Теоретическая механика съ 198 политипажами въ текстѣ и собраніемъ задачъ съ ихъ рѣшеніями. Спб. 1885. Ц. 1 р. 50 к., съ пер. 1 р. 70 к. (109)

Давидовъ А. Элементарная геометрія въ объемѣ гимназическаго курса. Изд. 14. М. 1885. Ц. 1 р. 35 к. (110)

Давидовъ В. Привелигерованный вѣтряный двигатель Давидова. Изд. 2-е. М. 1885. (111)

Daniel Alfr. Zasady fizyki. Padręcznik z 257 drzevorytami

v tekscie. Przeloz. z angielsk. *Bogucki*. Zeszyt I. II. Варшава. 1885. (112)

Двигатель Труве. Техн. 1885. II, стр. 69. (113)

Движеніе судовъ силою теченія воды. Техн. 1885. 197. (Изъ Genie civil. 1883. T. III p. 627). (114)

Дезенъ П. (Некрологъ) Физ.-мат. науки. Отд. науч. нов. вр. и библ. 1885. стр. 172. (115)

Дей. Сборникъ задачъ по электричеству и магнетизму. Пер. П. Прокшина и М. Вахрушева. Электр. № 9—10 стр. 74. (116)

Де-Метцъ Г. Г. Очеркъ аномальной дисперсіи свѣта въ ея фактахъ и теоріяхъ отъ начала вопроса до нашихъ дней. Одесса 1885. (117)

Делоне Н. Значеніе гираціоннаго эллипсоида и поверхности свѣтовой волны въ теоріи удара. Журн. Рус. Ф.-Хим. Общ. 1885. II стр. 136. (118)

— Къ вопросу объ ударѣ твердыхъ тѣлъ. М. 1885. (Изъ Мат. сбор. 1885. T. XII стр. 421). (119)

Демковъ М. И. Успѣхи знанія (1883—1884). Физика, метеорологія, зоологія, ботаника, географія, этнографія, путешествія). Черниговъ 1885. (120)

Журн. Мин. Нар. Просв. 1885. Ч. 240, стр. 332.

Денисьевскій М. М. Примѣненіе электричества къ домашнему быту. Спб. 1885. Ц. 80 к. (121)

— Новый фотометръ. Техн. 1885. II, стр. 84. (122)

— Письмо къ редактору (о фотометрѣ). Техн. 1885. II. 144. (123)

Деревякинъ И. Замѣтка о книгѣ В. А. Воскресенскаго «Практическая Телеграфія». Электр. 1885. № 9—10 стр. 76. (124)

Добровольскій В. Приготовительный курсъ геометріи. Подробный конспектъ пропедевтики геометріи для учащихъ. Съ 17 черт. М. 1881. Ц. 35 к. (125)

Долгоруковъ Н. Кн.-Вѣковыя неравенства въ движеніи луны. Спб. 1885. (126)

Дроздовъ Н. Анализъ и обобщеніе въ области элементарно-математическихъ фактовъ и идей: опытъ обобщеннаго истол-

кованія нѣкоторыхъ основныхъ ариѳметическихъ формулъ. Саратовъ 1885. Ц. 75 к. (127)

Журн. Эл. Мат. 1885, стр. 333.

Дѣятельность парижской академіи наукъ въ отношеніи учрежденныхъ при ней премій за работы въ области физико-математическихъ наукъ. 1. Назначеніе въ 1884 году темъ для соисканія преміи на 1885 г. Физ. матем. науки въ ихъ наст. и прошед. Отд. научныхъ новостей крит. и библ. 1885, стр. 1. 2. Присужденіе премій на 1883 г. 1) Чистая математика, тамъ-же, стр. 4; 2) Механика, тамъ-же, стр. 33; Астрономія, тамъ-же, стр. 42. (128)

Дѣятельность русскихъ ученыхъ обществъ въ отношеніи физико-математическихъ наукъ въ 1884 году. Русское физико-химическое общество Физ.-мат. наук. Отд. науч. нов. кр. и библ. 1885. стр. 113, 161, 196. Московское общество испытателей природы. Тамъ-же, стр. 209. Кіевское общество Естествоиспытателей. Тамъ-же, стр. 214. Московское математическое общество. Тамъ-же, стр. 231, 264. Математическое общество при Императ. Харьковской университетѣ. Тамъ-же, стр. 269. (129)

Дѣятельность физико-математическаго отдѣленія петербургской академіи въ 1884 году. Физ.-мат. науки. Отд. научн. нов. кр. и библ. 1885. 66. (130)

Дюгамель. Методика ариѳметики и алгебры или различные способы рѣшенія задачъ и изложеніе пріемовъ преподаванія низшей ариѳметики и элементарной алгебры. Переводъ съ франц. Изд. 2. Спб. 1885. Ц. 75 к, съ пер. 1 р. (131)

— Методика геометріи или различные пріемы рѣшенія геометрическихъ задачъ и изложеніе способовъ измѣренія геометрическихъ величинъ. Перев. съ французъ. Изд. 2. Спб. 1885. Ц. 70 к., съ перес. 1 р. (132)

Разб. двухъ послѣд. сочин. Дюгамеля: Журн. Мин. Нар. Прос. 1885. Ч. 239, стр. 65.

Дю-Монсель Ѳ. (Некрологъ). Физ.-матем. науки въ ихъ наст. и прошедш. Отд. науч. нов. кр. и библ. 1885, стр. 16. (133)

Евгеній Бурдонъ. (Некрологъ). Техн. 1885. I стр. 227. (134)

Евневичъ И. А. Курсъ гидравлики. Лекціи чит. въ Спб. Практ. Технол. Инст. Ч. I. Выпускъ 1. Спб. 1885. (135)

— Опытъ установленія началъ кинематики капельной правильно движущейся жидкости. (Оттискъ изъ Изв. Технол. Инст. 1885). Спб. 1885. (136)

Евтушевскій В. А. Сборникъ ариѳметическихъ задачъ и численныхъ примѣровъ для приготовительнаго и систематическаго курсовъ. Ч. I. Цѣлыя числа. 25 и 26-е изд. Спб. 1885. Ц. 35 к. (137)

— Методика ариѳметики. Изд. 10-е. Спб. 1885. Ц. 1 р. 50 к. (138)

Егоровъ Н. Физика. Спб. 1885. (139)

Егоровъ Ѳ. И. Краткое руководство ариѳметики и собраніе задачъ, вычисленій и др. упражненій для нач. преподаванія. Вып. II. Изд. 2-е испр. М. 1882. Ц. II вып. 30 к. (140)

Ермаковъ В. П. Гармоническія свойства круга. Журн. Эл. Мат. 1885. стр. 180. (141)

— Общія свойства многочленовъ. Тамъ же стр. 347. (142)

Животовскій Н. П. Отчего происходитъ дождь и снѣгъ. Чтеніе для народа. Изд. 3. Спб. 1885. (143)

Житковъ С. В. и **Шохоръ-Тройцкій** С. И. Сборникъ самостоятельныхъ упражненій по ариѳметикѣ съ приложеніемъ краткаго учебника начальной ариѳметики для народныхъ школъ. Изд. 2-е испр. Спб. 1886. Ц. 25 к. (144)

Жуковскій Н. Е. О движеніи твердаго тѣла, имѣющаго полости, наполненныя однородной капельной жидкостью. Жур. Рус. Ф.-Хим. Общ. 1885, II, стр. 81, 145, 231. (145)

— Объ ударѣ абсолютно-твердыхъ тѣлъ (статья вторая). Жур. Рус. Физ.-Хим. Общ. 1885 II 47. (146)

Жукъ К. Къ вопросу о расширеніи жидкостей. Журн. Рус. Физ.-Хим. Общ. 1885. II стр. 13. (147)

Журналъ элементарной математики изд. В. П. *Ермаковымъ.* (148)

Разб. Физ.-мат. науки. Отд. науч. нов. кр. и библ. 1885, стр. 179, 243.

Забытое великое событіе*). Физ.-мат. науки. Отд. науч. нов. кр. и библ. 1885. 65. (149)

*) Обнародованіе Лейбницомъ: Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus въ Acta eruditorum. Lipsiae. 1684.

Завалишинъ А. А. О возможности летать по воздуху безъ помощи баллоновъ. Спб. 1885. (150)

Залѣзскій И. К. Опредѣленіе дня недѣли, въ который приходится данное число даннаго мѣсяца даннаго года. Журн. Эл. мат. 1885, стр. 298. (151)

Записки Физико-Математическаго Общества студентовъ Императорскаго С.-Петербургскаго университета. Т. I. 1884—1885. Спб. 1885. (152)

Зарубинъ П. И. Законы движенія въ воздухѣ летательныхъ машинъ наилучшихъ конструкцій. Спб. 1885. (153)

Захаровъ Н. Собраніе примѣровъ для письменнаго исчисленія. Вып. I. Вычисленіе отъ 1 до 100. Издан. 8-е. Тифлисъ. 1886. Ц. 20 к. (154)

Зворыкинъ Н. А. Лекціи физической географіи. М. 1885. IV+222 стр. 8 д. (155)

Злотницкій Э. Д Случай необыкновенно сильнаго вѣтра. Инж. (Кіев.) 1885, стр. 420. (156)

Зобовъ Н. Бесѣды о природѣ. Книга для чтенія въ селахъ и деревняхъ, въ которой разсказывается о землѣ о солнцѣ звѣздахъ, растеніяхъ и животныхъ. Изд. 11-е. Спб. 1885. Ц. 50 к. (157)

Ивановъ И. Разложеніе квадратныхъ корней изъ нѣкоторыхъ цѣлыхъ чиселъ въ непрерывную дробь. Журн. Эл. Мат. 1885, стр. 222. (158)

Игнатовичъ-Завилейскій. Воздухоплаваніе и его успѣхи. Рѣчь, произнесенная на актѣ кіевской женской гимназіи 9 іюня 1885 г. Кіевъ 1885. (159)

Ильинъ А. А. Руководство къ устройству физическаго кабинета. Спб. 1885. Ц. 80 к., въ папкѣ 90 к. (160)

Іаролимекъ О тяготѣніи. Журн. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II, стр. 9. (Изъ Wien. Sitzb. Bd. 88. 1884. S. 897—411). (161)

Карпентеръ В. Энергія въ природѣ. Публичныя чтенія. Пер. съ англійскаго. Спб. 1885. Ц. 1 р. 25 к. (162)

Кайзеръ. О фотографіяхъ молніи. Жур. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II стр. 64 (Изъ Wied. Ann. XXV. 181). (163)

Кальстѐ и Бути. Объ электропроводности ртути и чистыхъ металловъ при низкихъ температурахъ. Жур. Р. Ф.-Хим. Общ. 1885. II, стр. 70. (Изъ Jour. d. Phys. IV. 297). (164)

— Электропроводность твердой ртути и другихъ металловъ при низкихъ температурахъ. Тамъ-же, стр. 30. (Изъ C. R. T. 100. 1188). (165)

Кенигъ и **Рищардъ.** Новый способъ опредѣленія постоянной напряженія тяжести. Жур. Рус. Физ.-Хим. Общ. 1885. II, 77. (Изъ. Ann. d. Phys. 1885. IV). (166)

Кирпичевъ В. Детали машинъ. Лекціи чит. въ технол. инст. Спб. 1884—85 уч. г. (167)

— Сопротивленіе матерьяловъ. Ч. II. Спб. 1885 (лит). (168)

Киттлеръ. Объ измѣреніи силы тока. Журн. Р. Ф.-Хим. Общ. 1885. II, стр. 22. (Изъ Wied. Ann. XXIV. 593). (169)

Клаузіусъ Р. Связь между великими дѣятелями природы. Рѣчь. Переводъ съ нѣмецкаго И. Красовскаго. Кіевъ 1885. Ц. 20 к. (170)

Клейберъ I. К. О химическомъ составѣ небесныхъ тѣлъ. Спб. 1885. (171)

Клеменчичъ. Опредѣленіе діэлектрическихъ постоянныхъ нѣкоторыхъ газовъ. Жур. Рус. Ф.-Хим. Общ. 1885. (Изъ K. Akad. d. Wissensch. in Wien, Mârtz 19. 1885; Phyl. Mag. XIX. 393). (172)

Клоссовскій А. Къ ученію объ электрической энергіи въ атмосферѣ. (Грозы въ Россіи). Одесса 1884. (173)
Морск. Сборн: 1885. Май. Стр. 1.

Ковальскій Я. И. Лекціи физики чит. на педагогическихъ фребелевскихъ курсахъ въ 1884—85 гг. Спб. 1885. (174)

Kowalski Marian. Observations des etoiles de la zone entre 75° et 80° de declinaison boréale, executées à l'observatoire de l'Université Imperiale de Kasan. T. I. Казань 1885. (175)

Колли Р. О нѣсколькихъ новыхъ методахъ изученія электрическихъ колебаній и о нѣкоторыхъ ихъ приложеніяхъ. (Изъ протоколовъ физико-мат. секціи Общ. естествоисп. при Импер. Казан. унив.) Казань 1885. (176)

Колонгъ И. де—. О способахъ опредѣленія девіаціи безъ пелевговъ. Морс. Сб. 1885. Ноябрь стр. 1. (177)

Кольдевинъ Н. Ф. Собраніе военно-ариѳметическихъ задачъ. Ч. I. Цѣлыя числа. Изд. 3-е. Спб. 1885/6. Ц. 20 к. (178)

— П. Ф. Дѣйствія силъ на твердыя тѣла по Тротвину) Зап. Кавказск. отд. Импер. рус. тех. общ. 1885. Вып. 4. (179)

Кольраушъ. Электропроводность воды дистиллированной въ пустотѣ. Жур. Р. Физ.-Хим. Общ. 1885. II, стр. 49. (Изъ Report. d. Phys. XXI. 27). (180)

Комаровскій Елеазаръ. Теоретическое соотношеніе величинъ входящихъ при составленіи гальваническихъ батарей. Спб. 1885. Ц. 1 р. 25 к. (181)

Конашевичъ Е. Опытъ систематизаціи ариѳметическихъ задачъ. М. 1885. Ц. 60 к. (182)

Журн. Мин. Нар. Просв. Ч. 242, стр. 13.
Журн. Эл. Мат. 1885, стр. 356

Конкурсъ на премію Его Величества Короля Шведскаго и Норвежскаго Оскара II (Перев. А. В. Васильева). Физ.-мат. наук. Отд. науч. нов. кр. и библ. 1885, стр. 104. (Изъ Acta mathematica). (183)

Коркинъ А. Н. Отдѣленіе корней кубическаго уравненія. (Тема для сотрудниковъ. Изложеніе не должно быть основано на рѣшеніи кубическихъ уравненій и на формулѣ Кардана). Жур. Эл. Мат. 1885, стр. 306. (184)

Корню. Обращенныя спектральныя линіи и ихъ аналогія, въ отношеніи распредѣленія, съ линіями водорода. Журн. Рус. Физ.-Хим. Общ. 1885, II, стр. 78. (Изъ Repert. d. Phys. XXI. 9). (185)

Кортацци Н. Опредѣленіе разности долготъ Николаева и Батума въ 1884. Морск. Сбор. 1885. Сент. стр. 59. (186)

Котурницкій П. Устройство паровыхъ машинъ. Лекціи чит. въ Спб. Технол. инст. Спб. 1885. (Лит.). (187)

Кохъ. Прибавленія къ свѣдѣніямъ объ упругости льда. Журн. Р. Ф.-Хим. Общ. 1885. II, 59. (Изъ Ann. d. Phys. XXV. 438—450). (188)

Краевичъ К. Физика. Лекціи, читанныя въ горномъ институтѣ. Спб.. 1885. (Литогр.). (189)

— Теплородъ. Лекціи читанныя въ горномъ институтѣ. Спб. 1885. (190)

— Отвѣтъ пр. А. Г. Столѣтову. Журн. Рус. Ф.-Хим. Общ. 1885, II, стр. 25. (191)

— О зависимости между упругостью и плотностью воздуха въ разрѣженномъ состояніи. Тамъ-же, стр. (192)

Красновскій М. Интегральное исчисленіе. Лекціи чит. въ Спб. практ. технол. инстит. Спб. 1884—5 (литогр.). (193)

— Аналитическая механика. Спб. 1885. (Лит.). (194)

Красовскій И. Н. Вопросы о наибольшихъ и наименьшихъ значеніяхъ величинѣ, рѣшаемые посредствомъ уравненій второй степени. Переводъ изъ «Leçons d'Algèbre par Ch. Briot. Paris 1881». Жур. Эл. Мат. 1885, стр. 249, 342, 370. (195)

Краткій повторительный курсъ стереометріи. Спб. 1885. Ц. 30 к. (196)

Краткій повторительный курсъ физики. Ч. I. Спб. 1885. Ц. 80 к. (197)

Крестовскій. Полный учебникъ для козачьихъ полковыхъ учебныхъ командъ. Съ 200 рис. и черт. и приложеніемъ свѣдѣній: 1) изъ топографіи; 2) конно-сапернаго дѣла и 3) сборникъ ариѳметическихъ задачъ. Изд. 3-е исправ. и дополн. Спб. 1885. Ц. 1 р. 25 к. (198)

Криницинъ П. Описаніе прибора для измѣренія высоты геометрическихъ тѣлъ и складной квадратной призмы въ полторы кубическія четверти съ примѣненіемъ ихъ къ обученію геометріи и рисованію. Казань. 1885. Ц. 20 к. (199)

Kromann K. Unsere Naturkenntniss, Beiträge zu einer Theorie der Mathematik und Physik. Ins Deutsche übersetst mit Mitwirkung des Verfassers von R. von *Fischer-Benzon*. Kopenhagen. 1883. (200)

Физ.-Мат. наук. От. науч. нов. кр. и библ. 1885, стр. 57.

Kroug G. E. Die Gammatheorie in Anwendung auf das Feuerversicherungsgeschäft. Спб. 1885. (201)

Крутиковъ Ѳ. П. Разложеніе дробей по убывающимъ степенямъ какого нибудь числа. М. 1885. Ц. 60 к., съ пер. 70 к. (202)

— О радикальной оси. Жур. Эл. Мат. 1885. стр. 241. (203)

Крыжановскій В. и А. Рѣшеніе всѣхъ задачъ на построеніе въ геометріи А. Давидова. Изд. 2-е испр. Кіевъ 1886. Ц. 1 р. 20 к. (204)

Кудрявцевъ М Ариѳметика на счетахъ. М. 1885. (205)

Кузнецовъ. Термо-электро-магнитный двигатель. Жур. Эл. Мат. 1885, стр. 205. (206)

— Новый типъ аэростата Мор. Сб. 1885. Іюнь, стр. 155. (207)

Кундтъ А. О магнитной вращательной поляризаціи желѣза, кобальта и никеля. Ж Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II стр. 11. (Изъ Arch. d. sc. 1884. № 12. 539—552). (208)

Курдюмовъ В. Методъ изометрическихъ проэкцій. Съ приложеніемъ изометрической клѣтчатки. Спб. 1885. Ц. 75 коп. Инжен. (Кіевъ). 1885. стр. 531. (209)

Куррикъ. Ариѳметика для дѣтей. II. Цѣлыя числа. 2-е изд. Дерптъ 1885 (на Эст. яз.). (210)

Къ вопросу о пользованіи даровыми силами природы. Техн. 1885. I. стр. 205, 212, 231. (211)

Кѣмъ былъ устроенъ первый электрическій локомотивъ. Техн. 1885. I, стр. 331. (212)

Лагардъ. Спектръ водорода. Журн. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II стр. 44. (Изъ Ann. de Chimie et de Physique. Т. IV. 6 Série. 1885). (213)

Лангдей. О количествѣ атмосфернаго поглощенія. Журн. Русск. Физ.-Хим. Общ. 1885, II стр. 45. (Изъ Repert. d. Phys. XXI. 39). (214)

Лангъ. Измѣреніе электровозбудительной силы электрической свѣтовой дуги. Журн. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II стр. 59. (Изъ Rept. der Phys. XXI. 536—541). (215)

«La Syrinx», газовый двигатель Клерка и Джилеспи. Техн. 1885, I стр. 354. (216)

Лебедевъ М. Н. **Бонсдорфъ** А. Р. Хронометрическія экспедиціи произведенныя въ 1875, 1876, 1877 и 1878 годахъ. Спб. 1885. (217)

Лембке Г. Ф. Рама для копированія чертежей свѣтовымъ способомъ. Инжен. (Кіев). 1885, стр. 423. (218)

Лигинъ В. Н. Новое построеніе Морпса д'Оканъ для опредѣленія отношенія скоростей въ направляющихъ механизмахъ Поселье и Гарта. Зап. мат. отд. Нов. общ. ест. 1885. стр. 109. (219)

Lehmann Filges R. Ueber die Bewegung eines Planeten unter der Annahme eines sich nicht monentan fortpflanzende Schwerkraft. Astron. Nachr. № 2630. Bd. 110 pp. 209—220. (220)
Физ.-мат. науки. Отд. науч. нов. кр. и библ. 1885 стр. 133.

Линдеманъ Э. Объ измѣненіи яркости звѣзды V. Cygni. Журн. Р. Ф.-Хим. Общ. 1885. II стр. 3. (Изъ Bull. d. l'Acad. Imp. de Sc. de St.-Petersb. T. VI). (221)

Линдстремъ. Руководство для обученія минныхъ машинистовъ минамъ Уайтхеда и выбрасывающимъ апаратамъ. Спб. 1885. (222)

Липпманнъ, О физическомъ и аналитическомъ выраженіи абсолютной температуры и о функціи Карно. Журн. Р. Ф.-Х. Общ. 1885, II стр. 24 (изъ Journ. d. phys. 2-e série III 53—57; 277—283). (223)

Литература физико-математическихъ наукъ въ Россіи въ 1884 году. 1. Пепеpіодическая литература. Физ.-мат. науки. Отд. научн. нов. кр. и библ. 1885, стр. 24. (224)

Л. Л. Л. Указатель русской и иностранной литературы по вопросу о воздухоплаваніи. Спб. 1885. (225)

— Справочная книжка по воздухоплаванію. Спб. 1885. (226)

— Краткій указатель иностранной литературы по вопросу о воздухоплаваніи (на языкахъ франц., нѣмец. и англ.) Отд. I. Франц. литература. Спб. 1885. (227)

Лобачевскій Н. И. Полное собраніе сочиненій. Т. I. Казань 1883. (228)
Физ.-мат. науки. Отд. науч. нов. кр. и библ. 1885 стр. 76, 101.

Лубенецъ Т. Сборникъ ариѳметическихъ задачъ, заключающихъ въ себѣ данныя преимущественно изъ сельскаго быта. 1898 задачъ и около 3000 численныхъ примѣровъ. Изд. 4-е. Спб. 1885. Ц. 40 к. (229)

Лувини. Причина электричества воздуха, грозовыхъ тучъ

и вулканическихъ извержений. Журн. Р. Физ.-Хим. Общ. 1885. II стр. 65. (Изъ La lumiere électrique XVI, № 15 et 16, p. 71, 173). (230)

Лукашевичъ Платонъ. Изложеніе главныхъ законовъ естественной и наблюдательно-микроскопической астрономіи, а также астрономической метеорологіи, выведенныхъ изъ вычисленій число-видовъ или формулъ силы цвѣтовъ небесныхъ тѣлъ, ихъ естественныхъ подраздѣленій, мѣръ времени, протяженій и теплотвора, проявляющагося на поверхности сихъ тѣлъ, вслѣдствіе большей или меньшей быстроты ихъ двиговъ, а также на основаніи выкладокъ по естественному иначе девятиричному, счету, съ приложеніемъ объясненій свойствъ первобытнаго языка, относящихся къ образованію послѣдующихъ языковъ рода человѣческаго и научному познанію астрономіи. Ч. II. Кіевъ 1885. (231)

Лѣтниковъ А. В. О гиперсферическихъ функціяхъ и о разложенія произвольной функціи въ ряды, расположенные по функціямъ гиперсферическимъ. М. 1885. (Изъ Мат. Сб. 1885. Т. XII стр. 205.). (232)

Лѣтописи главной физической обсерваторія, издаваемыя *Вильдомъ*. 1884 г. Ч. I. Спб. 1885. (233)

Любимовъ Л. Къ вопросу о примѣненіи фотографіи къ производству топографической съемки. Техн. 1885. II стр. 6. (234)

Любимовъ С. Нѣсколько новѣйшихъ изслѣдованій относительно движенія воды въ трубахъ и сифонахъ. Техн. 1885. II, стр. 103. (235)

Лядкій З. А. Новое объясненіе грозы, всѣхъ трехъ родовъ молніи и огней св. Эльма. Поневѣжъ. 1885. Ц. 1 р. (236)

Магнитныя наблюденія тифлисской физической обсерваторіи за 1883 г. издаваемыя И. *Мильбергомъ*. Тифлисъ 1885. (237)

— Тоже. За 1884 г. (238)

Мазингъ К. и **Хайловъ** Н. Систематическій сборникъ алгебраическихъ задачъ. М. 1885. Ц. 1 р. 25 к. (239)

Макаревичъ И. И. Законы преломленія и строенія атмосферы. Оренбургъ 1885. Ц. 2 р. съ пер. (240)

Макаровъ Н. Приложенія начертательной геометріи. Спо-

собъ проекцій съ дополнительными числами и 2) способъ изометрическихъ проекцій. Спб. 1885. (241)

— Начертательная геометрія. Вып. I. 3-е испр. и перед. изд. 21 табл. чертежей. Спб. 1885. Ц. 1 р. 50 к., съ пер. 1 р. 75 к. (242)

Максименко Ф. Строительная механика. Лекціи чит. въ горномъ институтѣ. Спб. 1885. (Литогр.). (243)

Максимовичъ В. П. Розысканіе общихъ диффиренціальныхъ уравненій перваго порядка, интегрирующихся въ конечномъ видѣ и доказательство невозможности такого интегрированія для общаго линейнаго уравненія втораго порядка. Казань 1885. (244)

Максуэллъ Клеркъ. Матерія и движеніе. Переводъ съ англійскаго М. А. Антоновича. Спб. 1885. Ц. 75 к., съ перес. 90 к. (245)

— Электричество въ элементарной обработкѣ. Перев. съ англ. изд. В. Гарнета подъ ред. М. П. Авенаріуса. Кіевъ 1886. Ц. 1 р. 50 к. (246)

Журн. Эл. Мат. 1885, стр. 355.

Малининъ и Буренинъ. Собраніе ариѳметическихъ задачъ. Изд. 17. М. 1885. Ц. 50 к. (247)

— Руководство алгебры и собраніе алгебраическихъ задачъ. Изд. 7. М. 1885. Ц. 1 р. (248)

Манганари Е. Матерьялы для исторіи съемокъ Чернаго и Азовскаго морей. Морск. Сб. 1885. Мартъ стр. 73. (249)

Мандиниянцъ. Ариѳметика Генчели. Тифлисъ. 1885 (на арм. яз.). (250)

— Ариѳметика Генчели для учителей. Тифлисъ. 1885. Ц. 30 к. (на армянскомъ языкѣ). (251)

Манометръ Ришара. Техн. 1885. I, стр. 338. (252)

Маракуевъ Н. Н. Ньютонъ, его жизнь и труды. Съ портретомъ Ньютона. М. 1885. Ц. 20 к., съ пер. 20 к. (253)

— Галилей, его жизнь и ученые труды. М. 1885. Ц. 30 к. (254)

Марковъ. Теорія конечныхъ разностей. Спб. 1885. Лит. (255)

Мартыновъ Д. Сборникъ самостоятельныхъ работъ по

ариѳметикѣ для учениковъ народной школы и вообще для начальнаго обученія. Вып. I. М. 1885. Ц. 20 к. (256)

— Учебникъ ариѳметики для народной школы. М. 1885. Ц. 15 к. (257)

Маскаръ М. Элементарная механика, приспособленная къ курсу среднихъ учебныхъ заведеній. Переводъ съ 4-го франц. изд. 1880. М. 1885. Ц. 80 к. (258)

Машина для полученія безвоздушнаго пространства. Инж. (Кіев.). 1885 стр. 316. (Изъ Engineer 1885, № 1531). (259)

Международная система электрическихъ единицъ въ связи съ другими мѣрами. Спб. 1885. (260)

Melanges mathématiques et astronomiques, tirés du Bulletin de l'Academie Impériale de sciences de St.-Pétersbourg. T. VI. Livraison 3. Спб. 1885. (261)

Мёлеръ. Опытное изслѣдованіе закона свѣтоваго лучеиспусканія накаленными тѣлами. Журн. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II. стр. 14. (Изъ Wied Ann. XXIV. 266.) (262)

Меморскій. Ариѳметика въ вопросахъ и отвѣтахъ въ 2-хъ частяхъ для легчайшаго обученія дѣтей. Новое изданіе М. 1885. (263)

Метеорологическій сборникъ Императорской академіи наукъ. Bd. X. № 1. Über die absolute Bestimung der horizontal-Intensität des Erdmagnetismus von I. Mielberg. Спб. 1885. Ц. 30. к. Т. IX. Спб. 1885. Ц. 5 р. 70 к. (264)

Метеорологическія наблюденія Тифлиской физической обсерваторіи за 1883 г. издаваемыя И. Мильбергомъ Тифлисъ. 1885. 8 д. 162 стр. (265)

Методъ наблюденія и спеціальный курсъ электричества и гальванизма. Издалъ Худынцевъ. Спб. 1885. (266)

Метрическая сокращенная номенклатура. Техн. 1885, стр. 213 (Изъ Engineer). (267)

Механикъ-Самоучка Иванъ Петровичъ Кулибинъ. Спб. 1885. (268)

Мильбергъ. Наблюденія надъ температурою почвы произведенныя въ тифлиской физической обсерваторіи за 1881 годъ (на рус. и нѣм. яз). Тифлисъ 1885. (269)

Мининъ А. Къ вопросу о несовмѣстимости уравненій первой степени. М. 1885. Ц. 20 к. (270)

Миримановъ Д. Составленіе квадратовъ изъ равныхъ палочекъ. Журн. Эл. Мат. 1885, стр. 265. (271)

Михаилъ Васильевичъ Ломоносовъ. Спб. 1885. (272)

Molien Th. Ueber die lineare Transformation der elliptischen Functionen. Деритъ. 1885. (273)

Моризъ. Селеновый актинометръ. Журн. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II стр. 18. (Изъ С. R. Т. 100, 271). (274)

Мурзо Ф. Ф. Таблицы для скораго и точнаго вычисленія объемовъ земляныхъ работъ. Спб. 1885. (275)

Мясоѣдовъ. Непосредственные способы опредѣленія низшаго предѣла положительныхъ корней и предѣловъ отрицательныхъ корней алгебраическаго уравненія. М. 1885. (Изъ Матем. Сборн. 1885. Т. XII, стр. 22). (276)

— Къ теоріи отдѣленія корней. Мат. Сб. 1885. Т. XII. стр. 433. (277)

— Функціи подобныя функціямъ Штурма. Матем. Сбор. 1885. Т. XII. стр. 461. (278)

Наблюденія надъ температурою почвы, произведенныя съ тифлисской физической обсерваторіи за 1882 и 1883 годъ, издаваемыя *Мильбергомъ.* Тифлисъ 1885. (279)

Назимовъ П. О приложеніяхъ теоріи эллиптическихъ функцій къ теоріи чиселъ. М. 1885. (280)

Bulletin d. soc. math. 1881. стр. 100 (Bougaieff).

Некрасовъ П. А. Рядъ Лагранжа и приближенныя выраженія функціи весьма большихъ чиселъ. Отд. I. Рядъ Лагранжа. М. 1885. Ц. 3 р. (Изъ Мат. Сбор. 1885 г., т. XII стр. 49, 315, 483. (281)

— Циклическія уравненія ихъ связь со способомъ наименьшихъ квадратовъ и примѣненіе къ астрономіи. М. 1885. Тамъ же, стр. 377). (282)

— Опредѣленіе неизвѣстныхъ по способу наименьшихъ квадратовъ при весьма большомъ числѣ неизвѣстныхъ. М. 1885. Тамъ же, стр. 189. (283)

Нечаевъ Н. Къ учету векселей. (Чит. 20 ноября 1884 въ 40-мъ засѣданіи физико-матем. секціи общ. естествоисп. при Импер. Каз. унив.). Казань. 1885. (284)

Нивеллиръ Munford'а. Техн. 1885. I. стр. 298. (285)

Никифоровъ М. Краткій учебникъ микроскопической техники. Пособіе при практическомъ изученіи патологической гистологіи. Съ предисловіемъ И. Ѳ. *Клейна*. М. 1885. (286)

Никульцевъ, П. Ариѳметика. Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. М. 1886. Ц. 70 к. (287)
Журн. Мин. Нар. Просв. 1885. Ч. 245. стр. 50.

Новая звѣзда въ большой туманности Андромеды. Жур. Р. Ф.-Х. Общ. 1885, II стр. 72 (Изъ The Observatory № 102; Astronomische Nachrichten. №№ 2680—85; Sirius October 1885; The Nature № 828. 829). (288)

Новая теорія происхожденія міра (Faye. Sur l'origine du monde. Paris. 1884.—въ русскомъ изложеніи). Физ.-мат. наук. Отд. науч. ст. стр. 73. (289)

Новая турбина двойнаго дѣйствія. Техн. 1880. II, стр. 28. (290)

Новости электротехники. Техн. 1885, I, стр. 304. (291)

Новый анемометръ. Техн. 1885. II, стр. 121. (292)

Новый двигатель. Техн. 1885. II, стр. 102. (293)

Новый манометръ (Гишара). Техн. 1885, I, стр. 370. (294)

Новый принципъ измельченія. Техн. 1885, стр. 211. (295)

Новый регуляторъ для большихъ скоростей. Техн. 1885. I стр. 229. (296)

Новый счетчикъ электрическаго тока. Техн. 1884. I, стр. 215. (297)

Нюренъ Магнусъ. Аберація неподвижныхъ звѣздъ. Жур. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II. стр. 17. (Изъ Mém. de l'Ac. Imp. d. Sc. de St.-Petersb. VII Série. T. XXXI. 9). (298)

Объ общемъ геометрическомъ способѣ рѣшенія квадратныхъ уравненій (тема для сотрудниковъ). Журн. Элем. Мат. 1885, стр. 235. (299)

Объ усмиряющемъ дѣйствіи масла на волны моря. Техн. 1885. II, стр. 41, 57. (300)

О грозѣ. Перев. съ русскаго. Тифлисъ. 1885 (на грузин. языкѣ). (301)

Окинчицъ, Касперъ-Даніэль-Аксакъ. Общедоступная метеорологическая таблица. Спб. 1885. (302)

О настоящемъ состояніи воздухоплаванія ст. Duray de Bruignac. Инж. (Кіев.) 1885 стр. 173. (Изъ Memoires d. la Soc. d. Ing. civ. Octobre 1884). (303)

Описаніе полярнаго планиметра Амслера и употребленіе его. Оптич. и физ. магаз. Рихтера. 1885. Ц. 30 к. (304)

О предполагаемой выставкѣ физическихъ приборовъ, соотвѣтствующихъ курсу средн. учебныхъ заведеній. Спб. 1885. (305)

Опыты математическаго изложенія логики. Физ.-матем. науки. Отд. науч. ст. стр. 33, 157. (306)

О разложеніи въ рядъ функцій по функціямъ Лежандра. Спб. 1885. (307)

О сгущеніи дыма посредствомъ электричества. Инжен. (Кіев.) 1885, стр. 397. (Изъ Revue Industr. Juil. 1885). (308)

О сжатомъ воздухѣ какъ двигателѣ. Техн. 1885. II, стр. 39. (309)

Осинскій. Аналитическая механика. Лекціи. Спб. 1885. (Литогр.). (310)

Осмондъ и Вертъ. Микроскопическое строеніе литой. стали. Журн. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II, стр. 10. (Изъ C. R. T 100. p. 450). (311)

Отчетъ секціи физико-математическихъ наукъ Общества Естествоиспытателей при Имп. Казан. Универ. за пятый годъ (Апрѣль 1884—апрѣль 1885.). Казань 1885. (312)

Отъ Императорскаго русскаго географическаго общества. Программа наблюденій надъ періодическими явленіями природы, имѣющими сельско-хозяйственное значеніе. 1885. Спб. 1885. (313)

Очерки исторіи развитія физико-математическихъ знаній въ Россіи Очеркъ. I. Рукописная математическая литература XVII столѣтія. Ф.-мат. наук. Отд. науч. ст. стр. 17. 122. (314)

Павловскій А. А. Приборъ для повѣрки угла опереженія эксцентриковъ. Инжен. (Кіев.) 1885. стр. 477. (315)

Паке́. Опредѣленіе отношенія двухъ теплоемкостей газовъ. Журн. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II. стр. 21. (Изъ Journ. d. Phys. 2-e Série. IV. 30.—35.). (316)

Пальшау. Начала механики. Вып. I. Кинематика и статика. Вып. II. Динамика и теорія машинъ (курсъ реальныхъ училищъ). Харьковъ. 1885. Ц. 1-го вып. 1 р. 50, съ пер. 1 р. 75 к. 2-го вып. 2 р. 50 к, съ пер. 2 р. 75 к. (317)
Техн. 1885. II, стр. 6.

Паровой двигатель Гевряци. Техн. 1885. I. стр. 291. (318)

Паровой котелъ Шрамма. Техн. 1885. II. стр. 39. (319)

Пасевьевъ В. Новый способъ полученія кислорода въ жидкомъ состояніи. Техн. 1885. I стр. 369. (320)

— Водолазный колоколъ «Нептунъ». Техникъ. 1885 I. 375. (321)

— Нивелированіе. Тамъ же I. 302. II. 5. (322)

— Примѣненіе фотографіи къ механическому воспроизведѣнію въ большомъ количествѣ экземпляровъ географическихъ картъ и топографическихъ съемокъ. Тамъ же II стр. 73. (323)

Первый паровозъ безъ топки съ паровымъ котломъ сист. Honigmann'а. Инж. (Кіев.) 1885 стр. 85 (Изъ. Zeitsch. d. Vereines deutsch Ingenieure. decem. 1884. Org. f. d. Fortschr. des Eisenbahne Hef. I. 1885.). (324)

Пелля́. Способы, употребляемые для опредѣленія потенціала воздуха. Электровозбудительная сила горѣнія. Журн. Рус. Физ.-Хим. Общ. 1885 II. 60 (Изъ. Jour. d. Phys. IV. 2-e serie 254.) (325)

— О причинѣ электризаціи грозовыхъ облаковъ. Тамъ-же. стр. 61 (Изъ Jour. d. Phys. 2-e serie IV. 18). (326)

Перегрѣвъ воды какъ причина взрыва паровыхъ котловъ. Инжен. (Кіев.). 1885, стр. 301. (Изъ Comptes Rendus. Portfeuille economique de machines. Janv. Févr. 1885 Bull. d. la Soc. industrielle de Mulhouse. Janv. Fevr. Mars. 1885.). (327)

Перенесеніе пара на большое разстояніе. Изслѣдованія J. Chrétien'а. Инжен. (Кіев). 1885. (Изъ Revue Indust. Août. 1885) (328)

Перспектографъ Риттера. Техн. 1885. I. стр. 249. (329)

Петровъ Н. Описаніе прибора для опредѣленія внутренняго тренія жидкостей и инструкція для употребленія и содержанія прибора въ исправности. Спб. 1885. (330)

Петрушевскій Θ. Цвѣта при огнѣ. Жур. Рус. Физ.-Хим. Общ. 1885 II. 35. (331)

Печковскій. Д. Введеніе метрической системы мѣръ и вѣсовъ въ Россіи. Техн. 1885. I. стр. 253. (332)

— Аккумуляторы Т. 1885. I. стр. 289. 294. 338. 352. (333)

Пикерингъ. Фотометрическія наблюденія планетъ Цереры, Палады и Весты въ обсерваторіи Гарвардской Коллегіи (Изъ The Observatory № 99 July 1885.). Жур. Р. Ф.-Х. Общ. 1885 II стр. 71. (334)

Пироговъ Н. Н. Нѣсколько дополненій въ кинетической теоріи газовъ. Жур. Рус. Физ.-Хим. Общ. 1885. II стр. 114, 281. (335)

Поляковъ П. Собраніе ариѳметическихъ задачъ для умственнаго и письменнаго рѣшенія съ прибавленіемъ упражненій въ вычисленіяхъ на счетахъ. Изд. 4-е допол. М. 1886. (336)

Померанцевъ И. И. Отчетъ объ астрономическихъ работахъ памирской экспедиціи 1883 г Спб. 1885. (337)

Поповъ В. Способъ предѣловъ и приложенія его въ курсѣ элементарной математики. Пособіе для учащихся въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ. Великія Луки. 1885. Ц. 70 к. (338)
Жур. Эл. Мат. 1885 стр.

— Письмо въ редакцію (по поводу рецензіи). Журн. Э.-Мат. 1885 стр. 210. (339)

Построить простѣйшую фигуру, одно изъ свойствъ которой выражалось даннымъ уравненіемъ и изслѣдовать остальныя свойства этой фигуры. (Тема для сотрудниковъ). Журн. Эл. Мат. 1885 стр. 277. (340)

Потье. Измѣреніе энергіи, поглощаемой электрическимъ

аппаратомъ Жур. Р. Ф.-Х. Общ 1885. II стр. 13. (Изъ Jour. d. Phys. 1881. 445; Ann. de ch. et de phys. XXIX. 16. 1883). (341)

П. П. Геометрія чиселъ. Физ.-Мат. науки. Отд. науч. ст. стр. 49. 171. (342)

П. П. В. Геометрія чиселъ Ч. 1 (съ приложеніемъ таблицы квадратовъ четырехзначныхъ чиселъ). М. 1885. (343)

П. П. Видоизмѣненіе элемента Даніэля. Электр. 1885. № 9—10. стр. 78). (344)

— Новыя лампы съ вольтовой дугой употребляемыя въ одной цѣпи съ лампами накаливанія. Электр. 1885. № 9—10, стр. 79. (345)

— Динамо-машина Боттона доступная къ изготовленію даже для любителей и зажигающая 20 30—свѣчныхъ лампъ Свана. Электр. 1885. № 9—10, стр. 80. (346)

— Электрическій фонарь въ 15 милліоновъ нормальныхъ свѣчей. (Для Парижской всемірной выставки 1889 г.). Электр. 1885. № 9—10, стр. 80. (347)

— Новый постоянный элементъ Сепе. Электр. 1885. № 9—10, стр. 80. (348)

Преображенскій В. Геометрическая теорія преломленія свѣта. (Опытъ элементарнаго изложенія безъ помощи тригонометріи). М. 1884. (349)

Преображенскій П. В. Упрощенное умноженіе и дѣленіе какихъ угодно чиселъ. Изд. 2-е. М. 1885. Ц. 30 к. (350)

— Руководство къ ариеметикѣ. М. 1885. Ц. 60 к. (351)

Пржевальскій Е. Начальная алгебра. Изд. 3 испр. и допол. М. 1885. Ц. 1 р. 25. (352)

Журн. Мин. Нар. Просв. 1885. Ч. стр. 75.

Примѣненіе брома въ гальваническихъ элеменахъ. Техн. 1885. стр. 208. (353)

Приложеніе даровыхъ силъ природы къ подъему воды. Техн. 1885. II, стр. 84. (354)

Протоколы секціи физико-математическихъ наукъ. Т. III, вып. 3. Казань 1885. (355)

— III т. съ портретомъ Ковальскаго. Ц. 1 р. 50 к., безъ портрета 1 р. 25 к. (356)

П. Э. Новый музыкальный инструментъ адіафонъ. Техн. 1885 стр. 194. (357)

Работы по чистой математикѣ, читанныя въ засѣданіяхъ парижской академіи наукъ въ теченіи второй половины 1884 года. 1. Математическій анализъ. Физ.-мат. науки въ ихъ настоящ. и прошед. Отд. науч. нов. крит. и библіогр. 1885, стр. 8—45. 2. Алгебра. Тамъ-же стр. 49. 3. Геометрія. Тамъ-же стр. 93. (358)

Radau. Solution graphique du problème de Kepler. (359)
Физ.-мат. науки. Отд. науч. нов. кр. и библ. 1885, стр. 216.

Радкевичъ И. Г. Автоматическое извѣщеніе о началѣ и концѣ каждаго урока. Журн. Элем. мат. 1885. стр. 324. (360)

Распредѣленіе движущей силы помощію разрѣженнаго воздуха. Докладъ г. Boudenot. Инжен. (Кіев.) 1885 стр. 313. (Изъ Societe d. Ingen. civils. Mars. 1885). (361)

Ребровскій Л. Международная выставка изобрѣтеній въ Лондонѣ. Техн. 1885 II стр. 9. (362)

Resal. Traité elementaire de Mécanique céleste. 2 ed. Paris. 1884. (363)
Физ.-мат. наук. Отд. науч. нов. кр. и библ. 1885. стр. 135.

Ренгартенъ И. Учебникъ для батальонныхъ школъ инженерныхъ войскъ по ариѳметикѣ, геометріи и топографіи. Курсъ младшаго класса съ 2 лист. черт. Спб. 1885.—Курсъ старшаго класса съ 3 лист. черт. Спб. 1885. (364)

Рентгенъ. Опыты надъ электро-магнитнымъ дѣйствіемъ діэлектрической полярности. Жур. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II. стр. 50. (Изъ Phil. Mag. XIX. 385). (365)

Роговскій Е. О температурѣ небесныхъ тѣлъ. Журн. Рус. Физ.-Хим. Общ. 1885. II 314. (366)

Роланъ Е. (Некрологъ). Физ.-мат. науки. Отд. науч. нов. кр. и библ. 1885. стр. 127. (367)

Розенбергъ Ф. Очеркъ исторіи физики съ синхронистическими таблицами по математикѣ, химіи, описательнымъ наукамъ и всеобщей исторіи. Ч. II. Переводъ подъ ред. И. М. *Сѣченова* Спб. 1886. (368)

Русскія электрическія лампы накаливанія. Техн. 1885. II стр. 44. (369)

Рыкачевъ М. Новыя магнитныя карты Каспійскаго моря. Сб. 1885 Янв. стр. 57, карты, февр. стр. 91. (370)

Rykatschew. M Nouvellscartes magnétiques de la mer Caspienne. Спб. 1885. Ц. 60 к. (371)

Рябковъ Г. Сборникъ задачъ и примѣровъ по элементарной механикѣ. Курсъ реальныхъ училищъ. Одесса 1885. Ц. 1 р. (372)

Савельевъ Р. Н. О давленіи вѣтра. Инжен. (Кіев.) 1885, стр. 287. (373)

Савицкій М. Сборникъ алгебраическихъ задачъ для старшихъ классовъ гимназій и реальныхъ училищъ. Спб. 1885, Ц. 35 к. (374)

Самая сильная электрическая машина. Техн. 1885 .I, стр. 355. (375)

Сборникъ Института Инженеровъ путей сообщенія Императора Александра I, Отдѣлъ I. Труды учащихся. Вып. I, съ атласомъ. (376)

Инжен. (Кіевъ) 1885 стр. 81. Техн. 1885. II стр. 15.

— Вып. II. Труды преподавателей и матерьялы для институтскихъ курсовъ. Спб. 1885. Вып. III. Каталогъ минералогической и петрографической колекцій института. Спб. 1885. (377)

Селивановъ Димитрій. Теорія алгебраическаго рѣшенія уравненій. Разсужденіе на степень магистра математики. Спб. 1885. Ц. 2 р. съ пер. (378)

Siemaschko Julian. Meteoriten-Sammlung. Спб. 1885. (379)

Семека В. Сборникъ ариѳметическихъ задачъ и примѣровъ для вычисленій. Спб. 1885. Ц. 45 к., съ пер. 60 к. (380)

Серре А. (Некрологъ). Физ.-мат. науки. Отд. науч. нов. вр. и библ. 1885, стр. 97. (381)

Серре А. Прямолинейная тригонометрія. Пер. Е. Гуторъ. Изд. 3. М. 1885. Ц. 90 к. (382)

Сила свѣта и продолжительность горѣнія лампъ съ накаливаніемъ. Инжен. (Кіев.). 1885, стр. 526 (Изъ Revue Industr. Aout. Nov. 1885.). (383)

Симашко Фр. Ариѳметика. Изд. 8. Полтава 1885. Ц. 75 к. (384)

Систематическій каталогъ книгъ по математикѣ, механикѣ и астрономіи студентской библіотеки Импер. Казанскаго унив. и дополненіе къ систематическому каталогу книгъ по чистой математикѣ фундамент. библіотеки. Казань. 1885. (385)

Скарлато Н. Астрономическіе способы опредѣленія: широты, долготы, поправки хронометра, девіаціи компасовъ, приливовъ и отливовъ моря. Съ прибавленіемъ. Одесса 1885. Ц. 1 р. 50 к. (386)

Скугаревскій А. Полевые оптическіе сигналы. Спб. 1885. Цѣна 40 к. съ пересылк. 50 к. (387)

Слудскій. Отзывъ о сочиненіи Н. Е. Жуковскаго представленномъ на соисканіе преміи заслуженнаго профессора Брашмана. Рѣчь и отчетъ чит. въ торж. собраніи Имп. Моск. ун. 12 Янв. 1886 г. М. 1886. Приложеніе. (388)

Смирновъ С. А. Свѣтовой оптическій телеграфъ съ нагляднымъ обученіемъ геліографированію или фото-геліографія. Спб. 1885. (389)

Соколовъ А. О кометахъ. Рѣчь произнесенная 31 Января 1885 года въ торжественномъ засѣданіи Московской частной женской гимназіи учрежденной З. Д. Перепелкиной. М. 1886. (390)

Соколовъ А. П. По поводу предложеннаго г. Вышнеградскимъ вывода Маневелова закона. М. 1885. (391)

Солнечная колона въ Парижѣ. Инжен. (Кіев.) стр. 316 (Изъ Scient Amer. 1885 № 15). (392)

Сомовъ П. Кинематика подобно-измѣняемой системы двухъ измѣреній Спб. 1885. (393)

Сонинъ Н. Я. Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія. зап. мат. отд. нов. общ. еств. 1885 стр. 1. (394)

— Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія. Статья вторая. Тамъ же, стр. 93. (395)

Соре. О камертонѣ. Журн. Рус. Ф.-Х. Общ. 1885. II стр. 23. (Изъ Arch. des Sc. Phys. XIII. 47.). (396)

Сохоцкій. Теорія чиселъ. Лекціи. Спб 1885. (Литогр.) (397)

— Геометрическое приложеніе интегральнаго исчисленія. Спб. 1885. (Литогр.). (398)

Спеціальный каталогъ по математикѣ, геодезіи и техникѣ. Оптика и механика. О. Рихтера въ С.-Петербургѣ. Спб, 1886. Ц. 60 к. стр. 75. (399)

Спицынъ В. Д. Механика хожденія человѣка. Опытъ популярнаго изслѣдованія въ области механики живаго организма. Спб. 1885. Ц. 40 к. (400)

Spindler I. Die Vertheilung der Winde an den Küsten des Schwarzen und Asowschen Meeres (Метор. Сбор. Имп-Ак. н. Т. IX. № 7). Спб. 1885. Ц. 70 к. (401)

Способъ Фельпса подачи и пріема телеграфныхъ депешъ съ поѣздовъ на полномъ ходу. Техн. 1885. II стр. 4. (402)

Станкевичъ Б. В. Кинетическая теорія газовъ въ математическомъ изложеніи. М. 1885. 8 д. 226. (403)

С. С. Новый элементъ г. Яблочкова. (Авто-аккумуляторъ). Электр. 1885. № 9—10 стр. 73. (404)

Старковъ А. Объ одномъ линейномъ диффёренціальномъ уравненіи 3-го порядка. Зап. Мат. Отд. Нов. Общ. Ест. 1885, стр. 13. (405)

— Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія. Тамъ же. стр. 23. (406)

— О нѣкоторыхъ особенностяхъ въ постановкѣ задачи Ньютона о поверхности наименьшаго сопротивленія. Тамъ же. стр. 47. (407)

— Интегрированіе раціональной дроби съ мнимыми корнями. Тамъ же. стр. 87. (408)

Стеминевскій С. Н. О построеніи трехграннаго угла по двумъ плоскимъ угламъ и двухграному противолежащему одному изъ нихъ. Журн. Эл. Мат. 1885. стр. 376. (409)

Степановъ С. Новый элементъ для домашняго электрическаго освѣщенія. Техн. 1885, II стр. 107. (410)

Степановъ и Іорданскій. Схемы соединенія приборовъ при работахъ по гальванизму въ физическомъ кабинетѣ мин. оф. класса. Приложеніе къ курсу практической Физики Степанова. Изд. 2-е. Спб. 1885 (Литогр.) (411)

Стефанскій А. Сборникъ задачъ элементарной механики для реальныхъ училищъ. В. I. Одесса 1885. Ц. 40 к. (412)

Журн. Мин. Нар. Просв. 1885 Ч. 242 стр. 107. Жур. Эл. Мат. 1885 Стр. 355.

Столповскій А. Къ вопросу объ освѣщенія электричествомъ желѣзнодорожныхъ поѣздовъ (Изъ № 5 «Инженера»). Кіевъ 1885. (413)

Столѣтовъ А. Г. По поводу «отвѣта» г. Краевича. Жур. Рус. Физ.-Хим. Общ. 1885 II стр. 52. (414)

Стренгольцъ П. А. Рѣшеніе нѣкоторыхъ важнѣйшихъ вопросовъ изъ элементарной геометріи. М. 1886. Ц 1 р. съ пер. 1 р. 20 к. (415)

Струве О. О рѣшеніяхъ принятыхъ на Вашингтонской конференціи относительно перваго меридіана и вселенскаго времени. Спб. 1885. (416)

Морской сборн. 1885. Іюнь, стр. 1.

Struve Otto. Tabulae quantitatum besselianarum pro annis 1885 ad 1889 computatae. Спб. 1885. (417)

— Sammlung der Beobachtungen von Sternbedeckungen während der totalen Mondfinsterniss 1884 october 4. Спб· 1885. Ц. 20 к.=70 pf. (418)

— Die Beschlüsse der Waschingtoner Meridianconferenz. Спб. 1885. (419)

Sur les tetes des cometes. Москва, 1885. (420)

Сферическая коловратная машина Tower. Техн. 1885, стр. 203. (521)

Таблицы для скораго и точнаго вычисленія объемовъ земляныхъ работъ по способу инженера Ф. Ф. Мурзо. Спб. 1885. (422)

Татариновъ В. О свойствахъ эѳира. Ч. III. Столкновеніе атомовъ эѳира. М. 1885, Ц. 3-я часть. 1 р. 50 к. (423)

Тверитиновъ Электрическое освѣщеніе, Лекціи чит. на дополн. курсѣ м. оф. класса въ 1885 Состав. А. В. Худынцевъ. Кронштадтъ 1885 (Литогр.). (424)

Тверской Н. Н. Коловратная машина Тверскаго. Сообщ. въ Имп. Техн. Общ. 16-го марта 1885 г. Спб. 1885. (425)

Телеграфированіе безъ проволокъ. Техникъ 1885, стр. 223. (426)

Телеграфъ для воскресающихъ мнимо-умершихъ, устроенный часовымъ мастеромъ И. М. Гусевымъ. Нижній Новгородъ. 1885. Ц. 20 к. (427)

Телеметръ Лаббеза. Техн. 1885. II, стр. 138. (428)

Теорія векторовъ на плоскости (Теорія эквиполленцій.— Тема для сотрудниковъ). Журналъ элемент. мат. 1885, стр. 207. (429)

Термо-телефонъ Охоровича. Техникъ. 1885. I, стр. 383. (430)

Тилло Алексѣй. Метеорологическій сборникъ Императ. акад. н. Т. IX № 5. Изслѣдованіе о географическомъ распредѣленіи и вѣковомъ измѣненіи силы земнаго магнетизма на пространствѣ Европейской Россіи (съ 3-мя карт.). Спб. 1885. (431)

Тиндаль Джонъ. Лекціи объ электричествѣ. Переводъ съ англійскаго. Изданіе подъ редакціей Н. Гезехуса. Изд. 3-е Спб. 1885. Ц. 50 к. (432)

Tisserand. Quelques remarques au sujet de la figure des planetes. (433)

Физ.-Мат. науки. Отд. науч. нов. кр. и библ. 1885, стр. 217.

Томасъ И. Собраніе ариеметическихъ задачъ для умственнаго и письменнаго исчисленія. Вып. I. Изд. 19-е испр. Спб. 1885. Ц. 30 к. (434)

Треска Г. Е. (Некрологъ). Физ.-мат. наук. Отд. науч. нов. кр. и библ. 1885, стр. 262. Инжен. (Кіев.) 1885, стр. 365. (435)

Труды V отдѣла Импер. Рус. Техн. Общества по свѣтописи и ея примѣненіямъ. Спб. 1885. (436)

Тисто. О вѣтрѣ. Спб. 1885. Ц. 8 к. съ пер. 15 к. (437)

Узловскій. Небо и звѣзды. Изд. 4-е. Спб. 1885. Ц. 20 к. съ пер. 30 к. (438)

Умовъ. Н. Геометрическое значеніе интеграловъ Френеля. Зап. мат. отд. нов. общ. естеств. 1885, стр. 57. (439)

Усовершенствованіе въ электрическихъ лампахъ. Техн. 1885, II, стр. 43. (440)

Ученыя Записки Императорскаго Московскаго университета. Отдѣлъ Физико-математическій. Вып. 5, 6. М. 1885. (441)

Фанъ-деръ-Флитъ. П. П. Введеніе въ механику. Ч. I. Основные законы движенія (Кинематика точки). Спб. 1886. Ц. за 2 ч. 4 р. (442)

— Основанія механики (для студентовъ натуралистовъ и медиковъ). Спб. 1885. Ц. 1 р. 50 к. (443)

Федоровъ Я. Этюды по аналитической кристаллографіи. Спб. (444)

Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ. Журналъ чистой и прикладной математики, астрономіи и физики изд. В. В. Бобынинымъ. М. 1885. Т. I. (445)

Жур. Мин. Нар. Просв. 1885. Ч. 242, стр. 86.

Философское, научное и педагогическое значеніе исторіи математики. Физ.-мат. науки. Отд. науч. ст. стр. 1. 97. (446)

Фонъ-Бооль В. Теорія и устройство различнаго рода вѣсовъ. Спб. 1885. Л. 1 р. 25. (447)

— Физическія таблицы: 1) Электрическій телеграфъ. 2) Паровая машина. 3) Паровозъ (локомотивъ). Съ текстомъ для употребленія въ народныхъ школахъ и при самообученіи. Изд. 2-е М. 1885. Ц. 80 к. (448)

Федоровъ Е. С. Начало ученія о фигурахъ. Спб. 1885.

Французское математическое общество и его дѣятельность въ 1884 году. Физ.-мат. наук. отд. науч. нов. кр. и библ. 1885, стр. 81. (449)

Фрелихъ. Электро-химическія машины Сименса и Гальске и ихъ дѣйствіе. Жур. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II, стр. 2. (Изъ Electrot. Z. V. 466—480). (450)

Фриттсъ. Новые селеновые элементы. Жур. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II, стр. 18. (Изъ La lumier électrique XV. 226). (451)

Фроловъ А. Приложеніе алгебры къ геометріи и начала аналитической геометріи, геометріи въ плоскости. Ч. I. Приложеніе алгебры къ геометріи. Часть II. Начала аналитической геометріи въ плоскости. Изд. 5-е. Спб. 1886. Ц. I ч. 25. II ч. 25 к. (452)

Фусъ В. Вспомогательныя таблицы для вычисленія ши-

роты и часоваго угла, по одновременнымъ высотамъ двухъ звѣздъ. Морс. Сбор. 1885. Янв. стр. 1. (453)

— Результаты сибирской нивелировки произведенной въ 1875—76 г. отъ станицы Звериноголовской до озера Байкала. (Зап. Импер. Рус. Геогр. Общ. по общей геогр. Т. XV № 1. Изд. подъ ред. А. А. *Тилло*). Спб. 1885. (454)

Фей (Faye). О работахъ Пальміери, относящихся къ атмосферному электричеству. Журн. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II, стр. 86. (Изъ С. R. Т. 100 р. 1561. 1566 Т. 101. р. 19, 123, 129, 281, 287). (455)

Хвольсонъ. О. О метрической системѣ мѣръ и вѣсовъ и о ея введеніи въ Россіи. (456)

— Популярныя лекціи объ электричествѣ и магнетизмѣ. Съ 220 рис. въ текстѣ. 2-е пересм. и допол. изд. Ц. 2. р. (457)

Химическіе аккумуляторы. Техн. 1885. II, стр. 152. (458)

Ходящая машина академика П. Л. Чебышева. Техн. 1885. I, стр. 266. (459)

Цингеръ Б. Воспоминанія о А. Ю. Давидовѣ. Рѣчь и отчетъ чит. въ торж. собр. Имп. Моск. унив. 12 Янв. 1886. М. 1886. Приложеніе. (460)

Чебышевъ П. О представленіи предѣльныхъ величинъ интеграловъ посредствомъ интегральныхъ вычетовъ. Прилож. къ LI т. Зап. Имп. Ак. Наукъ. № 4. Спб. 1885. Ц. 15 к. (461)

Чиколевъ В. Справочная книжка по электротехникѣ. Спб. 1885. Ц. 75. к. (462)

— Чудеса техники и электричества. Спб. 1886. (463)

— Электрическое освѣщеніе въ примѣненіи къ жизни и военному искуству. Съ 151 рис. въ текстѣ Спб. 1885. Ц. 2 р. 50 к. (464)

— Электрическіе акумуляторы. Съ рис. въ текстѣ. Спб. 1885. Ц. 20 к. (465)

Шапошниковъ Н. А. Курсъ прямолинейной тригонометріи и собраніе тригонометрическихъ задачъ. 2-е изданіе. М. 1885. Ц. 80 к. (466)

Журн. Мин. Нар. Просвѣщенія. 1885 7. 245. стр. 57.

Шебуевъ Г. Н. Руководство къ теоретической оптикѣ. Вып. I. Казань, 1886. Ц. 1 р. 50 к. съ пер. 1 р. 75 к. (467)

Шедлингъ М. Ю. Исторія изобрѣтенія и развитія электрическаго телеграфа. М. 1885. Ц. 1 р. (468)

Schönrock A. Ueber kleine Unregelmässige Barometer-Schwankungen. Метеор. Сборн. Имп. Ак. н. Bd. IX. № 8. Спб. 1885. Ц. 18 к. = 60 pf. (469)

Шиллеръ Н. Н. Элементы ученія объ электричествѣ. Жур. Эл. Мат. 1885 стр. 277, 314, 385. (470)

— Къ вопросу объ ударѣ абсолютно твердыхъ тѣлъ. Жур. Рус. Физ.-Хим. Общ. 1885. II, стр. 5, 200. (471)

«**Школа** математики чистой и прикладной». Ежемѣсячный журналъ для учащихъ, учащихся и всѣхъ любителей физико-математическихъ наукъ. Спб. 1885. (472)

Шостакъ С. А. Логариѳмическая линейка (Régle à calcul). Одесса. 1885. Ц. 1 р. (473)

Жур. Элем. Мат. 1885 стр. 209.

Шоурекъ А. В. Стереометрія на горнитѣ класове на реальнитѣ и гимназіальни училища. Пловдивъ. 1883. (474)

— Прямолинейна Тригонометрия. Пловдивъ 1883. (475)

— Логариѳмически таблици отъ проф. Д-ръ Студничка. Пловдивъ 1882. (476)

Жур. Эл. Мат. 1885 стр. 355.

Шпачинскій Эр. Электрическіе аккумуляторы Жур. Элем. мат. 1885 стр. 169. 193. 260. 337. 361. 394. (477)

— Электрическое осажденіе дыма. Тамъ-же стр. 258. (478)

— Комбинаціонные тоны. Тамъ-же, стр. 273. (479)

Шпиндлеръ I. Распредѣленіе вѣтровъ на берегахъ Черного и Азовскаго морей. Св. 1885. Февр. стр. 1. (480)

Щегляевъ В. С. Электролитическія фигуры Нобили и Гебара въ магнитномъ полѣ. (Предвар. сообщ.). Жур. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II. стр. 1. (481)

Щукинъ Н. Теоретическая механика. Ч. II. Лекціи чит. въ Спб. Технол. Инст. Спб. 1884.—85. Лит. (482)

Эльстеръ и Гейтель. Замѣчанія объ электрическихъ

явленіяхъ въ грозовыхъ облакахъ. Журн. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II стр. 62 (Изъ Wied. Ann. XXV 116.). (483)

— О развитіи электричества при образованіи дождя. Тамъ-же стр. 63. (Изъ Wied. Ann. XXV. 121). (484)

— Замѣтка о чувствительномъ дубликаторѣ. Тамъ-же стр. 29. (Изъ Ann. d. Phys XXV. 114. (485)

Яблочковъ. Новый галваническій элементъ ауто-аккумуляторъ. Журн. Р. Ф.-Х. Общ. 1885. II. 29. (Изъ C. R. T. 100. 1314—1217. 1885.). (486)

Ѳедоровъ Е. С. Начало ученія о фигурахъ. Спб. 1885. Ц. 3 р. съ пер. 3 р. 30. (487)

Электрическая выставка Парижской обсерваторіи. Техн. 1885. I. стр. 345. (488)

Электрическіе аккумуляторы. Инжен. (Кіев.). 1885 стр. 443. (Изъ Revue Indust. Aout. 1885.). (489)

Юргенсъ Н. Д. Экспедиція къ устью рѣки Лены съ 1881 года по 1885 годъ. Предварительный отчетъ. (490)
Морск. Сборн. 1885. Дек. стр. 14.

УКАЗАТЕЛЬ

къ русской библіографіи по Математикѣ, Механикѣ, Астрономіи, Физикѣ и Метеорологіи за 1885 годъ.

Ариѳметика.

Алгебра низшая.

Геометрія элементарная.

Тригонометрія и таблицы.

Начертательная Геометрія и черченіе.

Аналитическая и высшая геометрія.

Высшая алгебра, теорія формъ, дифференціальное, интегральное и варіаціонное исчисленія, теорія функцій, теорія чиселъ и пр.,

Механика теоретическая и прикладная.

Астрономія, геодезія и теорія вѣроятностей.

Физика теоретическая и экспериментальная.

Матеорологія.

Исторія и философія математическихъ наукъ.

Сборники, журналы, отчеты и пр.

Смѣсь.

КЪ ИСТОРІИ
АЛГЕБРАИЧЕСКАГО ОБОЗНАЧЕНІЯ
въ связи съ развитіемъ
АЗБУЧНОЙ И МУЗЫКАЛЬНОЙ ПИСЬМЕННОСТИ.

А. Старкова.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Въ текущемъ столѣтіи исторія математики вступила въ новый фазисъ своего развитія. При тщательномъ изученіи древнихъ произведеній и при близкомъ знакомствѣ вообще съ трудами предшественниковъ размѣръ собранныхъ матеріаловъ оказался на столько значительнымъ, что явилась возможность отрѣшиться отъ изложенія однихъ лишь фактовъ въ хронологической ихъ послѣдовательности и приступить къ обобщеніямъ, къ указанію законовъ, управляющихъ ходомъ развитія математическихъ знаній. Труды частію еще Монтюкля (1725—1799)[1] и Коссали (1748 — 1815), но главнымъ образомъ Либри (1803—1859) и Шаля (1793—1880) положили этому блестящее начало. Послѣдующіе писатели по исторіи математики получаютъ уже возможность давать сочиненія въ духѣ новѣйшей исторической критики, какимъ является напримѣръ извѣстное произведеніе Кантора[2].

Съ другой стороны исторія математическаго письма или, точнѣе, алгебраическаго обозначенія лишь недавно остановила на себѣ вниманіе и стала предметомъ спеціальныхъ изслѣдованій. Хотя еще Валлисъ (1616 — 1703) въ 1657 году посвятилъ этому предмету отдѣльную главу своего сочиненія

---

[1]) Особенно во второмъ изданіи его знаменитой Histoire des Mathématiques, сдѣланномъ Лаланомъ въ 1799—1802 гг.

[2]) *Cantor* M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig 1880.

Mathesis universalis [3]); но только работы Colebrooke'а (1765 — 1837), Sedillot (1808 — 1875), Nesselmann'а, Woepcke (1826 — 1869) и др. подготовили почву для спеціальныхъ изслѣдованій, какими являются труды напримѣръ Rodet. Благодаря этому авторы новѣйшихъ общихъ сочиненій по исторіи математики, какъ Канторъ [4]), Ващенко-Захарченко [5]), Gow [6]) и пр. считаютъ уже необходимымъ болѣе или менѣе подробно касаться этого предмета.

При такихъ условіяхъ излагаемая въ настоящемъ очеркѣ попытка сдѣлать одно изъ упомянутыхъ выше обобщеній, касающееся развитія математической или точнѣе алгебраической письменности, не должна казаться несвоевременною, тѣмъ болѣе что излагаемое обобщеніе одинаково имѣетъ мѣсто по отношенію къ развитію и другихъ родовъ письменности, именно: азбучной или словесной, имѣющей цѣлію изобразить слово, и музыкальной, предметъ обозначенія которой есть музыкальный звукъ. Кромѣ того при одинаковости условій развитія названныхъ видовъ письменности, а также и вслѣдствіе нѣкоторыхъ теоретическихъ указаній становится весьма вѣроятнымъ предположеніе, что излагаемыя здѣсь соображенія вполнѣ примѣнимы къ развитію всякаго рода письменности. Обстоятельство это было причиною тому, что въ настоящей статьѣ встрѣтилась необходимость вмѣстѣ съ изложеніемъ исторіи алгебраическаго обозначенія указать въ общихъ чертахъ ходъ развитія какъ азбучной или словесной, такъ и музыкальной письменности.

Въ послѣднее время путь развитія азбучной или словесной письменности настолько выясненъ археологическими из-

---

[3]) *Wallis*. Mathesis universalis, sive arithmeticum opus integrum. Oxoniae 1657, cap. XI. De notatione algebrica.

[4]) *Cantor*. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig 1880.

[5]) *Ващенко-Захарченко*. Исторія математики. Томъ I. Кіевъ 1883 г.

[6]) *Gow* James. A Short History of Greek Mathematics. Cambridge 1884.

слѣдованіями, что уже сдѣлался предметомъ популярныхъ изложеній [7]). Вслѣдствіе этого для цѣлей настоящей статьи вполнѣ достаточно привести лишь главнѣйшіе изъ добытыхъ въ этомъ направленіи результатовъ, тѣмъ болѣе, что по отношенію къ исторіи развитія этого рода письменности нѣтъ точныхъ хронологическихъ данныхъ, а также достовѣрныхъ указаній относительно именъ отдѣльныхъ личностей, содѣйствовавшихъ ея усовершенствованію.

Исторія развитія музыкальной письменности или музыкальнаго обозначенія является тоже въ значительной степени разработанною и важность ея сознана гораздо раньше, чѣмъ значеніе исторіи развитія алгебраическаго письма. Еще въ прошедшемъ столѣтіи появляются изданія, какъ напр. изданіе Gerbert'a (1720 — 1793) [8]), въ которыхъ въ значительной мѣрѣ обращено вниманіе на нотное обозначеніе. Такія изданія совмѣстно съ значительнымъ числомъ сочиненій, посвященныхъ исторіи музыки, въ которыхъ путь развитія музыкальнаго обозначенія играетъ выдающуюся роль, создали возможность появленія спеціальныхъ изслѣдованій, имѣющихъ цѣлію исключительно изложеніе исторіи нотнаго обозначенія, каковыми являются напримѣръ произведеніе Riemann'a [9]) и въ особенности столь обстоятельное сочиненіе David'a и Lussy [10]), увѣнчанное преміей Парижской Академіей наукъ. Вмѣстѣ съ этимъ какъ въ такихъ монографіяхъ, такъ и въ сочиненіяхъ по исторіи музыки сознана была необходимость приводить подробныя фак-

---

[7]) *Колосовъ и Озерковъ*. Очеркъ исторіи ребуса. СПБ. 1885. *Ю. Трачевская*. Исторія азбуки и пр.

[8]) *Gerbert* Martin. Scriptores ecclesiastici de musica sacra potissimum ex variis Italiae, Galliae et Germaniae codicibus manuscriptis collecti et nunc primum publica luce donati 3 vol. 1784. Продолженіе этого изданія сдѣлано Cousseemaker'омъ (1805 — 1876) подъ заглавіемъ: Scriptores de musica medii aevi, nova series a Gerbertino altera, 4 vol. Paris 1866—1876.

[9]) *Riemann* Hugo. Studien zur Geschichte der Notenschrift. Leipzig 1878.

[10]) *David et Lussy*. Histoire de la notation musicale depuis ses origines. Paris 1882.

симиле различныхъ нотныхъ обозначеній. Это обстоятельство, совмѣстно съ существованіемъ самостоятельныхъ изслѣдованій по указанному вопросу, дѣлаетъ путь развитія нотнаго обозначенія въ значительной мѣрѣ выясненнымъ и даетъ возможность привести исторію музыкальной письменности съ достаточной степенью ясности въ общихъ чертахъ, не вдаваясь въ особыя подробности, что̀ весьма упростило задачу.

Какъ уже и выше было замѣчено, въ исторіи математики почти до самаго послѣдняго времени не придавали особаго значенія развитію математическаго или лучше алгебраическаго письма. Поэтому только недавно сочли необходимымъ давать факсимиле этого письма, приводить его въ подлинникѣ, тогда какъ прежде алгебраическимъ обозначеніемъ предшественниковъ даже пренебрегали. Характерный примѣръ въ этомъ отношеніи представляютъ изданія Діофанта, греческій подлинникъ котораго въ первый разъ былъ отпечатанъ Bachet de Méziriac'омъ въ 1621 году [11]). По указанію Rodet [12]) тѣ рукописи, кото-

---

[11]) *Claudio Gaspare Bacheto Meziriaco Sebusiano* Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex et de numeris multangulis lider unus. Lutetiae Parisiorum MDCXXI (1621).

Первое изданіе Діофанта въ переводѣ на латинскій языкъ было произведено Ксиландеромъ въ 1575 г. подъ заглавіемъ: Diophanti Alexandrini Rerum Arithmeticarum libri sex item liber de numeris Polygonis. Basileae MDLXXV (1575). Въ этомъ изданіи формулы, встрѣчающіяся въ рукописяхъ Діофанта, частію опущены, частію переданы современнымъ Ксиландеру алгебраическимъ письмомъ, что̀ къ сожалѣнію практикуется еще и до сихъ поръ напр. у Rodet и др. Затѣмъ, какъ указано въ текстѣ, въ 1621 Bachet de Méziriac издалъ греческій подлинникъ съ латинскимъ переводомъ, причемъ форма греческихъ буквъ близка къ употребляемой въ рукописяхъ, что̀ впрочемъ наблюдается вообще въ то время. Второе изданіе греческаго текста также съ латинскимъ переводомъ было сдѣлано Fermat въ 1670 году подъ заглавіемъ: Diophanti Alexadrini Arithmeticorum libri sex et de numeris multangulis liber unus. Tolosae MDCLXX (1670). Изданіе это въ настоящее время весьма цѣнится и отличается чистотою печати и изящностію шрифта, вполнѣ отступающаго отъ рукописной формы, а также многими интересными примѣчаніями. Крайне характерно то обстоятельство, что Fermat въ своемъ изданіи не пользуется современнымъ ему алгебраическимъ обозначеніемъ, а сохраняетъ то, которое было употреблено почти сто лѣтъ раньше (1575 г.)

рыя служили основаніемъ Bachet de Méziriac'у для печатанія греческаго текста, содержатъ многія характерныя алгебраичесскія вычисленія имъ совсѣмъ опущенныя, какъ совершенно излишнія и ненужныя. Тоже самое наблюдается и въ послѣдующемъ изданіи Діофанта, сдѣланномъ Fermat въ 1670 году, указаномъ здѣсь въ выноскѣ [11]), и это въ то время, когда, какъ выше упомянуто, Wallis писалъ уже о формахъ алгебраическаго обозначенія. Впрочемъ еще и въ началѣ текущаго столѣтія въ изданіяхъ напримѣръ произведеній индусскихъ математиковъ замѣтна недостаточность вниманія къ ихъ обозначенію. Въ Bija Ganita, изданной Strachey'емъ въ Лондонѣ въ 1812 году [13]), лишь въ примѣчаніи, принадлежащемъ Davis (стр. 92 и 93), указанъ примѣръ алгебраическаго письма, употребляемаго индусскими математиками; въ самомъ же сочиненіи всѣ формулы переданы помощію употребляемаго нами символизма. Но въ изданіи Colebrooke'а, произведенномъ въ Лондонѣ въ 1817 году [14]), уже замѣчается наклонность къ наиболѣе близкой передачѣ санскритскихъ формулъ, причемъ

Ксиландеромъ и затѣмъ Bachet de Méziriac'омъ (въ изданіи 1621 года). Въ переводѣ Діофанта на французскій языкъ, сдѣланномъ Simon'омъ Stevin'омъ (1548—1620) и помѣщенномъ въ L'arithmetique de *Simon Stevin* de Bruges, reueuë, corrigee et augmentee de plusieurs traicter et annotation par *Albert Girard*. Leide 1625 in 8° p. 405—677, приведены формулы, подобныя находящимся въ рукописи, причемъ для ихъ передачи принято существовавшее въ то время въ Голландіи обозначеніе. По указанію *Bierens de Haan* (Bibliographie Néerlandaise. Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche publicato da B. *Boncompagni* Tomo XV 1882 p. 374) первое изданіе ариѳметики Stevin'а было произведено въ 1585 г., но видѣть это изданіе мнѣ не пришлось.

[12]) *Rodet*. Sur les notations numériques et algébriques anterieurement au XVI-e siècle. Paris 1881. p. 99—101, 115, 116 etc. Какъ примѣръ Rodet указываетъ между прочимъ на задачи 32 и 33 книги I, въ которыхъ существующія въ рукописи алгебраическія вычисленія совсѣмъ выпущены, какъ въ изданіи Bachet de Méziriac'а, такъ и въ изданіи Fermat.

[13]) *Strachey* Ed. Bija-Ganita, or the Algebra of the Hindus. London (1812).

[14]) *Colebrooke* H. Th. Algebra with Arithmetic and Mensuration, from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara. London 1817.

является возможность составить себѣ нѣкоторое понятіе о подлинникѣ.

Вообще съ основаніемъ журналовъ, посвященныхъ востоку, какъ то: Asiatic Reaserches въ Англіи, Journal Asiatique во Франціи и др., въ которыхъ (особенно въ Journal Asiatique) времени отъ времени, сначала очень рѣдко, а впослѣдствіи чаще, начали появлятся статьи, относящіяся къ исторіи математики, причемъ согласно характеру самихъ журналовъ начали приводить подлинные отрывки изъ описываемыхъ сочиненій,—съ основаніемъ этихъ журналовъ было положено первое начало опредѣленію того значенія, какое заслуживаетъ исторія развитія математическаго письма. Уже въ 1839 году въ Англіи Halliwell даетъ изданіе Rara Mathematica [15]), въ которомъ воспроизводитъ болѣе или менѣе точно рѣдкія математическія сочиненія главнымъ образомъ рукописные, но частію и печатныя [16]). Впослѣдствіи, когда съ одной стороны все болѣе и болѣе начали придавать значеніе подлиннику, съ другой—развитіе типографскаго искусства дало возможность съ небольшими сравнительно затратами воспроизводить эти подлинники, предпринимаютъ выпускъ въ свѣтъ цѣлыхъ сочиненій, какимъ напримѣръ является тожественное съ подлиннымъ изданіе *Fermat*, Varia opera mathematica, сдѣланное извѣстной берлинской книгопродавческой фирмой Friedländer und Sohn [17]) и обратившее на себя вниманіе во время Парижской всемірной

---

[15]) *Halliwell.* Rara Mathematica. London 1839, and sec. ed. London 1841.

[16]) Какъ напримѣръ, по указанію *De Morgan*'a (Arithmetical books. London 1847 p. 13 и 14), помѣщено сочиненіе *Sacrobosco* объ алгоризмѣ, которое было напечатано въ 1523 году въ Венеціи подъ заглавіемъ: Algorismus domini Joh. de Sacro Busco, noviter impressum (?) Venetiis 1523. Въ библіографіи Teofila *Żebrawskiego* (Bibliografija piśmiennictwa polskiego z działu matematyki i fizyki oraz ich zastósowań. Kraków 1873. стр. 76 и 77) указано нѣсколько изданій начала XVI столѣтія приведеннаго сочиненія Sacrobosco.

[17]) Varia opera mathematica D. Petri de Fermat Senatoris Tolosani. Tolosae MDCLXXIX (1679) Novo invento usi iterum expresserunt R. Friedländer et Filius, Berolini MDCCCLXI (1861).

выставки 1867 года. Но наиболѣе важнымъ и интереснымъ съ точки зрѣнія математическаго обозначенія является сдѣланное въ 1877 году проф. Эйзенлоромъ[18]) тожественное съ подлинникомъ изданіе математическаго сочиненія, до сихъ поръ единственнаго оставленнаго намъ древнимъ Египтомъ (Папирусъ Ринда). Съ другой стороны извѣстный журналъ князя Boncompagni[19]), посвященный главнымъ образомъ исторіи математики, въ значительной мѣрѣ подвинулъ дѣло впередъ разработкою историко-библіографическихъ вопросовъ, а также изданіемъ подлинныхъ сочиненій, какъ напр. Chuquet[20]) и др. При такихъ условіяхъ постепенно возникалъ интересъ къ исторіи алгебраическаго обозначенія и подготовлялась почва для опредѣленія ея основныхъ моментовъ.

Тѣмъ не менѣе упомянутое выше отсутствіе въ прежнее время должнаго вниманія къ подлинному алгебраическому письму было одною изъ причинъ не только множества несообразностей, встрѣчающихся въ нѣкоторыхъ сочиненіяхъ по исторіи математики[21]), но отчасти и тому знаменитому спору по поводу времени возникновенія алгебраическаго символизма, который имѣлъ мѣсто въ тридцатыхъ и сороковыхъ годахъ текущаго столѣтія между столь великими учеными, какъ Либри и Шаль[22]). Споръ этотъ, разъяснившій въ значительной мѣрѣ нѣкоторые вопросы по исторіи алгебры, былъ въ тоже время

---

18) *Eisenlohr* August Dr. Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum), Leipzig 1877.

19) Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche T. I—XVII (1868—1884).

20) Maistre Nicolas *Chuquet* Parisien. Le triparty en la science des nombres. Publié par Aristide Marre. Rome 1881. Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Tomo XIII (Sentembre, Octobre, Novembre, Decembre 1880).

21) Какъ примѣръ можно указать сочиненіе: *Saverien*. Histoire des progrès de l'esprit humain dans les sciences exactes etc. Paris 1766, о немъ будетъ сказано ниже.

22) Comptes Rendus des seances de l'Academie des Sciences de Paris 1835 etc.

одною изъ причинъ, способствовавшихъ обращенію вниманія на подлинную форму математическаго письма, хотя впрочемъ и до сихъ поръ отчасти не придаютъ этому должнаго значенія, такъ какъ напр. въ извѣстной библіографіи Ohrtmann'a[23]), вообще весьма полной, совсѣмъ не указаны статьи, помѣщенныя въ Journal Asiatique и относящіяся къ исторіи математическаго письма[24]).

Вышеизложенныя обстоятельства совмѣстно съ отсутствіемъ систематическихъ монографій по исторіи алгебраическаго обозначенія были причиною тому, что въ настоящей статьѣ изложенію хода развитія математической письменности посвящена большая часть, что̀ также послужило основаніемъ и для самаго ея заглавія. Съ другой стороны въ виду того, что настоящая статья въ значительной мѣрѣ можетъ быть причислена къ исторіи математики, будетъ умѣстно привести здѣсь перечень сочиненій, къ ней относящихся, бывшихъ въ распоряженіи автора, съ краткимъ ихъ описаніемъ, впрочемъ безъ указанія журнальныхъ статей, которыя будутъ названы въ своемъ мѣстѣ, въ выноскахъ. Такой перечень, болѣе или менѣе полный, встрѣчается напр. у Kästrer'a[25]), Poppe'a[26]), Nesselmann'a[27]) и др. Въ Датской литературѣ по этому предмету существуетъ отдѣльная статья Eneström'a[28]). Въ Рус-

---

[23]) *Ohrtmann.* Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Berlin 1868—1882 (14 томовъ).

[24]) Не говоря уже о статьяхъ прежняго времени, я укажу лишь какъ примѣръ статьи позднѣйшія. *Oppert* L'étalon des Mesures Assyriennes, fixé par les textes cunéiformes. Journal Asiatique VI serie 20 Tome 1872 et VII serie 4 Tome 1874 г. Leon *Rodet.* Leçons de calcul d'Aryabhata. Journal Asiatique, VII serie Tome 13 et 16. 1879 et 1880 и др.

[25]) *Kästner.* Geschichte der Methematik, Göttingen 1796 Erster Band. Einleitung.

[26]) *Poppe Morits.* Geschichte der Mathematik, Tübingen 1828, Vorrede.

[27]) *Nesselmann.* Die Algebra der Griechen. Berlin 1842. Erstes Kapitel.

[28]) *Eneström* Gustaf. Om Matematikens Historia såsom studieämne vid Nordens högskolor. Tibsskrift for Mathematik. Udgived af Zeuthen t. IV. Kjøbenhavn 1880. p. 62 etc.

ской литературѣ мнѣ не удалось встрѣтить никакихъ относящихся къ этому указаній.

Первыя сочиненія по исторіи математики приписываютъ обыкновенно древнимъ Грекамъ [29]). Дѣйствительно, по указаніямъ Діогена Лаэрція, Прокла и Теона Александрійскаго, *Теофрастъ* (371—264 до Р. Х.) написалъ исторію геометріи въ четырехъ книгахъ, исторію астрономіи въ шести книгахъ, исторію ариѳметики въ одной книгѣ и почти въ тоже время *Евдемъ* (350 — 290 до Р. Х.) написалъ исторію геометріи и исторію астрономіи каждую въ шести книгахъ. Но всѣ эти сочиненія до насъ не дошли. Затѣмъ историческія указанія встрѣчаются у Паппуса (около 340 г. по Р. Х.) въ его Μαθηματικαὶ συναγωγαί, у Прокла (412—485) въ комментаріяхъ Евклида и пр.

Во многихъ средневѣковыхъ рукописяхъ приводятся впрочемъ очень краткія указанія относительно исторіи математики, заключающіяся обыкновенно въ томъ, что авторъ называетъ одно или нѣсколько именъ своихъ предшественниковъ, произведеніями которыхъ онъ пользовался при составленіи своего труда или которыя были руководителями и вдохновителями его въ наукѣ. Такое краткое приведеніе именъ предшественниковъ постепенно на столько входитъ въ обычай, что въ первопечатныхъ книгахъ XV и въ особенности XVI столѣтія уже почти всюду встрѣчается. Само собою разумѣется, съ точки зрѣнія науки такія приведенія или указанія имѣютъ вообще мало значенія, тѣмъ не менѣе они послужили первоначальнымъ импульсомъ и подготовили почву для возникновенія и развитія исторіи математики, какъ самостоятельной отрасли знаній. Впрочемъ уже въ первой половинѣ XVI столѣтія встрѣчаются сжатыя, но вполнѣ систематическія

---

29) Подробно объ этомъ см. у *Nesselmann*'a, Die Algebra der Griechen p. 1—8, гдѣ приведены всѣ ссылки на источники, содержащіе указанія объ историкахъ математики у грековъ. *Eneström*. (Om Matematikens Historia) точно также говоритъ (стр. 63): Redan *Teofrastos* och *Eudämos* upgifvas hafva behandlat geometrins historia, men ingenderas verk har bibehållit sig till våra tider, и т. д.

приведенія исторіи тѣхъ или другихъ математическихъ знаній, представляющія значительную цѣнность и служащія обыкновенно предисловіемъ къ изложенію самаго предмета, занимающаго автора. Какъ на важный и интересный примѣръ въ этомъ отношеніи можно указать на слѣдующія сочиненія:

Nicolai Copernici Torinensis de revolutionibus orbium coelestium Libri VI. Norimbergae 1543 in 4°.

Знаменитое сочиненіе Коперника, составившее переворотъ въ астрономіи. Крайне характерно его предисловіе: Habeas in hoc opere jam recens nato, et edito, studiose lector Motus stellarum, tam fixarum, quàm erraticarum, cum ex vetéribus, tum etiam ex recentibus observationibus restitutos: et novis insuper ac admirabilibus hypothesibus ornatos. Habes etiam Tabulas expeditissimas, ex quibus eosdem ad quodvis tempus quam facillime calculare poteris. Igitur eme, lege, fruere. Между многими, впрочемъ краткими историческими указаніями по тѣмъ или другимъ астрономическимъ вопросамъ выдѣляется особенно глава II книги 3, озаглавленная такъ: Historia observationum comprobantium inaequalem aequinoctium conversionumque precessionem, въ которой систематически и съ достаточною подробностію изложена исторія наблюденій, относящихся къ предваренію равноденствій. Въ библіографическомъ отношеніи указанное здѣсь первое изданіе безсмертнаго творенія Коперника считается рѣдкостію и очень цѣнится. Имя *Коперника* (1473—1543) кому не извѣстно?

Hieronymi Cardani praestantissimi mathematici, philosophi, ac medici Artis Magnæ, sive de regulis algebraicis Lib. unus. Norimbergae 1545 in 4°.

Извѣстное сочиненіе Кардана по алгебрѣ, въ которомъ изложено рѣшеніе уравненій третьей и четвертой степени. Историческія свѣдѣнія также какъ и въ указанномъ выше сочиненіи Коперника встрѣчаются часто, но обыкновенно весьма

отрывочны. Въ началѣ первой главы излагается краткій очеркъ исторіи алгебры такъ: Haec ars olim à Mahomete, Mosis Arabis filio initium sumpsit. Etenim hujus rei locuples testis Leonartus Pisauriensis est. Reliquit autem capitula quatuor, cum suis demonstrationibus, quas nos locis suis asscribemus etc. Интересны также указанія относительно исторіи рѣшенія уравненія третьей степени, изложенныя въ началѣ одиннадцатой главы. Въ библіографическомъ отношеніи сочиненіе Кардана считается довольно рѣдкимъ и цѣннымъ. Крайне характерно принятое въ немъ алгебраическое обозначеніе. Имя *Кардана* (1501 — 1576) до сихъ поръ связано съ формулой рѣшенія уравненія третьей степени [30]).

Какъ уже и выше замѣчено, можно было бы назвать значительное число сочиненій съ подобными историческими указаніями. Тѣмъ не менѣе исторія математики, какъ самостоятельная отрасль знанія, начинаетъ выдѣляться лишь около половины XVI столѣтія [31]). Въ 1548 г. напечатана относящаяся къ этому предмету рѣчь *Gambaro*, Oratio claricini de laudibus et utilitatibus Arithmeticae, Bononiae 1548, которая впрочемъ не была въ моемъ распоряженіи. Въ тоже время появляются сочиненія:

Lilii Gregorii Gyraldi Ferrariensis suarum quarundam annotationum Dialogismi XXX. Item Laurentij Frizzolij Solia-

---

[30]) Оба приведенныя въ текстѣ сочиненія напечатаны въ Нюрембергѣ у Johan. Petreius'а и могутъ быть отнесены къ превосходнымъ образцамъ типографскаго искуства XVI столѣтія. Вообще типографія Johan. Petreius'а, основанная вѣроятно еще Regiomontanus'омъ, занималась въ значительной мѣрѣ печатаніемъ сочиненій математическаго содержанія и отличалась превосходнымъ ихъ выполненіемъ. Кромѣ вышеописанныхъ сочиненій Коперника и Кардана изъ нея вышло много другихъ не менѣе замѣчательныхъ въ исторіи науки, какъ напримѣръ: Algorithmus demonstratus 1534, Arithmetica integra Authore Michaele Stifelio 1544 и др.

[31]) Хотя еще *Frobesius* (Historica et dogmatica ad Mathesin introductio etc. Helmstaedt 1750 p. 67), а за нимъ *Nesselmann* (Die Algebra der Griechen, p. 8) и указываютъ на существованіе рукописнаго сочиненія начала XVI столѣтія: Andreae striborii libellus de auctoribus mathematicis, но ни самаго сочиненія, ни его описанія мнѣ встрѣтить не пришлось.

nensis Dialogismus unicus de ipsius Lilij vita et operibus. Venetiis 1553 in 8°.

Съ точки зрѣнія исторіи математики въ этомъ собраніи интересны: *Dialogismus Secundus* de manus et digitorum nominibus dèq; numerandi per eos antiquorum ratione и еще болѣе *Dialogismus tertius* ad Baptistam Lucarínum fr. filium optimae spei ac indolis puerum, de notis et figuris numerorum, quibus antiqui Latini ac Graeci utebantur. Въ библіографическомъ отношеніи книга считается довольно рѣдкою и цѣнною. Имя *Ciraldi* (1478—1552) въ свое время пользовалось въ Италіи значительною извѣстностію.

Joachimus Camerarius Pabenpergensis. De Graecis Latinisque numerorum notis: et praeterea Sarracenicis seu Inndicis, cum indicatione elementorum eius, quam Logisticen graeci nominant (quae est methodus conficiendarum Rationum) et vocabulorum artis interpretatione et alijs quibusdam ad hanc pertinentibus[32]). Norimbergae 1557 in 16°.

Монографія историческо-описательнаго содержанія, замѣчательная по ясности многихъ изъ высказанныхъ соображеній. Въ библіографическомъ отношеніи является рѣдкостію и цѣнится. Имя Camerarius'а (1500 — 1574) не пользуется особой извѣстностію.

Въ томъ-же 1557 году вышла по тому-же предмету рѣдкая книга: *Medici* fra Sisto. De Latinis numerorum notis, Venetiis 1557 in 4, которой не было въ моемъ распоряженіи.

Въ началѣ первой половины XVI столѣтія появляется первое сочиненіе, имѣющее цѣлію изложеніе общей исторіи математики—именно:

P. Rami professoris regii prooemium mathematicum. Parisiis 1567 in 12°.

---

[32]) У *Kästner*'а (Geschiche der Mathematik T. I p. 134) приведенное заглавіе указаннаго сочиненія Camerarius'а разнится отъ имѣющагося въ моемъ распоряженіи прекрасно сохранившагося подлиннаго экземпляра.

Сочиненіе Ramus'а представляетъ въ значительной мѣрѣ не столько исторію математики, сколько современное ему ея состояніе, которое онъ наблюдалъ во время своихъ неоднократныхъ и продолжительныхъ путешествій по Европѣ. Свѣдѣнія эти для насъ являются особенно цѣнными, какъ собранныя непосредственно однимъ изъ просвѣщеннѣйшихъ лицъ своего времени. По поводу состоянія математики въ Россіи Ramus приводитъ слѣдующій разсказъ (стр. 291 и 292): Christianus rex daniae, à Caesare moscovitarum pacem pro livonia impetrare cupiens misit argenteum αυτόματον caelestium motuum affabrè atque artificiosé factum cum aliis muneribus: caetera quidem munera Moscovita accepit: αυτόματον veró cùm didicisset caelestium motuum organum esse, contumeliosé derisum Dano remisit, inquiens ipsum de caelo stulté solicitum esse, cúm de terra inter ipsos armis certaretur etc. Въ библіографическомъ отношеніи сочиненіе Ramus'а не считается ни рѣдкимъ, ни цѣннымъ, не смотря на прекрасную печать и бумагу. Имя Ramus'а (1515—1572) весьма извѣстно; подробныя свѣдѣнія о его дѣятельности, какъ профессора математики находятся у Sedillot [33]). Waddington посвятилъ ему обширное сочиненіе [34]).

Изложенное въ только-что указанномъ сочиненіи Ramus'а воспроизводится буквально въ другомъ изданіи:

P. Rami scholarum mathematicarum libri unus et triginta. Basileae 1569 in 4°.

Въ этомъ сочиненіи Ramus'а исторія математики занимаетъ первыя три книги. Въ библіографическомъ отношеніи это изданіе точно также не считается ни рѣдкимъ, ни цѣннымъ

---

[33]) *Sedillot*. Les professeurs des Mathematiques et de Physique générale au college de France. Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche T. II 1869 p. 343 et T. III 1870 p. 107.

[34]) *Waddington*, charles. Ramus (Pierre de la Ramée), sa vie, ses écrits et ses opinions. Paris 1855 in 8° de 480 pages.

и должно быть. поставлено ниже предыдущаго съ точки зрѣнія типографскаго исполненія. Встрѣчаются указанія на болѣе раннее изданіе этого сочиненія, именно Frankfurt 1559 г.[35]), но мнѣ видѣть его не пришлось. Предисловіе же къ нему, по указанію Rogg'a[36]), было издано на французскомъ языкѣ въ 1566 г.

Garzoni Tommaso. La piazza universale di tutte le professioni del mondo. Venezia 1585 in 4°.

Сочиненіе Garzoni, выдержавшее впослѣдствіи множество изданій, содержитъ значительное количество свѣдѣній по исторіи ариѳметики, алгебры и пр. Въ библіографическомъ отношеніи особой рѣдкости не представляетъ и не слишкомъ цѣнится. Имя *Garzoni* (1549—1589) было очень извѣстно въ Италіи въ концѣ XVI и въ XVII столѣтіи.

Iosephus Blancanus Bononiensis. Aristotelis lóca mathematica ex universis ipsius Operibus collecta et explicata. Accessere de natura mathematicarum scientiarum tractatio; atque Clarorum Mathematicorum Chronologia. Bononiae 1615 in 4°.

Сочиненіе вполнѣ отличающееся отъ произведенія Ramus'a, обращающее, согласно самому заглавію своему, болѣе вниманія на хронологію въ исторіи математики. Вѣроятно это подало поводъ Nesselmann'y сказать, что Blancanus, Vossius и Dechales die Arbeit von Ramus wenig oder nicht benützt zu haben scheinen[37]). Въ библіографическомъ отношеніи сочиненіе Blancanus'a не считается ни рѣдкимъ, ни цѣннымъ. Имя Blancanus'a (Biancani 1566—1624) мало извѣстно.

За сочиненіемъ Blancanus'a въ хронологическомъ порядкѣ слѣдуетъ по указанію Frobesius'a[38]), Rogg'a[39]) и Nessel-

---

[35]) *Rogg.* Bibliotheca mathematica. Tübingen 1838 p. 248 а также *Nesselmann* ibid p. 8.

[36]) *Rogg.* ibid. p. 248.

[37]) *Nesselmann*, ibid. 9.

[38]) *Frobesius.* ibid. p. 67.

[39]) *Rogg.* ibid. p. 261.

mann'a[40]) изданіе: *Hugonis Sempillii* de disciplinis mathematicis libri XII. Antverpiae 1634 in fol., но сочиненіе это въ моемъ распоряженіи не было.

Упомянутый выше обычай ученыхъ XVI столѣтія приводить въ своихъ сочиненіяхъ историческія указанія не переставалъ существовать и въ XVII столѣтіи, не смотря на выдѣленіе исторіи математики, какъ самостоятельной отрасли знанія. Приэтомъ самыя указанія сдѣлались болѣе подробными и систематичными. Какъ примѣръ можно назвать сочиненія Joannis de Luneschlos, Tacqueti и Wallis, изъ которыхъ два послѣдніе указаны у Nesselmann'a и у Eneström'a, какъ самостоятельныя источники по исторіи математики, а первое у нихъ вовсе не упоминается.

Joannis de Luneschlos e montium salinga Thesaurus Mathematum reseratus per algebram novam tam speciebus quam numeris Declaratam et Demonstratam cui praefixa universae Philosophiae Mathematicarum in primis disciplinarum synopsis. Patavii 1646 in 4°.

Длинное заглавіе это на первой страницѣ замѣнено слѣдующимъ: Joannis de Luneschlos algebra nova. Частію въ предисловіи, частію въ synopsis disciplinarum mathematicarum, частію наконецъ въ началѣ первой книги и далѣе находится обиліе собственныхъ именъ, относящихся къ исторіи алгебры и расположенныхъ безъ соблюденія строгаго порядка. Самое сочиненіе algebra nova интересно, какъ современное переходу алгебраическаго обозначенія изъ одного періода въ другой. Въ библіографическомъ отношеніи algebra nova не представляетъ рѣдкости и особой цѣнности. Имя Joannis de Luneschlos очень мало извѣстно.

Gerardi Joannis Vossii de Quatvor artibus popularibus de philologia et scientiis mathematicis cui operi subjungitur

---

[40]) *Nesselmann*. ibid. p. 10.

chronologia mathematicorum libri tres. Amstelaedami 1650 in 4°.

Второе изданіе этого сочиненія произведено въ 1660 г. и ничѣмъ отъ перваго не отличается. Nesselmann[41]) указываетъ только это второе изданіе, а отъ перваго лишь отмѣчаетъ математическую хронологію. Тѣмъ не менѣе въ моемъ распоряженіи находится полный экземпляръ и перваго изданія, Сочиненіе Vossius'а главнымъ образомъ обращаетъ вниманіе на хронологію и затѣмъ на библіографію математики, съ какой стороны является достаточно интереснымъ. Въ томъ-же духѣ изложена въ немъ исторія музыки, гимнастики, филологіи и пр. Относительно математической хронологіи замѣтно вліяніе указаннаго выше сочиненія Blancanus'а, хотя Vossius по мѣрѣ возможности старается его исправить (напр. стр. 180 по поводу времени жизни Рожера Бакона и пр.). Въ библіографическомъ отношеніи книга Vossius'а не представляетъ ни рѣдкости, ни цѣнности. Имя Vossius'а (1577—1649) не слишкомъ извѣстно.

A. Tacqueti. Elementa Euclidea Geometriae planae ac solidae; quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata. Antwerpiae 1654[42]) in 8°.

Въ моемъ распоряженіи находится этого сочиненія изданіе 1725 г., въ которомъ до изложенія самаго предмета помѣщенъ краткій очеркъ исторіи математики подъ заглавіемъ: historica narratio de ortu et progressu Matheseos. Въ библіографическомъ отношеніи сочиненіе Tacquet'а, въ особенности въ послѣдующихъ изданіяхъ, не считается рѣдкостію и не цѣ-

---

[41]) *Nesselmann*. ibid. p. 10.

[42]) У *Frobesius*'а ibid. p. 74, а затѣмъ у *Nesselmann*'а ibid. p. 10 указано лишь второе изданіе сочиненія Tacquet, произведенное въ 1665 года. Первое изданіе 1654 г. указано у *Poggendorff*'а (Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. Leipzig 1863. t. II p. 1064).

нится. Имя Tacquet (1612—1660) въ прежнее время было болѣе извѣстнымъ.

Hieronymus Vitalis. Lexicon Mathematicum Astronomicum Geometricum. Parisiis 1668 in 8°.

Лексиконъ Vitalis'а, расположенный въ алфавитномъ порядкѣ объясняемыхъ словъ, содержитъ очень много свѣдѣній по исторіи математики. По указанію Wolff'а [43]) первый математическій словарь принадлежитъ Dasypodius'у и вышелъ въ 1573 году [44]), но видѣть его мнѣ не пришлось. По времени выхода лексиконъ Vitalis'а считаютъ вторымъ [45]). Въ библіографическомъ отношеніи сочиненіе Vitalis'а не считается ни рѣдкимъ, ни цѣннымъ. Имя Vitalis'а (1624—1698) мало извѣстно.

Beveregium Guilielm. Institutionum chronologicarum libri II. Unà cum totidem arithmetices chronologicae libellis. Londini 1669 in 4°.

По содержанію своему сочиненіе Beveregium'а не соотвѣтствуетъ приведенному здѣсь его заглавію, такъ какъ вообще въ разсматривое время слово хронологія имѣло другое значеніе въ сравненіи съ тѣмъ, какое придается ему теперь [46]). Тѣмъ не менѣе сочиненіе это очень интересно съ точки зрѣнія историко-описательныхъ свѣдѣній по вопросу объ употребляемыхъ различными народами цыфровыхъ знаковъ. Кромѣ того изложеніе ариѳметическихъ дѣйствій и въ особенности указанная

---

43) *Wolff*. Elementa matheseos universae. Tomus V. Hafae Magdeburgicae 1769. p. 12.

44) *Dasypodii* Conr., λεξικον seu dictionarium mathematicum, in quo definitiones et divisiones continentur scientiarum, mathematicarum, arithmet., logistic., geometriæ, geodesiæ, astronomiæ, harmoniæ. Graece et lat. Argent. 1583 in 8°. (*Rogg* ibid. p. 184).

45) *Wolff* ibid. p. 12.

46) Въ XVI и XVII столѣтіяхъ значеніе слова хронологія выражалось такъ: Chronologia est ars tempora recte distinguendi. *Beveregium* ibid. p. 1. Въ концѣ XVII столѣтія замѣчается уже переходъ къ существующему теперь значенію. *Ozanam* (Dictionnaire mathematique, Paris 1691 p. 192) опредѣляетъ его такъ: la science de conter par le mouvement des Astres les temps par rapport à l'Histoire se nomme *Chronologie*.

въ прибавленіи теорія отысканія наименьшаго кратнаго въ общей формѣ, на символахъ, достойны вниманія. Въ библіографическомъ отношеніи книга Beveregium'а не считается особой рѣдкостію и не цѣнится, одинаково, какъ первое изданіе 1669 г., такъ и второе 1705 г. Имя Beveregium'а (1637—1708) въ математикѣ мало извѣстно: онъ былъ придворнымъ проповѣдникомъ у англійскихъ королевъ Маріи и затѣмъ Анны, а послѣ епископомъ St-Asaph[47]).

Claudiis Francisci Milliet Dechalles cursus seu mundus mathematicus, tribus tomis universam mathesin complectens. Lugduni 1674 in fol.

Первое указанное здѣсь изданіе состоитъ изъ трехъ томовъ[48]), а второе, сдѣланное Varcin'омъ въ 1690 году, изъ четырехъ. Еще во второй половинѣ XVI столѣтія въ виду быстраго подъ вліяніемъ книгопечатанія развитія математическихъ знаній для всесторонняго съ ними знакомства встрѣтилась необходимость издавать полное ихъ собраніе. Первое такое собраніе было издано Dasypodius'омъ въ 1567—1570 гг. въ двухъ томахъ[49]) на греческомъ и латинскомъ языкахъ совмѣстно. Первый томъ этого собранія имѣлъ впослѣдствіи еще два изданія—одно 1593 года[50]) и другое 1596 года. Второе гораздо болѣе полное и обстоятельное изданіе такого собранія было сдѣлано Herigone'омъ въ 1634—1637 въ пяти томахъ на двухъ языкахъ: на французскомъ и латинскомъ[51]). Сочине-

---

[47]) *Chalmers*. The general Biographical Dictionary. New edition 1812, T. II.

[48]) *Nesselmann*, ibid. p. 12, неправильно указалъ четыре тома и перваго изданія. *Kästner*, ibid. p. 21, зналъ лишь второе изданіе 1690 г.

[49]) *Dasypodii* Conr. Institutionum volumen I mathematicum. Prima et simplicissima mathemat. disciplinarum principia complectens: Geometriæ, Logisticæ. Ast. Geograph. Argent. 1567 in 8°. Institutionum volumen II mathematicum complectens etc. Argent. 1570 in 8°.

[50]) Въ моемъ распоряженіи было именно это изданіе in 12° на одномъ латинскомъ языкѣ.

[51]) *Pierre Herigone* Cursus mathematicus, nova, brevi ex clara methodo demonstratus V Tomi, Paris 1634—1637 in 8°. *Wolff*. ibid. T. V. p. 5, указы-

ніе Herigone'а было принято благосклонно, такъ какъ уже въ 1644 году было начато печатаніемъ второе изданіе, выпущенное въ шести томахъ. Слѣдующее собраніе математическихъ наукъ было издано Schottus'омъ въ 1661 году на одномъ латинскомъ языкѣ in folio [52]). Послѣ Schottus'а вышло приведенное выше первое изданіе Milliet Dechales'а въ 1674 г. Въ сочиненіи Dasypodius'а почти вовсе не встрѣчается историческихъ указаній—оно занимается исключительно изложеніемъ самаго предмета. Въ сочиненіи Herigone'а уже отъ времени до времени появляются отрывочныя историческія свѣдѣнія, которыя въ изданіи Schottus'а дѣлаются болѣе подробными и систематичными, хотя все таки приводятся въ изложеніи самаго предмета. Milliet Dechales первый счелъ необходимымъ ихъ выдѣлить въ самостоятельный Tractatus prooemialis de progressu matheseos et illustribus mathematicis (Tom. I). Послѣдующія изданія такихъ собраній: Moore'а въ 1681 году [53]), Prestet'а въ 1689 году [54]), Leyborn'а въ 1690 году [55]), Graaf'а въ 1694 году [56]), Ozanam'а въ 1697 году [57]) и много другихъ въ теченіи XVIII столѣтія, обыкновенно содержатъ болѣе или менѣе подробныя историческія указанія. О нѣкоторыхъ изъ этихъ изданій, въ которыхъ находятся болѣе подробныя

ваетъ лишь второе изданіе Herigone 1644 года. Въ моемъ распоряженіи находится первое изданіе сочиненія Herigone'а 1634 г.

[52]) *Gasparis Schotti* cursus mathematicus, sive absoluta omnium mathematicarum disciplinarum encyclopedia in libros XXVIII digesta. Herbipoli 1661 in fol. *Wolff* ibid. Tom. V p. 6, неправильно указалъ годъ изданія этого сочиненія 1662.

[53]) *Moore*. A new systeme of Mathematiks. 2 vol. London 1681 in 4°.

[54]) *Jean Prestet*. Nouveaux elements des Mathematiques ou principes generaux de toutes les sciences, qui ont les grandeurs pour objet. 2 vol. Paris 1689 in 4°. Въ моемъ распоряженіи было лишь это второе изданіе.

[55]) *Wilhelm Leyborn*. Mathematical sciences in Nine books. London 1690 in fol.

[56]) *Abraham de Graaf*. De Geheele Mathesis of Wiskonst Herstel in zyn natuurlijke gedaante. Amsterdam 1694 in 4°. Первое изданіе этого сочиненія по указанію Bierens de Haan (Bibliographie Neerlandaise, Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, Tomo XIV 1881 p. 625) вышло въ 1676 г.

[57]) *Ozanam*. Cours de mathématiques. 4 vol. Paris 1697 in 8°.

историческія свѣдѣнія, будетъ сказано ниже. Въ библіографическомъ отношеніи сочиненіе Milliet Dechales'a, равно какъ и большая часть изъ вышеуказанныхъ, не считаются рѣдкими и цѣнными. Имя Milliet Dechales'a (1621 — 1678), какъ и почти всѣ остальныя, за немногими исключеніями, мало извѣстны.

Въ 1683 году издано относящееся къ исторіи математики сочиненіе: *Megerlinus*. Tabula mathematico-historica. Basileae 1683 in 4°, которое не было въ моемъ распоряженіи.

I. Wallis treatise of Algebra both historical and practical with some additional treatises. London 1685 in fol.[58])

---

[58]) *Poggendorff*. (Biographisch-litterariches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. Leipzig 1863. Tom. II p. 1253) указываетъ на первое изданіе алгебры Валлиса подъ тѣмъ же заглавіемъ, вышедшее въ 1673 г. Но это едва ли вѣрно по слѣдующимъ причинамъ. Въ предисловіи къ латинскому изданію своей алгебры, помѣщенному во второмъ томѣ его Opera mathematica 1693 (стр. 1), Валлисъ говоритъ: Sub finem meae *Matheseos Universalis*, seu operis *Arithmetici*, anno 1657 ineunte editi, insinuaveram, in animo mihi tunc esse alium propediem edere de *Algebra* seu *Analytica* tractatum: sed alia intervenerunt negotia, quo factum est ne id statim fieret. Hujus ego quasi-promissi aliquoties postulatus, hujusmodi tractatum scripseram, miseramque *Londinum* Anno 1676 prelo subjiciendum. Cum vero perendinatum adhuc fuerit aliquandiu, (interim aliquanto auctum), anno tandem 1683 prelo subjectum est; annoque sequente 1684, opus integrum absolverant operae, cum variis subjunctis Appendicibus, prout in editione Anglicana comparet; cui Bibliopolis (pro more suo) visum est adscribere (mox ineuntem) Annum 1685. Изъ этого очевидно, что алгебра Wallis'a не была первоначально издана въ 1673 г. Кромѣ того въ самомъ заглавіи ея латинскаго изданія 1693 г. сказано: De Algebra tractatus... Anno 1685 Anglice editus; nunc auctus latine. Съ другой стороны изданіе 1673 г. не указано въ современной ему математической библіографіи Beughem'a (Bibliographia Mathematica, Amstelodami 1688). У Rogg'a и многихъ другихъ, особенно у соотечественника Wallis'y извѣстнаго знатока математической литературы De Morgan'a (Arithmetical Books, London 1847 на стр. 106) указано лишь изданіе 1685 года. Въ 1673 году въ Лондонѣ вышла обширная алгебра: *Kersey*, The element of that Mathematical Art commonly called Algebra, London 1673 in fol, содержащая историческія указанія и совсѣмъ не названная у Poggendorff'a

Одновременно съ вышесказаннымъ слѣдуетъ замѣтить, что Poppe (Geschichte der Mathematik, Tübingen 1828 p. 576), а за нимъ Rogg (ibid. 553) едва ли правильно называютъ еще латинское изданіе алгебры Валлиса 1685 г., такъ какъ въ цитируемомъ выше предисловіи къ латинскому изданію 1693 г. сказано, что переводъ на латинскій языкъ сдѣланъ лишь въ 1692 г.

Въ моемъ распоряженіи было латинское изданіе этого крайне интереснаго и важнаго въ исторіи науки произведенія, помѣщенное во второмъ томѣ Wallisii opera mathematica, Oxoniae 1693 in fol. подъ заглавіемъ: De Algebra Tractatus; Historicus et Practicus. Алгебра Wallis'а пользуется столь громкой извѣстностію[59]), что нѣтъ надобности о ней здѣсь распространяться: достаточно замѣтить, что по глубинѣ мысли и систематичности изложенія это сочиненіе должно быть поставлено въ ряду лучшихъ произведеній математической литературы, хотя въ тоже время нельзя не согласиться съ Prestet'омъ[60]), Nesselmann'омъ[61]) и др., что въ немъ отчасти замѣтно вліяніе патріотизма (особенно по вопросу о Harriot'ѣ и частію объ Oughtred'ѣ). Въ библіографическомъ отношеніи алгебра Wallis'а 1685 считается очень рѣдкою и высоко цѣнится. Тоже и его Opera mathematica довольно рѣдки и цѣнятся дорого. Имя Валлиса (1616—1703) весьма извѣстно.

Cornelii à Beughem Emb. Bibliographia mathematica et artificiosa novissima perpetuó continnanda seu conspectus primus. Amstelodami 1688 in 12°.

Хотя частію еще Vossius[62]) а за нимъ Milliet Dechales[63]) изложеніе исторіи математики въ значительной мѣрѣ, въ особенности Milliet Dechales производили въ формѣ библіографіи, тѣмъ не менѣе, сколько извѣстно, первое спеціальное сочиненіе, посвященное исключительно этому предмету, было Beughem'а. Оно содержитъ указанія на значительное число вышедшихъ въ Европѣ по математикѣ книгъ впрочемъ за короткій періодъ времени, съ

---

59) Крайне странно, что въ такомъ сочиненіи, какъ *Matthiessen*, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig 1878, въ пространномъ библіографическомъ указателѣ сочиненій по алгебрѣ, приложенномъ въ концѣ (стран. 964—1001 включительно), алгебра Валлиса вовсе не названа.

60) *Prestet* ibid. Tome II, preface.

61) *Nesselmann* ibid. p. 11.

62) *Vossius.* De quatuor artibus etc.

63) *Milliet Dechales* cursus seu mundus mathematicus.

1651 по 1688 г. включительно, на греческомъ, латинскомъ, французскомъ, итальянскомъ, испанскомъ, англійскомъ, голландскомъ, нѣмецкомъ и даже восточныхъ языкахъ. Въ библіографическомъ отношеніи сочиненіе Beughem'а не считается особенно рѣдкимъ[64]) и цѣннымъ. Имя Beughem'а весьма мало извѣстно.

Ozanam. Dictionnaire mathematique ou idée generale des mathematiques. Paris 1691 in 4°.

Словарь Озанама содержитъ много историческихъ указаній и расположенъ не по алфавиту, а по наукамъ. Въ библіографическомъ отношеніи книга Ozanam'а не считается ни рѣдкою, ни цѣнною. Имя Ozanam'а (1640—1717) пользовалось въ свое время извѣстностію.

Въ началѣ XVIII столѣтія въ Германіи вышли почти одновременно слѣдующія сочиненія по исторіи математики: *Gröningii*, J., historia cycloidis qua genesis et proprietates lineae cycloidalis praecipuae secundum ejus infantiam adolescentiam et juventutem ordine chronologico recensentur nec non an primus ejusdem inventor *Galilaeus* et Demonstrator Torricellius fuerit contra *Pascalium* aliosque Galliae geometras discutitur perscripta ad ill. et celeberr. Polyhistorem *Dn. Ant. Magliabechium*. Accedunt *Ch. Hugenii* annotata posthuma in *Js. Newtoni* philosophiae naturalis principia mathematica, Hamburgii 1701 in 8° и двѣ диссертаціи: J. A. *Krebs*. Dissertatio de originibus et antiquitatibus mathematicis. Jenae 1702 in 4° и M. B. W. *Marperger*. Dissertatio historico-mathematica de fatis matheseos. Altdorf. 1702 in 4°, о которыхъ Nesselmann (ibid. p. 13) отозвался

---

[64]) Въ столь полной математической библіографіи Нидерландовъ, какою является *Bierens de Haan* (Bibliographie Néerlandaise, Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche T. XIV, XV и XVI 1881, 1882 и 1883) сочиненіе Beughem'а вовсе не указано и я сомнѣвался въ его существованіи до тѣхъ поръ, пока не пріобрѣлъ прекрасно сохранившійся подлинный экземпляръ.

такъ: Zwei unbedeutende Dissertationen, die nur schon Gesagtes wiederholen. Всѣ эти три сочиненія въ моемъ распоряженіи не были.

D. Edwardi Bernardi D. Roberti Huntingtoni Episcopi Rapotensis Epistolae: et Veterum Mathematicorum, Graecorum, Latinorum, et Arabum, Synopsis. Londini 1704 in 8°.

Сочиненіе Bernard'a библіографическаго характера представляется интереснымъ по своимъ указаніямъ относительно извѣстныхъ въ то время математическихъ рукописей, а также перечисленіемъ выдающихся изданій, главнымъ образомъ эпохи возрожденія, произведеній древнихъ математиковъ. Въ библіографическомъ отношеніи не считается ни рѣдкимъ, ни цѣннымъ. Имя Bernard'a (1638—1697) не пользуется особой извѣстностію.

Bernardino Baldi da Urbino. Chronica de matematici overo epitome dell'istoria delle vite loro. In Urbino 1707.

Имя Bernardino Baldi (1553—1617) должно быть поставлено въ числѣ первыхъ, научнымъ образомъ взглянувшихъ на исторію математики и посвятившихъ себя ея разработкѣ. Обширному сочиненію по исторіи математики, которое оставилъ Bernardino Baldi, до сихъ поръ не суждено было появиться въ печати. Рукопись этого сочиненія по указанію Narducci [65]) принадлежитъ князю Boncompagni знаменитому ученому и издателю Bulletino di bibliografia e di sroria delle scienze matematiche e fisiche. Князь Boncompagni до сихъ поръ обнародовалъ въ своемъ журналѣ лишь отрывки изъ сочиненій Baldi [66]) съ интересными къ нимъ комментаріями. Указанное здѣсь сочиненіе Bernardino Baldi, изданное 90 лѣтъ спустя

---

[65]) *Narducci* Enrico. Catalogo di manoscritti ora posseduti da D. Baldassarre Boncompagni. Roma 1862 p. 60.

[66]) Bulletino di bibliographia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Tomo I 1868 Vita di Giovanni Eligeiro, Tomo V 1872 Vite di matematici arabi, Tomo XII 1879 Vite inedite di tre matematici (Giovanni Dank di Sassonia, Giovanni de Lineriis e fra Luca Pacioli da Borgo San Sepolcro).

послѣ его смерти, представляетъ краткій конспектъ его упомянутаго выше обширнаго сочиненія Vite dei Matematici, которое, по выраженію издателя хроники, представляетъ le gravissime difficoltà dell'impresa вслѣдствіе многочисленныхъ указаній на различныхъ языкахъ, которыхъ Baldi зналъ много и въ совершенствѣ [67]). Съ исторической точки зрѣнія прекрасное изданіе хроники Baldi представляетъ большой интересъ и въ библіографическомъ отношеніи будучи не слишкомъ рѣдкимъ, тѣмъ не менѣе цѣнится.

Въ періодъ времени отъ 1707 г. по 1740 г. т. е. отъ напечатанія указанной выше хроники Bernardino Baldi до изданія лексикона Stammetz'а, о которомъ будетъ сказано ниже, вышло нѣсколько работъ, относящихся къ исторіи математики именно [68]). *Wolfii* programma de incrementis quae res mathematicae intra unius Saeculi ambitum cepere. Halae. 1707 in 4°. H. C. Historisch algebraischer nützlicher Zeitvertreib, bestehend in 100 sehr raren und seltsamen. Geschichterzählungen. Lübeck 1714. in 8°. J. R. *Fäsch* historische und methodische Einleitung in die gesammten mathematischen Wissenschaften, Dresden 1716. in 4°. *Steinbrück*, de magia mathematica s. algebra commentatio, praeter ortum et progressum artis elegantissimae usus quoque ejus exhibens. Dresden 1719 in 4°. J. G. *Doppelmaier*, historische Nachricht von den Nürnberger Mathematicis und Künstlern, welche von dreyen Seculis her durch ihre Schriften und Kunstbemühungen die Mathematik und mehre Künste trefflich befördert. 2 Theile. Nürnberg 1730 in fol. *Büchner*, Entwurf einer Historie der Rechenkunst. Wal-

---

[67]) Въ предисловіи къ Cronica de matematici, озаглавленномъ, Lo stampatore a chi legge, p. 2, сказано:... perfetta cognizione, che aveva, di molte lingue. По указанію проф. *Ващенко-Захарченко* (Исторія математики. Томъ I, стр. 114—115) Baldi зналъ въ совершенствѣ 16 языковъ.

[68]) *Nesselmann* ibid. p. 15. 16. *Rogg*, ibid, p. 506.

denburg 1739 in 8°. Изъ этихъ сочиненій не было ни одного въ моемъ распоряженіи.

Stammetz. Groot en Volledig Woordenboek der Wiskunde. Overzien door Willem la Bordus. Amsterdam 1740 in 4°.

Математическій лексиконъ, содержащій въ значительной мѣрѣ историческія указанія. Въ библіографическомъ отношеніи довольно рѣдокъ и цѣнится ровно какъ и второе изданіе 1772 года. Имя *Stammetz*'а мало извѣстно.

L'Abbé de Gua. Recherches du nombre de racines réelles ou imaginaires, réelles positives ou réelles negatives, qui peuvent se trouver dans les équations de tous les degrés. Memoires de l'Academie royale des sciences de Paris. Année 1741 p. 435—494 in 4°.

Мемуаръ, помѣщенный въ Memoires de l'Academie des sciences de Paris за 1741 годъ, содержитъ въ первой части историческія указанія, о которыхъ Nesselmann (ibid. p. 16) отозвался такъ: historische Theil dieser Abhandlung ist voller Falsa. Der Verfasser scheint die Geschichte nur aus fremden Berichten auf Treu und Glauben angenommen, nicht aus den Quellen geschöpft zu haben. Такой приговоръ Nesselmann'а болѣе строгъ, чѣмъ справедливъ. Отдѣльныхъ оттисковъ сочиненія Gua-de-Malves мнѣ встрѣтить не пришлось, хотя мемуары парижской академіи за указанное время рѣдкими не считаются. Имя Gua-de-Malves (1714—1785) мало извѣстно.

J. Chr. Heilbronner. Historia matheseos universae a mundo condito ad seculum p. C. n. XVI. precipuorum mathematicorum vitas, dogmata, scripta et manuscripta complexa. Accedit recensio elementorum, compendiorum et operum mathematicorum, atque historia Arithmetices ad nostra tempora. Lipsiae 1742[69]) in 4°.

Это изданіе представляетъ собою переработанное и до-

---

[69]) *Nesselmann* (ibid. p. 16) не точно указываетъ годъ изданія 1741.

полненное сочиненіе Heilbronner'а, вышедшее въ 1739 году на нѣмецкомъ языкѣ подъ заглавіемъ J. C. *Heilbronner*. Versuch einer mathematischen Historie. 1-er Theil, darinnen eine Abhandlung vom Nutzen der Mathematik überhaupt, und die Historie der Rechenkunst enthalten. Frankfurt und Leipzig 1739 [70]). Сочиненіе это, будучи еще въ значительной мѣрѣ библіографическаго характера, тѣмъ не менѣе показываетъ, какіе уже значительные успѣхи сдѣлала исторія математики въ то время [71]). Въ библіографическомъ отношеніи книга Heilbronner'а не считается особенно рѣдкою и хотя цѣнится, но не слишкомъ высоко. Heilbronner (1706—1747) былъ однимъ изъ первыхъ ученыхъ Германіи, посвятившихъ себя изученію исторіи математическихъ наукъ.

Pappiani Alberto. La scienza delle grandezze dimostrata colle principali calcolazioni numeriche, analitiche e geometriche. Firenze 1747 in 4°.

Сочиненіе это представляетъ собраніе математическихъ знаній, подобное названнымъ выше и изданнымъ въ предыдущемъ столѣтіи. Можетъ служить какъ примѣръ того, что существовавшій въ XVII столѣтіи обычай излагать свѣдѣнія по исторіи математики въ энциклопедіяхъ математическихъ знаній не былъ оставленъ и въ XVIII столѣтіи. Въ библіографическомъ отношеніи указанное сочиненіе считается довольно рѣдкимъ, хотя не особенно цѣнится. Имя Pappiani (1709—1790) мало извѣстно.

Joanni Nicolai Frobesii historica et dogmatica ad Mathesin introductio, qua succincta matheseos historia cum ceteris ejusdem praecognitis, nec non systematis mathematici delineatio continentur. Helmstädt 1750 in 4°.

Это сочиненіе Frobesius'а является въ нѣкоторыхъ от-

---

[70]) *Nesselmann* ibid. p. 15. *Kästner*. ibid, Tom. I p. 22.

[71]) *Kästner* (ibid. Tom. I p. 22) считаетъ трудъ Heilbronner'а лишь компиляціей.

ношеніяхъ похожимъ на указанное выше сочиненіе Heilbronner'a, хотя Frobesius начинаетъ исторію матетатики не съ Адама, какъ это дѣлаетъ Heilbronner. Въ библіографическомъ отношеніи приведенное сочиненіе Frobesius'a, равно какъ и другія его произведенія, относящіяся къ исторіи математики, именно: *Frobesii* historica et dogmatica canonici trigonometrici dilucidatio, Helmstädt 1750, *Frobesii* rudimenta biographiae mathematicorum, Helmstädt 1751—1755 не считаются особенно рѣдкими и цѣнными. Имя Frobesius'a (1701—1756) мало извѣстно.

Вслѣдъ за произведеніями Frobesius'a въ хронологическомъ порядкѣ могутъ быть названы слѣдующія сочиненія, которыя впрочемъ не были въ моемъ распоряженіи — именно: *Roveela.* Notificatione a professori matematici d'Europa. Bologna 1750 in f. J. F. *Stockhausen,* historische Anfangsgründe der Mathematik, worinnen der Ursprung Wachsthum, mancherlei Veränderung und heutiger Zustand der Mathematik.... gezeigt wird. Berlin 1752 in 8°. Gründliche Abhandlung von dem Nutzen der Mathematik und der Rechenkunst überhaupt. Frankfurt und Leipzig 1753. *G. W. Kraft*, institutionis Geometriae sublimioris. Tübingen. 1753 (in der Chponologie alter Geometer ein gutes Hülfsmittel, *Nesselmann* ibid p. 18).

Montucla. Histoire des Mathematiques, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; où l'on oxpose le tableau et le developpement des principales decouvertes, les contestations qu'elles ont fait naître, et les principaux traits de la vie des Mathematiciens les plus célebres. 2 vol. Paris 1758 in 4°.

Знаменитое сочиненіе по исторіи математики, впрочемъ болѣе извѣстное по своему второму изданію въ четырехъ томахъ, сдѣланному Лаланомъ въ 1799—1802 подъ заглавіемъ:

Montucla. Histoire des Mathématiques dans laquelle on

rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours, etc. Paris 1799—1802 vol. in 4°.

Сочиненіе Montucla является первымъ научнымъ произведеніемъ по исторіи математики [72]), до сихъ поръ далеко неутратившимъ своего значенія не смотря на сто лѣтъ, прошедшихъ со времени перваго его изданія. Въ библіографическомъ отношеніи какъ первое, такъ и второе изданіе исторіи Монтюкля нельзя считать особой рѣдкостію, такъ какъ часто, особенно второе изданіе, встрѣчаются въ продажѣ. Тѣмъ неменѣе на долю этого второго изданія выпала завидная участь: будучи не рѣдкимъ, встрѣчаясь почти у каждаго антиквара, оно цѣнится очень высоко—до 200 и болѣе франковъ за экземпляръ т. е. болѣе чѣмъ втрое дороже первоначальной своей цѣны (первоначальная цѣна была 60 франковъ). Первое изданіе хотя болѣе рѣдко, но цѣнится не такъ дорого. Имя Монтюкля (1725—1799), какъ писателя по исторіи математики, всѣмъ извѣстно.

Viencentii Riccati et **Hieronymi Saladini** Institutiones analyticae. Tomus I et II in 3 libr. Bononiae 1765—1767.

Указанное сочиненіе приведено какъ примѣръ тому, что установившійся въ предыдущихъ столѣтіяхъ обычай приводить историческія указанія въ сочиненіяхъ по математикѣ продолжалъ существовать и въ XVIII столѣтіи. Помѣщенный въ предисловіи къ сочиненію Riccati и Saladini краткій, но хорошо написанный историческій очеркъ алгебры заслуживаетъ вниманія [73]). Кромѣ того въ предисловіяхъ къ книгамъ второго тома, а частію въ текстѣ находятся историческія указанія. Въ би-

---

[72]) Это было сознано еще его современниками. *Bossut* въ своей Histoire des Mathématiques, Paris 1810 (Discours preliminaire p. XIX), говоритъ: Montucla est le premier, qui ait entrepris d'écrire une histoire complète des mathématiques, suivant un seul et même système qu'il s'est fait.

[73]) Правда встрѣчаются неточности, напр. на 2-ой стр. предисловія (VI стр. по его счету) годъ изданія сочиненій Діофанта Ксиландеромъ указанъ 1576 вмѣсто 1575.

бліографическомъ отношеніи приведенное сочиненіе не считается особой рѣдкостію и не слишкомъ цѣнится. Имя Vincenzo Riccati (1707—1775) извѣстно въ математикѣ, имя же Saladini (1731—1813) менѣе извѣстно.

Savérien Alex. Histoire des progrès de l'esprit humain dans les sciences exactes et dans les arts qui en dependent, savoir, l'arithmetique, l'algèbre, la géometrie, l'astronomie, la gnomonique, la chronologie, la navigation, l'optique, la méchanique, l'hydraulique, l'acoustique et la musique, la geographie, l'architecture etc., avec un abrégé de la vie des auteurs les plus célebres dans ces sciences. Paris 1766 — 1778 4 vol. in 8°.

Появленіе сочиненія Savérien'a послѣ знаменитаго произведенія Монтюкля является вполнѣ непонятнымъ. Въ половинѣ XVIII столѣтія историческія знанія вообще были подвинуты значительно и смѣшеніе XVI столѣтія съ V-мъ, какъ-то дѣлаетъ Savérien, по меньшей мѣрѣ странно. Напримѣръ въ исторіи алгебры (p. 32 etc) Savérien говоритъ: Les ouvrages qu'ils (les Arabes) publierent sur cet art ne sont point venus jusqu'à nous et nous ignorerions la découverte qu'ils en on faite, si *Diophante*, qui vivoit vers le milieu du quatrième siécle, ne nous l'eût appris (sic!).... Son livre est intitulé, *Questions Arithmétiques.* C'est là qu'on voit les progrès que les Arabes y avoient faits jusqu'à ce temps (sic!!).... *Xilandre*, dans le cinquième siècle (sic!!!) traduisit l'ouvrage de Diophante du grec en latin. Ксиландеръ (1532—1576) издалъ латинскій переводъ сочиненій Діофанта, какъ выше указано, въ 1575 г. Et environ vers le huitième siècle un Arabe, nommè *Mohammed ben-Musa*, composa un traité d'Algèbre и т. д. въ томъ же родѣ множество противорѣчій не только истинѣ, но и самому себѣ. Другія сочиненія Savérien какъ то: Histoire critique du calcul des infiniments petits, Paris 1753 in 4°. Dictionnaire universel des mathématiques et de phy-

sique. Paris 1752, 2 vol. in 4° и др. повидимому не заключаютъ такихъ ужасающихъ неправильностей. Въ библіографическомъ отношеніи указанное сочиненіе Savérien довольно рѣдко, хотя не цѣнится. Имя Savérien (1720—1805) имѣетъ нѣкоторую извѣстность по его изслѣдованіямъ, относящимся къ морскимъ наукамъ, тѣмъ не менѣе описанное здѣсь его сочиненіе по исторіи математики переведено на испанскій языкъ подъ заглавіемъ: *Severien.* Historia de los progresos del entendimiento humaño en las ciencias esactas y en las artes que dependen de ellas, á saber; la aritmética, álgebra, geometria, astronomia, gnomónica, chronologia, navegacion, óptica, maquinaria, hidraulica, acuática y música, geografia, arquitectura civil, arquitectura militar, arquitectura naval etc. Traducida al castellano por *Manuel Rubin de Celis.* Un tomo en 4° Madrid 1775 [74]).

Вслѣдъ за произведеніемъ Savérien необходимо указать на сочиненіе *Rossyn*, De Mathematicis Belgarum Ingeniis, Harder 1768 in 4°, котораго въ моемъ распоряженіи не было.

Wolff. Elementa Matheseos universae. 5 vol. Hallae 1769 in 4°.

Приведенное сочиненіе составляетъ одно изъ послѣдующихъ изданій первоначально появившагося въ 1710 г. въ 4-хъ томахъ на нѣмецкомъ языкѣ, затѣмъ въ 1713 и слѣдующихъ гг. на латинскомъ языкѣ, произведенія Wolff'a Matheseos universae. Пятый томъ содержитъ историко-библіографическія указанія, напоминающія отчасти Vossius'a, но болѣе Dechales'a. Указанія эти первоначально появились отдѣльно въ 1707 г., какъ выше приведено, и затѣмъ вошли въ составъ общаго сочиненія. Въ библіографическомъ отношеніи сочиненіе Wolff'a не составляетъ рѣдкости, особенно въ послѣдующихъ изданіяхъ и не цѣнится. Имя Christian'a Wolff'a (1679—1754) пользуется нѣкоторою извѣстностію.

---

74) *Sohncke* Bibliotheca mathematica. Leipzig 1854 p. 59.

Къ тому же разряду историческихъ указаній должны быть отнесены и находящіяся у *Mönnich*'а (1741—1800) въ его Lehrbuch der Mathematik, Berlin 1781, 2 vol. подъ заглавіемъ: Kürze Geschichte der theoretischen Mathematik nach der Ordnung der Hauptstücke im Lerbuche.

Сочиненія *Fontana*, Saggio sopra i progressi matematici di Girolamo Cardano, e Bonaventura Cavalieri, dopo il restablimento delle lettere in occidente. Atti dell' accademia di Siena, tomo VI, 1774. *Barbieri* Matteo. Notizie istoriche dei mattematici e filosofi del regno di Napoli scritte. Napoli 1778. *Santini* Giuseppe Picenorum mathematicorum elogia. Maceratae 1779 in 4°. *Hollenberg*. Nachrichten von dem Leben und den Erfindungen der Mathematiker. Münster 1788 in 8°, *Lemoine*. Traité elementaire des mathematiques, ou principes d'Arithmétique, de Géométrie et d'Algèbre etc., l'histoire des Mathematiques pures et de Geometres les plus célébres. Paris 1789 in 8°, слѣдующія за вышеуказанными въ хронологическомъ порядкѣ, мнѣ видѣть не пришлось, равно какъ и сочиненіе: *J. G. Prändel*. Algebra nebst ihrer litterarischen Geschichte, München 1795 in 8°, которое, будучи не рѣдкимъ въ библіографическомъ отношеніи, тѣмъ не менѣе осталось мнѣ неизвѣстнымъ.

Ludovicus Guilielmus Gilbert. De mathesi prima vel universali seu methaphysice mathematica commentatio prior. Hallae 1794 in 8°.

Диссертація, шестая и послѣдняя глава которой подъ заглавіемъ: Historia litteraria matheseos primae et universalis посвящена изложенію весьма краткаго очерка исторіи математики, не представляющаго ничего особеннаго. Въ библіографическомъ отношеніи диссертація Gilbert'а не считается ни цѣнною, ни рѣдкою. Имя Gilbert'а (1769—1824) мало извѣстно.

Kästner Abraham Gotthelf. Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das

Ende des achtzehnten Jahrhunderts. Göttingen 1796—1800 in 8°.

Сочиненіе Kästner'а представляетъ собою переходную стадію въ развитіи исторіи математики отъ сочиненій библіографическаго характера, какъ то: Milliet Dechales'а, Helbronner'а, Frobesius'а, Wolff'а и др. къ тѣмъ, преставителями которыхъ суть произведенія Ramus'а, Bernardino Baldi, Montucla, Cossali и пр. т. е. къ составляющимъ въ строгомъ смыслѣ исторію математики. Вѣроятно это было причиною тому, что *Nesselmann* (ibid. p. 24 et 25) сочиненіе Kästner'а опредѣляетъ такъ: Ein sonderbares Buch... Mit einem Worte das Buch ist alles Mögliche, nur keine Geschichte der Mathematik. Въ библіографическомъ отношеніи сочиненіе Kästner'а не представляетъ ни рѣдкости, ни цѣнности. Имя Kästner'а (1783—1857) не особенно извѣстно.

Pietro Cossali. Origine, transporto in Italia, primi progressi in essa dell' Algebra. Storia critica di nuove disquisizioni analitiche e metafisiche arricchita di Pietro Cossali. 2 vol. Parma 1797--1799 in 4°.

Роскошное изданіе въ двухъ томахъ in 4°, вышедшее одновременно съ сочиненіемъ Kästner'а и представляющее полную ему противуположность. Знаменитый трудъ Montucla и исторія алгебры Cossali являются первыми научными произведеніями въ области исторіи математики. Въ библіографическомъ отношеніи сочиненіе Cossali не можетъ считаться рѣдкимъ и цѣнится относительно не дорого. Имя Cossali (1748—1815), какъ историка математики, ставится высоко, особенно въ Италіи. Князь Boncompagni въ 1857 году напечаталъ роскошнымъ изданіемъ остальныя сочиненія Cossali, неизданныя при его жизни, подъ заглавіемъ: Scritti inediti del P. D. Pietro Cossali Chierigo regolare teatino publicati da Baldassarre *Boncompagni*. Roma 1857, большой томъ in 4°.

Въ послѣднихъ годахъ XVIII столѣтія вышло слѣдующее

относящееся къ исторіи математики сочиненіе: *Murhard.* System der Elemente der allgemeinen Grössenlehre nach dem Zustande der Wissenschaft am Ende des 18-ten Jahrh., nebst Literatur und Geschichte derselben. Lemgo 1798 in 4⁰ и диссертація Chabaud подъ заглавіемъ: *Chabaud.* Dissertation sur les Mathèmatiques. Notions historique etc. Bordeau 1799, которыхъ видѣть мнѣ не пришлось.

Въ XIX столѣтіи исторія математики, какъ уже и выше было замѣчено, получаетъ обширное развитіе, особенно въ послѣднее время. Кромѣ значительнаго числа трудовъ, обнимающихъ всю область науки, появляется много относящихся къ пей мемуаровъ, посвященныхъ изслѣдованію отдѣльныхъ вопросовъ; перечень такихъ мемуаровъ былъ-бы очень затруднителенъ. Вслѣдствіе этого здѣсь будутъ указаны лишь сочиненія, имѣющія болѣе или менѣе общій характеръ [75]).

Сочиненіе: *Δημήτριος Παναγιώταδος τοῦ Γοβδέλα.* Στοιχεῖα Ἀλγεβρᾶς, δδοῦ Μαθηματικῆς μέρος πρῶτον. Hallae 1806 in 8⁰, вышедшее въ началѣ XIX столѣтія (Rogg ibid. p. 503) и относящееся къ исторіи математики, въ моемъ распоряженіи не было; Nesselmann (ibid. p. 218) приводитъ объ немъ хорошій отзывъ.

Delambre. De l'arithmétique des Grecs. Paris 1807 in 4⁰.

Названный очеркъ изданъ какъ приложеніе къ сдѣланному Peyrard'омъ переводу на французскій языкъ сочиненій Архимеда и относится главнымъ образомъ къ обозначеніямъ чиселъ у Грековъ. Въ библіографическомъ отношеніи переводъ Peyrard'a считается довольно рѣдкимъ и очень цѣннымъ; отдѣльные экземпляры очерка Delambre'a тоже рѣдки и цѣнятся. Имя Delambre'a (1749 — 1822), какъ астронома и историка астрономіи, очень извѣстно.

---

[75]) Въ средѣ указанныхъ выше сочиненій по исторіи математики, вышедшихъ въ предыдущихъ столѣтіяхъ, не названы относящіяся напримѣръ къ исторіи астрономіи и пр., а также нѣкоторые мемуары XVIII столѣтія, имѣющія слишкомъ спеціальный характеръ.

Здѣсь слѣдуетъ упомянуть о вышедшемъ въ Россіи первомъ, сколько мнѣ извѣстно, сочиненіи, относящемся къ исторіи одной изъ наукъ, близко стоящихъ къ математикѣ, именно: *Исторія сокращенная астрономіи; сочиненная профессоромъ математики* **Платономъ Гамалеею.** *С.-ПБ. 1809 in 8⁰.* Въ томъ же 1809 году вышло сочиненіе: *Lüder*, Pythagoras und Hypathia oder die Mathematik der Alten. Leipzig 1809 in 8⁰, котораго видѣть мнѣ не пришлось.

Bossut Charles. Histoire générale des Mathématiques depuis leur origine jusqu'à l'année 1808. 2 vol. Paris 1810 in 8⁰.

По указанію Rogg'а (ibid. p. 173), а за нимъ Nesselmann'а (ibid. p. 27) и Eneström'а (стр. 68) первое изданіе этого сочиненія вышло въ 1802 г. [76]), слѣдовательно одновременно съ его итальянскимъ переводомъ, сдѣланномъ Fontana[77]). Въ концѣ прошедшаго столѣтія и въ началѣ текущаго значеніе исторіи математики настолько выяснилось, что сознана была необходимость появленія труда, носящаго на себѣ популярный характеръ и предназначеннаго не исключительно для спеціалистовъ, а вообще для всѣхъ образованныхъ читателей. Первымъ произведеніемъ въ этомъ родѣ была указанная здѣсь исторія математики Bossut, вызвавшая впослѣдствіи достаточное число подражаній на различныхъ языкахъ. Въ этомъ же заключается причина тому, что сочиненіе Bossut, немедленно было переведено на другіе языки: на итальянскій, какъ выше указано, въ самый годъ изданія, на англійскій въ 1803 г. [78]), на нѣмецкій въ 1804 году [79]). Въ библіографическомъ отношеніи

---

[76]) *Poggendorff* (ibid. p. 249) не указываетъ изданіе 1802 г.

[77]) *Riccardi* Pietro. Biblioteca Matematica italiana dalla origine della stampa ai primi anni del secolo XIX. Modena 1870 — 1880, p. 476, а также *Rogg*, ibid. p. 174.

[78]) *Rogg* ibid. p. 174. Годъ изданія англійскаго перевода, не указанный у *Rogg*'а, приведенъ у *Eneström*'а, Om Matematikens Historia p. 68, выноска 7.

[79]) *Rogg* ibid. p. 173 и 174.

сочиненіе Bossut не считается рѣдкостію и не слишкомъ цѣнится. Имя Bossut (1730—1814) довольно извѣстно.

Edward **Strachey**. Bija Ganita: or the algebra of the Hindus. London (1813) in 4°.

Henry Thomas **Colebrooke**. Algebra with arithmetic and mensuration, from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara. London 1817 in 4°.

Уже въ концѣ прошедшаго столѣтія, но еще болѣе въ началѣ текущаго, англичане, обладатели Индіи, а за ними и другіе [80]), обратили вниманіе на математическую литературу

---

[80]) *Buckner*. De Algebra Indorum. Elbing 1821.

Franchini Pietro. Dissertatio sulla storia matematica dell' antica natione indiana. Atti dell' Accad. Lucchese. T. VI 1830.

Въ послѣднее время о математикѣ индусовъ писали:

Matthiessen. Die Regel vom falschen Satze bei den Indern und Arabern des Mittelalters und eine bemerkenswerthe Anwendung desselben zur directen Auflösung der Quadratischen und kubischen litteralen Gleichungen. Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter der verantwortlichen Redaction von Schlömilch, Kahl und Cantor, t. XV, p. 41 etc. Leipzig 1870.

Zeuthen. Fra Mathematikens Historie. Brahmegupta's Trapez, Tidsskrift for Mathematik. Udgivet af Zeuthen. VI, p. 168, 181 etc. Kjøbenhavn 1876.

Hromádko F. Ukázky z indické arithmetiky obecné řečoné «Lilâvâti» Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky který se zvláštním zřetelem k studujícím rediguje Dr. F. J. Studnička. Ročník V, str. 182. etc. Praha 1876.

Rodet. L'algèbre d'Al-Karizmi et les méthodes indienne et grecque. Journal Asiatique, 7 série, t. XI p. 5. Paris 1878.

Rodet. Sur une méthode d'approximation des racines carrées connue dans l'Inde anterieurement à la conquête d'Alexandre. Bulletin de la société Mathématique de France publié par les secrétaires t. VII p. 98. Paris 1879.

Weissenborn. Das Trapez bei Euclid, Heron und Brahmegupta. Zeitschrift für Mathematik etc. her. von Schlömilch, t. XXIV p. 167. Leipzig 1879.

Rodet. Leçons de calcul d'Aryabhata. Journal Asiatique, 7 serie, t. XIII p. 393. Paris 1879.

Murre. Dos reglas de la aritmética de los Indos. Cronica cientifica revista international de ciencias fundator proprietario y director D. Rafael Roig y Torres, t. III p. 153, 177 etc. Barcelona 1880.

Rodet. Sur la véritable signification de la notation numérique inventée par Aryabhata. Journal Asiatique, 7 serie, t. XVI Paris 1880.

Ващенко-Захарченко. Историческій очеркъ математической литературы Индусовъ. Кіевъ 1881.

Vaněček. Geometrie u Indů. Časopis etc. Roč. X, str. 60. Praha 1881.

Индусовъ. Въ Asiatic Reaserches указаннаго времени Reuben, Burrow, Davis, Colebrooke и др. помѣстили рядъ статей, относящихся къ этому предмету. Но въ началѣ текущаго столѣтія появляются въ отдѣльныхъ самостоятельныхъ изданіяхъ полные переводы выдающихся произведеній индусскихъ математиковъ, указанные въ вышеприведенныхъ заглавіяхъ. Къ этимъ переводамъ присоединены объяснительныя предисловія къ Bija Ganita краткое (стр. 1 — 11), къ переводу же Colebrooke'а пространное (стр. 1 — 84), заключающее въ себѣ много крайне интересныхъ и важныхъ свѣдѣній по исторіи математическихъ знаній вообще. По внѣшнему виду оба указанныя изданія слѣдуетъ причислить къ весьма хорошимъ, причемъ нельзя не отмѣтить одинъ соотвѣтствующій духу времени существенный недостатокъ, о которомъ упомянуто выше, —именно. Въ Bija Ganita лишь въ примѣчаніи Davis'а приведено факсимиле подлинника, а переводъ сдѣланъ помощію существующаго теперь алгебраическаго символизма, не позволяющаго составить ни малѣйшаго понятія о переведенномъ сочиненіи. Въ переводѣ же Colebrooke'а хотя и переданы санскритскія формулы съ возможной близостію къ подлиннику, но факсимиле подлинника вовсе не приведено, что̀ опять таки въ значительной мѣрѣ препятствуетъ пріобрѣтенію точнаго представленія о переводимомъ сочиненіи, въ чемъ именно должна заключаться главная цѣль всякаго перевода. Въ библіографическомъ отношеніи оба названныя сочиненія считаются довольно рѣдкими и цѣнными. Имя Strachey мало извѣстно, имя же Colebrooke'а (1765—1837) пользуется значительной извѣстностію.

Переводъ Лилавати, сдѣланный Тайлоромъ въ 1816 году: Rascara Acharya, Lilavati, translated by J. *Taylor*, Bombay 1816 in 4, въ моемъ распоряженіи не былъ.

Francisco de Borja **Garçâo-Stockler**. Ensaio historico sobre a originem e progressos das mathematicas em portugal. Pariz 1819 in 8°.

Еще въ концѣ XVII столѣтія начинаетъ замѣчаться выдѣленіе исторіи математическихъ наукъ по національностямъ. Уже Wallis, какъ мы видѣли, въ исторіи алгебры отдаетъ преимущество своимъ соотечественникамъ. Упомянутое выше произведеніе Cossali имѣетъ цѣлію изложеніе исторіи алгебры въ Италіи. Къ разряду такого рода сочиненій необходимо отнести прекрасный, живой очеркъ генерала Garção, хотя нельзя не пожалѣть, что въ немъ отведено слишкомъ мало мѣста исторіи математики у мавровъ, населявшихъ Перинейскій полуостровъ, отъ которыхъ беретъ свое начало португальская математика. Между тѣмъ изслѣдованіе этого вопроса на мѣстѣ могло бы оказаться крайне плодотворнымъ для исторіи науки вообще. Книга Garção въ библіографическомъ отношеніи считается рѣдкостію и очень цѣнится. Имя генерала Garção (1759—1829) пользуется въ Португаліи большой извѣстностію не только какъ лица, занимавшаго видное положеніе въ государствѣ, но и какъ выдающагося дѣятеля въ наукѣ [81]).

Franchini Pietro. Saggio sulla storia della matematiche corredato di scelte notizie biografiche. Lucca 1821 in 8°.

Сочиненіе Франкини, назначенное имъ самимъ для юношества (per uso della gioventù), должно быть причислено къ тому же разряду произведеній по исторіи математики, который начатъ былъ описаннымъ выше трудомъ Bossut. По отзывамъ еще современниковъ [82]), исторія Франкини даже со-

---

[81]) Сочиненіе Garção въ Германіи не пользуется извѣстностію. Указанія о немъ нѣтъ ни у *Rogg*'а (Bibliotheca Mathematica. Tübingen 1830), ни у *Nesselmann*'а (Algebra der Griechen. Berlin 1842) въ его пространномъ указателѣ сочиненій, относящихся къ исторіи математики, ни у *Sohncke* (Bibliotheca Mathematica, Leipzig 1854), ни у нѣкоторыхъ другихъ въ перечнѣ сочиненій по исторіи математики.

[82]) *Revue encyclopedique*, ou analyse raisonnée des productions les plus remarquables dans la littérature, les sciences et les arts, par une réunion des membres de l'institut, Mars 1825, p. 753, рецензія Salfi. Прибавленіе отъ редакціи: M. Franchini a donné trop de confiance à l'*Histoire des Mathématiques* par Bossut, ouvrage que ce géomètre composa dans sa vieillesse, et

ставлена подъ вліяніемъ упомянутаго труда Bossut, причемъ исправлены лишь тѣ встрѣчающіяся у Bossut неточности, которыя относятся къ итальянскимъ ученымъ. Въ библіографическомъ отношеніи сочиненіе Франкини считается рѣдкимъ и цѣнится. Имя Pietro Franchini (1768 — 1837) пользуется въ Италіи значительной извѣстностію.

Въ томъ же 1821 году вышла монографія: *Buchner*, De Algebra Indorum, Elbing 1821 г. in 4°, о которой было выше упомянуто. Сочиненія: *Moll*, Bydragen tot de geschidenis der Wiscundige Wetenschappen in Nederland, 1826 in 8°. *Franchini.* La storia dell'algebra e de' suoi principali scrittori. Lucca 1827 in 8°, въ моемъ распоряженіи не были, равно какъ и названная выше монографія Buchner'а.

Janus Jacobus **de Gelder**. Specimen academicum inaugurale exhibens Theonis smyrnaei arithmeticam, Bullialdi versione lectionis diversitate et annotatione auctam. Lugduni Batavorum 1827 in 8°.

Диссертація, въ которой praemonenda de aetate, scriptis et doctrina Theonis Smyrnaei, содержитъ обширное историко-критическое изслѣдованіе о Теонѣ Смирнскомъ. Послѣ этого изложена его ариѳметика на греческомъ языкѣ съ переводомъ на латинскій и необходимыми примѣчаніями. Въ библіографическомъ отношеніи диссертація Gelder'а, не считается рѣдкою и не цѣнится. Имя Jan Gelder'а мало извѣстно, въ то время какъ имя его отца Jacob Gelder'а профессора математики въ Лейденѣ, пользуется нѣкоторою извѣстностію.

Johann Heinrich Moritz **Poppe**. Geschichte der Mathematik seit des ältesten bis auf die neueste Zeit. Tubingen 1828 in 8°.

Сочиненіе Poppe слѣдуетъ отнести къ разряду описанныхъ выше произведеній Bossut и Franchini. Въ концѣ

---

auquel on reproche des erreurs et des omissions tres extraordinaires. Il ne l'a rectifié, qu'en ce qui concerne les savans italiens, et laisse tout le reste dans l'état où Bossut l'avait mis.

книги приложена математическая библіографія, не отличающаяся особой систематичностію и даже не совсѣмъ вѣрная по отношенію къ нѣкоторымъ указаннымъ въ ней сочиненіямъ. Въ библіографическомъ отношеніи сочиненіе Poppe не представляетъ ни рѣдкости, ни цѣнности. Имя Poppe (1776 — 1854) не пользуется особой извѣстностію.

Сочиненія: *Buquoy*. Chronologische Auszug aus die Geschichte der Mathematik. Leipzig 1829. *Peacock*. History of Arithmetic, London 1829 (Encyclopaedia Metropolitana), въ моемъ распоряженіи не были.

I. Rogg. Bibliotheca Mathematica sive criticus librorum mathematicorum, qui inde ab rei typographicae exordio ad anni 1830-mi usque finem excusi sunt, index ad varios usus commode dispositus. Sectio I. Libros arithmeticos et geometricos complectens. Tubingae 1830.

Такое-же заглавіе на другой страницѣ приведено на нѣмецкомъ языкѣ. Со времени описанной выше математической библіографіи Beughem'а, вышедшей въ 1688 г., кромѣ такихъ сочиненій историко-библіографическаго характера, какъ Milliet Deschales'а, Heilbronner'а, Wolff'а и др., появляются спеціальные труды и по одной лишь математической библіографіи. Таковы напримѣръ произведенія: *Scheibel*, Einleitung zur mathem. Bücherkentniss 1769, *Murhard*, Literatur der mathematischen Wissenschaften 1797—1805 и др. Къ числу ихъ принадлежитъ и библіографія Rogg'а, составленная впрочемъ еще далеко не по выработанной системѣ. Въ библіографическомъ отношеніи книга Rogg'а не представляетъ рѣдкости и не особенно цѣнится. Имя Rogg'а мало извѣстно.

Сочиненія, относящіяся къ изслѣдованію развитія математики у грековъ и вышедшія въ одномъ и томъ же 1831 г.— именно: *Finger*. De primordiis Geometriae apud Graecos Heidelbergae 1831, Dissertatio in 8°. *Cantzler*. De grec. arithmetica. 1831 in 4°. *Dillig*, De Graecis mathematicis. Berlin 1831 in 8°, мнѣ видѣть не пришлось.

Baden Powell. History of natural philosophy from the earliest periods to the present time. London 1834 in 8°.

Въ краткомъ предисловіи къ своему сочиненію Powell указываетъ въ числѣ источниковъ, которыми онъ пользовался при его составленіи, диссертацію профессора Playfair'a подъ заглавіемъ: *Playfair*, The Dissertation on the Progress of Mathematical and Physical Science, которой въ моемъ распоряженіи не было. Тѣмъ не менѣе трудъ Powell'я напоминаетъ во многихъ отношеніяхъ описанныя выше сочиненія Bossut, Franchini и Poppe. Заглавіе, которое находится въ началѣ самой книги и подъ которымъ она значится въ каталогахъ, есть: An historical view of the progress of the physical and mathematical sciences from the earliest ages to the present times. Подъ тѣмъ же заглавіемъ значится и переводъ ея на итальянскій языкъ, сдѣланный Gaetano *Demarchi*, именно: Baden *Powell*, storia del progresso delle scienze fisiche e matematiche dai tempi più antichi sino ai presenti. Torino 1841. Въ библіографическомъ отношеніи сочиненіе Powell'я особой рѣдкостію не считается и не слишкомъ цѣнится. Имя Powell'я въ Англіи пользуется нѣкоторой извѣстностію.

Chasles. Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géometrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géomértrie moderne suivi d'un mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie. Paris 1837 in 4°.

Знаменитое сочиненіе извѣстнаго французскаго ученаго Шаля, составившее эпоху въ развитіи исторіи математическихъ знаній. Въ моемъ распоряженіи было второе изданіе 1875 года подъ тѣмъ же заглавіемъ. Сочиненіе Шаля, написанное въ формѣ отвѣтнаго мемуара на поставленную Брюссельской академіей наукъ тему и увѣнчанное ея преміей, было тотчасъ же оцѣнено по достоинству всею ученою Европою: спустя лишь 2 года послѣ его появленія оно было переведено на нѣмецкій

языкъ[83]). Переводъ же на русскій языкъ сдѣланъ только недавно и помѣщенъ въ приложеніи къ издающемуся въ Москвѣ Математическому Сборнику. Въ библіографическомъ отношеніи оба изданія книги Шаля, будучи не особенно рѣдкими, цѣнятся тѣмъ не менѣе очень высоко, преимущественно второе изданіе. Имя Chasles'я (1793—1880) пользуется громкой и обширной извѣстностію.

Guillaume **Libri**. Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix—septième siècle. 4 vol. Paris 1838—1841 in 8°.

Сочиненіе Либри, появившееся почти одновременно съ указаннымъ выше сочиненіемъ Шаля, точно также по характеру своему принадлежитъ къ новой эпохѣ въ развитіи исторіи математическихъ наукъ и является однимъ изъ первыхъ строго научныхъ произведеній въ этой области. Въ библіографическомъ отношеніи сочиненіе Либри не представляетъ рѣдкости, особенно во второмъ изданіи, Штутгартъ 1865 г., тѣмъ не менѣе оно цѣнится и преимущественно описанное здѣсь первое его изданіе. Имя Либри (1803—1859) пользуется обширной извѣстностію.

James Orchard **Halliwell**. Rara Mathematica, or a collection of treatises on the mathematics and subjects connected with them, from ancient inedited Manuscripts. London 1839 in 8°.

Второе изданіе, одинаковое съ первымъ, было напечатано въ 1841 году. Сборникъ Halliwell'я въ области исторіи математическихъ знаній занимаетъ тоже мѣсто, какое въ исторіи музыки принадлежитъ упомянутымъ выше собраніямъ Gerbert'a и Coussemaker'a, только изданіе Halliwell'я не столь обширно какъ эти послѣднія. Въ библіографическомъ отношеніи

---

83) *Chasles*. Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf die neueren Methoden. Aus d. Franz. übertragen durch *L. A. Sohncke* Halle 1839 in 8.

сборникъ Halliwell'я считается рѣдкимъ и цѣнится. Имя Halliwell'я не пользуется особой извѣстностію.

Сочиненіе: *Werner* Carl. Kurzer Entwurf einer Geschichte der Mathematik. Pasewalk 1841 in 8°, въ моемъ распоряженіи не было.

Nesselmann. Vezsuch einer Kritischen Geschichte der Algebra. Erster Theil. Die Algebra der Griechen. Berlin 1842 in 8°.

Только эта первая часть сочиненія Нессельмана и вышла въ свѣтъ. Въ Германіи произведеніе Nesselmann'a слѣдуетъ считать первымъ написаннымъ въ духѣ новаго періода въ развитіи исторіи математическихъ наукъ. Въ первой главѣ его приведенъ списокъ сочиненій, относящихся къ исторіи математики, впрочемъ не содержащій нѣкоторыхъ изданій изъ числа указанныхъ здѣсь выше. Списокъ этотъ частію воспроизведенъ Eneström'омъ въ упоминаемой здѣсь неоднократно его статьѣ: Om Matematikens Historia. Въ библіографическомъ отношеніи книга Нессельмана рѣдкости не составляетъ и не слишкомъ цѣнится. Имя Нессельмана извѣстно, какъ ученаго въ области классическихъ и восточныхъ языковъ.

Louis Amélie **Sédillot**. Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques cher les Grecs et les Orientaux. Paris 1845—1849, 2 vol. in 8°.

Сочиненіе это въ бóльшей своей части относится къ исторіи астрономіи. Исторіи же математики въ тѣсномъ смыслѣ отведена лишь одна часть (четвертая часть перваго тома, занимающая 365—420 стр. включительно). Въ библіографическомъ отношеніи указанное сочиненіе Sedillot, равно какъ и другія относящіяся къ исторіи математики его произведенія—именно: Rescherches nouvelles pour servir à l'histoire des sciences mathématiques chez les Orientaux, Notice du traité des connue Geometriques de Hassan-ben-Haithem и друг. [84]) особой рѣдко-

[84]) Перечень сочиненій Sedillot и его біографія помѣщены въ IX томѣ Bullétino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche 1876

стію не считаются, тѣмъ не менѣе цѣны своей не потеряли. Имя L. Am. Sedillot (1808—1875) пользуется извѣстностію, какъ оріенталиста.

Сочиненіе: *Sallustj* Giuseppe. Storia dell' origine e de' progressi delle matematiche. Roma 1846, 5 vol. in 8°, въ моемъ распоряженіи не было.

Augustus de Morgan. Arithmetical Books from the invention of printing to the present time beiug brief notices of a large number of works drawn up from actual inspection. London 1847 in 8°.

Указанное произведеніе De Morgan'a представляетъ собою систематически расположенный перечень всѣхъ вышедшихъ со времени открытія книгопечатанія сочиненій, относящихся къ ариѳметикѣ, съ болѣе или менѣе подробнымъ ихъ описаніемъ. Въ библіографическомъ отношеіи книга De Morgan'a считается въ настоящее время рѣдкостію и цѣнится. Имя De Margan'a пользуется извѣстностію.

Сочиненіе: *Gerstenbergk*, Geschichte der Mathematik. Eisenberg 1848, въ моемъ распоряженіи не было.

Arneth. Die Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Geschichte der Entwickelung des menschlichen Geistes. Stuttgart 1852 in 8°.

Сочиненіе Arneth'a, много обѣщающее по своему заглавію, тѣмъ не менѣе ничего особеннаго не представляетъ. При выдающейся неровности въ изложеніи [85]) замѣтно въ значи-

---

p. 619. Между этими сочиненіями не находится ни одного спеціальнаго математическаго труда, тѣмъ не менѣе Sedillot, помѣстивъ насъ русскихъ въ число народовъ Востока, далъ такой приговоръ: L'astronomie et les mathémathiques ne doivent rien, en fait de decouvertes, aux peuplades russes, indiennes ou chinoises [*Sédillot.* De l'astronomie et des mathématiques chez les Chinois. Lettre à M. Boncompagni. Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, tomo I, p. 166. 1868].

[85]) Исторія математики у грековъ и индусовъ занимаетъ почти двѣ трети книги; остальная же часть посвящена арабамъ, китайцамъ и проч.; о развитіи математики въ Европѣ въ теченіи нѣсколькихъ послѣднихъ столѣтій едва упомянуто.

тельной мѣрѣ позаимствованіе изъ упомянутыхъ выше сочиненій Nesselmann'а и Colebrooke'а. Въ библіографическомъ отношеніи книга Arneth'а не представляетъ ни рѣдкости, ни цѣнности.

Baldassare **Boncompagni**. Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. Roma 1854 in 8°.

Извѣстный ученый изслѣдователь въ области исторіи математическихъ наукъ князь B. Boncompagni, издатель упоминаемаго не разъ выше журнала Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze mathematiche e fisiche, посвятилъ рядъ трудовъ изученію вопроса о жизни и дѣятельности Леонарда Пизанскаго, о которомъ писали не только многіе итальянскіе математики въ томъ числѣ: Luca Paccioli[86]), Cardan[87]), Tartaglia[88]), Bombelli[89]), Blancanus[90]), Bernardino Baldi[91]), Cossali[92]), Libri[93]) и новѣйшіе (Genochi и др.), но также иностранцы, какъ напримѣръ: Vossius[94]), Wallis[95]) и множество позднѣйшихъ. Приведенное

---

[86]) Frater *Lucas de Burgo* sancti Sepulchri Ordinis minorum. Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita. Venetiis 1494. p. 15, 18, 20, 39 и пр.

[87]) Hieronymi *Cardani* artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus. Norimbergae 1545 p. 3 и др.

[88]) Nicolo *Tartaglia*. Il general trattato di numeri, et misure. Venegia 1556, p. 1 v. etc.

[89]) Rafael *Bombelli*. L'algebra. Bologna. 1579. Въ предисловіи, озаглавленномъ: A gli Lettori, Bombelli далъ хорошо написанный краткій очеркъ исторіи алгебры, въ которомъ о Леонардѣ Пизанскомъ говорится на 4 стр. (fol. 2 v.).

[90]) Josephus *Blancanus*. Clarorum Mathematicorum Chonologia. Bononiae 1615 p. 59. Указанное Blancanus'омъ время дѣятельности Леонарда Пизанскаго около 1400 г. опредѣлено неправильно.

[91]) *Bernardino Baldi* de Urbino. Cronica de matematici. Urbino 1707. p. 88 et 89.

[92]) *Cossali*. Origine e transporto del' algebra in Italia etc., а также въ его Scritti inediti etc.

[93]) *Libri*. Histoire des sciences mathématiques en Italie. Paris 1838. Въ примѣчаніяхъ ко второму тому приведены значительныя выдержки изъ сочиненія Леонарда Пизанскаго.

[94]) Gerardus Ioannus *Vossius*. De universae matheseos natura et constitutione liber; cui subjungitur chronologia mathematicorum. Amstelaedami. 1650 p. 313. Vossius повторяетъ ошибку Blancanus'а относительно времени дѣятельности Леонарда Пизанскаго.

[95]) *Wallisii* de algebra tractatus; Historicus et practicus. Oxoniae 1693, p. 65.

здѣсь обширное сочиненіе является какъ бы дополненіемъ къ напечатанному кн. Boncompagni раньше очерку жизни и дѣятельности Леонарда Пизанскаго [96]). Впослѣдствіи кн. Boncompagni издалъ и всѣ сочиненія этого знаменитаго итальянскаго математика XIII столѣтія [97]). Въ библіографическомъ отношеніи приведенное здѣсь сочиненіе рѣдкостію не считается, тѣмъ не менѣе цѣнится, какъ и всѣ другія произведенія кн. Boncompagni, въ особенности относящіяся къ вопросу о жизни и дѣятельности Леонарда Пизанскаго.

Sohncke. Bibliotheca Mathematica. Leipzig 1854 in 8°.

Составляетъ продолженіе и частію дополненіе указанной выше математической библіографіи Rogg'a.

Terquem. Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques. Tomes I—VII, Paris 1855—1862 in 8° [98]).

Въ текущемъ столѣтіи значительно увеличилось число лицъ, посвятившихъ себя почти исключительно изученію исторіи математическихъ наукъ. Написанныя по этому предмету въ большомъ количествѣ мемуары обыкновенно помѣщались въ различныхъ математическихъ журналахъ, которыхъ начало издаваться много. Тѣмъ не менѣе первый періодическій органъ,

---

[96]) *Boncompagni.* Della vita e delle opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei 1851—1852 г. Tomo V p. 5—91, 208—246.

[97]) Первоначально изданы были лишь отдѣльныя небольшія сочиненія Леонарда Пизанскаго подъ заглавіемъ: Scritti inediti 1854 in 8°, и второе изданіе тѣхъ же сочиненій подъ заглавіемъ: Opuscoli 1856 in 8°. Затѣмъ всѣ сочиненія Леонарда Пизанскаго были изданы Кн. Boncompagni подъ заглавіемъ: Scritti di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo. 2 vol Roma 1857—1862 in 4°.

[98]) Поименованное въ текстѣ изданіе Terquem'a выходило первоначально какъ приложеніе къ журналу Nouvelles Annales de Mathématiques, основанному Gerono и Terquem'омъ въ 1842 году; начиная же съ 1863 г. статьи по исторіи и библіографіи математики, по заявленію редакціи (Nouvelles Annales de Math., deuxième sèrie, t. I, avertissement de Rédacteurs) вошли въ составъ самаго журнала.

посвященный спеціально этому предмету, сколько мнѣ извѣстно [99]), есть приведенный здѣсь журналъ Terquem'a. Впослѣдствіи число періодическихъ изданій, по исторіи математики стало увеличиваться. Съ 1868 года началъ выходить извѣстный журналъ князя *Boncompagni*, Bulletino di bibliografia e di storia delle science matematiche e fisiche. Затѣмъ слѣдуетъ указать на Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, 1 — 4 Heft. 1877 — 1882 г. in 8°. Наконецъ съ текущаго года и въ Россіи началъ издаваться подъ редакціей г. *Бобынина* журналъ: физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ, посвященный, согласно своей программѣ, въ значительной мѣрѣ исторіи физико-математическихъ наукъ [100]).

Сочиненія: *Veratri*. Dé matematici italiani anteriori all' invenzione della stampa. Modena 1860, и *Klynsma*. Biographisch Woordenboek. Levensberichten van Wis—Natuur — en Sterrekundigen. Amsterdam 1861 (вышла лишь одна первая часть) въ моемъ распоряженіи не были.

Todhunter. A. history of the progress of the calculus of variations during the nineteenth century. London 1861 in 8°.

Хотя указанное сочиненіе Todhunter'a, будучи совершенно спеціальнаго характера, не относится непосредственно къ разряду здѣсь перечисляемыхъ, тѣмъ не менѣе для полученія всесторонняго представленія о ходѣ развитія исторіи математическихъ наукъ необходимо было его привести, съ одной стороны вслѣдствіе принятой Тодгёнтеромъ своеобразной системы изложенія, съ другой — въ виду его особой важности для исторіи математическихъ знаній новѣйшаго періода. Кромѣ того названная здѣсь исторія варіаціоннаго исчисленія, служа-

---

[99]) Bibliotheca historico naturalis physico-chemica et mathematica, heraus. Zuchold, Göttingen 1851—1853, было одно изъ первыхъ періодическихъ изданій библіографическаго характера.

[100]) Съ 1876 года въ журналѣ: Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausg. Schlömilch, образовался самостоятельный отдѣлъ для статей по исторіи и библіографіи математическихъ наукъ.

щая, по словамъ самого Тодгёнтера (preface p. V), какъ бы продолженіемъ труда Woodhouse[101]), сдѣлалась уже библіографической рѣдкостію и высоко цѣнится. Принятая Тодгёнтеромъ система изложенія заключается въ послѣдовательномъ приведеніи содержанія относящихся къ данному предмету сочиненій, причемъ размѣръ обширности такого приведенія опредѣляется важностію излагаемаго труда по отношенію къ движенію впередъ разсматриваемой науки. Такая система не позволяетъ иногда во всей строгости соблюсти хронологическій порядокъ, тѣмъ не менѣе при ней изложеніе развитія научной мысли пріобрѣтаетъ необыкновенную ясность и логическую послѣдовательность. Вмѣстѣ съ тѣмъ трудъ Тодгёнтера отличается замѣчательною полнотою съ точки зрѣнія библіографическихъ указаній[102]).

Кромѣ названнаго здѣсь сочиненія Тодгёнтеръ издалъ два другія, относящіяся къ исторіи математическихъ наукъ и по характеру своему одинаковыя съ описаннымъ,—именно: A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace. London 1865, большой томъ въ 624 страницы in 8°, и A history of the mathematical theories of attraction and the figure of the earth, from the time of Newton to that of Laplace. 2 vol. London 1873 in 8°[103]).

---

[101]) Robert *Woodhouse*. A treatise an Isoperimetrical Problems and the Calculus of Variations. Cambridge 1810.

[102]) Въ немъ изложены съ соотвѣтствующею подробностію не только всѣ выдающіеся произведенія по варіаціонному исчисленію, но указаны также и русскіе, заграницею мало извѣстные учебники, какъ напр. *Брунъ*. Руководство къ варіаціонному исчисленію. Одесса 1848 (его изложеніе находится на 461, 462 и 463 страницахъ); *Поповъ*. Начала варіаціоннаго исчисленія. Казань 1856 г. (стр. 483). Относительно *Senff*. Elementa Calculi Variationum. Dorpat 1838, сказано не совсѣмъ понятно: The present writer is indebted to the kindness of Professor Bruun for a corpy of his *Manual of the Calculus of Variations* (стр. 463).

[103]) Въ The London, Edinburgh and Dublin philosophical Megazine and Journal of Science, by Brewster, Kane, Francis, за 1873 годъ помѣщена статья Тодгёнтера историческаго содержанія: On the history of certain formulae in spherical trigonometry.

Poggendorff. Biographisch—literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften enthaltend Nachweisungen über Lebensverhältnisse und Leistungen von Mathematikern, Astronomen, Physikern, Chemikern, Mineralogen, Geologen usw. aller Völker und Zeiten. 2 vol. Leipzig 1863 in 8°.

Извѣстный лексиконъ Poggendorff'а, появившiйся почти одновременно съ названнымъ выше произведенiемъ Klynsma, представляетъ собою крайне важную, достаточно полно[104]) и обстоятельно составленную справочную книгу для занимающихся математическими науками. Встрѣчающiяся въ немъ неточности при обилiи собранныхъ историко-библiографическихъ указанiй вовсе не умаляютъ значенiе громаднаго труда. Можно лишь весьма пожалѣть, что до сихъ поръ не послѣдовало ожидаемое его продолженiе, такъ какъ въ отношенiи къ позднѣйшему перiоду чувствуется значительная неполнота въ лексиконѣ Poggendorff'а. Въ библiографическомъ отношенiи трудъ Poggendorff'а рѣдкости не представляетъ, тѣмъ не менѣе цѣны своей не потерялъ.

Quetelet. Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges. Bruxelles 1864 in 8°.

Сочиненiе Quetelet, извѣстнаго статистика, по своему характеру должно быть причислено къ произведенiямъ позднѣйшаго перiода въ развитiи исторiи математики. Кромѣ того оно отличается своеобразной обработкой статистическихъ данныхъ, относящихся къ движенiю математическихъ наукъ въ Бельгiи. На стр. 374а дана таблица: mouvement du génie mathématique en Belgique, на которой развитiе математическихъ наукъ въ Бельгiи въ разныя эпохи представлено ор-

---

[104]) Напримѣръ изъ приведенныхъ здѣсь именъ не указаны: Garzoni, Joannis de Luneschlos, Kersey, Beughem, Stammetz, Pappiani, Strachey и нѣкоторые другiе, а потому не названы и вышеописанныя сочиненiя этихъ авторовъ.

динатами кривой линіи, имѣющей два maximum'a, одинъ въ XII и другой въ XVII столѣтіяхъ, и три minimum'a: первый около 900 г. по Р. Х., второй около 1400 г. и третій въ XVIII столѣтіи. Въ библіографическомъ отношеніи сочиненіе Quetelet не считается рѣдкимъ и не слишкомъ цѣнится.

П. Л. Лавровъ. Очеркъ исторіи физико-математическихъ наукъ. Составлено по лекціямъ, читаннымъ въ лабораторіи артиллерійской академіи СПБ. 1865 in 8⁰ [105]).

Сочиненіе г. Лаврова является первымъ, сколько мнѣ извѣстно, на русскомъ языкѣ самостоятельнымъ трудомъ, обнимающимъ собою общую исторію математическихъ наукъ, доведенную впрочемъ лишь до начала среднихъ вѣковъ. Изъ самаго заглавія видно, что это есть собраніе лекцій, обработанныхъ въ рядъ статей для помѣщенія въ журналѣ. По характеру своему очеркъ г. Лаврова долженъ быть отнесенъ къ позднѣйшему періоду въ развитіи исторіи математики, хотя нельзя не замѣтить, что свѣдѣнія относительно движенія математическихъ знаній на востокѣ, у Индусовъ, въ Китаѣ и пр. взяты не прямо изъ источниковъ [106]) и потому не только неполны, но въ нѣкоторыхъ частяхъ и не совсѣмъ вѣрны.

---

[105]) Очеркъ исторіи физико-математическихъ наукъ г. Лаврова помѣщенъ въ видѣ ряда статей, соотвѣтствующихъ по размѣру каждая приблизительно одной лекціи, въ Морскомъ Сборникѣ за 1865 и 1866 гг.

[106]) Напримѣръ, при изложеніи развитія математики у Индусовъ совсѣмъ не приняты въ разсчетъ вышеуказанныя сочиненія Strachey'a, Colebrooke'a и др., вышедшія на цѣлое полустолѣтіе раньше. Относительно математическихъ наукъ въ Китаѣ г. Лавровъ вовсе не имѣлъ въ виду: *Biot.* Table générale d'un ouvrage chinois intitulé Souan-fa-tong-tson ou collection des regles du calcul. Journal asiatique, III serie, t. VII, p. 193. Paris 1839. *Biot.* Traduction et examen d'un ancien ouvrage chinois intitulé Tcheou-pei litteralement: «Style ou signal dans une circonference». Journal asiatique. III serie, t. XI, p. 593, Paris 1841. *Biot.* Le Tceōu Lý ou rites de Tcheou. Paris 1851. *Wylie* Alexande. Jottings on the science of chinese arithmetic. North China Herald 1852 и въ Schangae Almanac for 1853, а также не достаточно пользовался весьма извѣстными статьями Бернацкаго, помѣщенными въ различныхъ журналахъ, именно: *Biernatzki.* Die Arithmetik der Chinesen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, T. 52 Berlin 1856. Arithmetique et Algèbre de Chinois. Nouvelles annales de Mathématiques 186?

Сочиненie: *Martines* Domenico. Origine e progressi dell' aritmetica. Messina 1865, въ моемъ распоряженiи не было.

Lenormant. Essai sur un document mathématique chaldéen, et à cette occasion sur le systéme des poids et mesures de Babylone. Paris 1868 in 8° authographiée.

Въ скудной литературѣ по вопросу о состоянiи математическихъ знанiй у Ассирiянъ и Вавилонянъ указанное сочиненie Ленорманна, воспроизведенное имъ автографически, считается первымъ по времени своего появленiя. Впослѣдствiи по тому же вопросу писали Smith[107]), Oppert[108]), Lepsius[109]) и др.

Friedlein. Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert. Erlangen 1869 in 8°.

Вопросъ о происхожденiи и развитiи цыфровыхъ знаковъ у различныхъ народовъ является въ области исторiи математическихъ наукъ однимъ изъ первыхъ, остановившихъ на себѣ вниманiе ученыхъ. Уже въ половинѣ XVI столѣтiя, какъ выше мы видѣли, Camerarius[110]) и другiе обсуждаютъ его въ отдѣльныхъ монографiяхъ. При выдѣленiи исторiи математики въ самостоятельную отрасль знанiя происхожденiе и развитiе цыфръ возбуждаетъ къ себѣ еще большiй интересъ. Въ XVII столѣтiи, какъ выше указано, Beveregium[111]) приводитъ обширное собранiе цыфровыхъ знаковъ, употребляемыхъ различными на-

---

et 1863. Arithmetique et algèbre des Chinois. Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie mathèmatiques par Terquem. T. 8. Paris 1862.

[107]) *Smith*. On Assyrian weights and measures. Zeitschrift fur Aegyptische Sprache und Alterthumskunde 1872.

[108]) *Oppet*. L'étalon des mesures assyriennes fixé par les textes cuneiformes. Journal asyatique, sixième serio, t. XX. Paris 1872 et septieme serie, t. IV. Paris 1874.

[109]) *Lepsius*. Die Babylonisch-Assyrischen Längenmasse nach der Tafel von Senkerech. Abhandlunhen der Könihliche Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1877.

[110]) *Camerarius*. De Graecis Latinisque numerorum notis. Norimbergae 1557. *Matthaeus Hostus*. De numeratione emendata veteribus Latinis et Graecis usitata. Antwerpiae 1582.

[111]) *Beveregium*. Institutionum chronologicarum. Londini 1669 p. 191 etc.

родами. Въ тоже время Wallis сначала въ 1657 году[112]), а затѣмъ въ 1685 году[113]) посвящаетъ вопросу о цыфрахъ рядъ изслѣдованій. Кромѣ того въ XVII столѣтіи, подобно тому какъ въ предыдущемъ, встрѣчаются монографіи болѣе спеціальнаго характера, какъ напр. Orsati[114]) и др. Въ XVIII столѣтіи разсматриваемый вопросъ вступаетъ въ новую фазу своего развитія: кромѣ излагающихъ его общихъ сочиненій по исторіи математики[115]), а также посвященныхъ ему диссертацій[116]) и отдѣльныхъ изданій[117]), онъ становится предметомъ изслѣдованія въ спеціальныхъ журналахъ[118]). Текущее XIX столѣтіе уже имѣетъ громадную и самую разнообразную литературу по вопросу о происхожденіи и развитіи цыфровыхъ знаковъ[119]).

Приведенная здѣсь обширная монографія Friedlein'а издана послѣ ряда его статей, посвященныхъ вопросу о происхожденіи цифръ, именно: Gerbert, die Geometrie des Boetius und die

---

[112]) *Wallis*. Mathesis universalis sive arithmeticarum opus integrum. Oxonii 1657. Cap. VII—X включительно содержатъ обширное изслѣдованіе по исторіи цыфровыхъ знаковъ.

[113]) *Wallis*. Treatise of Algebra both historical and practical with some additional treatises. London 1685. Chapt. III and IV, гдѣ Wallis склоняется къ индусскому происхожденію употребляемыхъ нами цыфръ.

[114]) *Orsati* Sestorio. De notis Romanorum commentarius. Patavii 1672.

[115]) Напримѣръ *Montucla*. Histoire des Mathematiques. Paris 1758 t. I p. 49, точно также и во второмъ изданіи.

[116]) Напримѣръ: *Weidler*. De characteribus numerorum vulgaribus et eorum aetatibus veterum monimentorum fide illustratis. Dissertatio. Witembergae 1727.

[117]) Напримѣръ того же *Weidler*'а: Spicilegium observationum ad historiam notarum numeralium pertinentium. Wittembergae 1755. Также *Ginanni* F. De numeralium notarum minuscolarum origine, dissertatio mathematico-critica. Venezia 1753 и друг.

[118]) Напримѣръ въ Philosophical Transactions, vol. XXXIX за 1735 и 1736 гг. London 1738 p. 117—142 находятся четыре статьи, относящіяся къ области исторіи цифръ (письмо Cope къ D-r. Stuart'у, замѣчанія на это письмо John Ward и пр.).

[119]) Въ текущемъ столѣтіи вопросъ о происхожденіи и развитіи цыфровыхъ знаковъ разработывается съ весьма различныхъ точекъ зрѣнія. Кромѣ обыкновенно приводимаго изложенія его въ общихъ сочиненіяхъ по исторіи математики, а также посвященныхъ ему отдѣльныхъ изданій, статьи по исторіи цыфръ встрѣчаются въ самыхъ разнообразныхъ журналахъ, на-

indischen Ziffern. Ein Versuch in der Geschichte der Arith-

тематическихъ, историческихъ, археологическихъ, филологическихъ, азіатскихъ обществъ и пр. не только Европы, но и всего міра. При такихъ условіяхъ почти не представляется возможнымъ дать полную библіографію этого вопроса и приходится ограничиться лишь приведеніемъ болѣе или менѣе извѣстныхъ журнальныхъ статей и относящихся къ нему отдѣльныхъ изданій (кромѣ названныхъ выше), причемъ общія сочиненія по исторіи математики, въ которыхъ излагается происхожденія и развитія цыфровыхъ знаковъ, въ виду перечисленія ихъ въ текстѣ, вовсе не указаны.

Въ XIX столѣтіи по исторіи цифръ писали.

Conradus *Mannert*. De numerorum quos Arabicos vocant vera origine Pithagorica. Norimbergae 1801.

Hager Giuseppe. Memoria sulle cifre arabiche attribuite fino a' giorni nostri agl' Indiani ma inventate in un paese più remoto dell' India. Milano 1813.

Matthaeis G. Dissertatione sull' origine de' numeri romani. Roma 1818.

Paravey. Essai sur l'origine unique et hieroglyphique des chiffres et des lettres de tous les peuples. Paris 1826.

Alex. von *Humboldt*. Ueber die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen, und über den Ursprung des Stellenwerthes in den Indischen Zahlen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausg. von Crelle, t. IV p. 205. Berlin 1829.

Jacquet. Mode d'expression symbolique des nombres, employe par les Indiens, les Tibétains et les Javanais. Journal asiatique t. XVI, p. 5. Paris 1835.

Chasles. Sur le passage du premiere livre de la géométrie de Boèce, relatif à un nouveau systéme de numeration. Bruxelles 1836.

Chasles. Explication de l'Abacus de Boéce. Comptes Rendus des seances de l'Academie des sciences de Paris, t. IV, Paris 1837.

Princep. On the Ancient Sanscrit Numerals. The Journal of the Asiatic Society of Bengal. Vol. VII, p. 348. Calcutta 1838.

Chasles. De la connaissance qu'ont eue les anciens d'une numeration décimale ecrite etc. Comptes Rendus etc., t. VI, Paris 1838.

Vincent. Notes sur l'origine de nos chiffres et sur l'abacus des Pythagoriciens. Journal des mathematiques pures et appliques par Liouville, t. IV p. 262, Paris 1839.

Chasles. Sur l'origine de notre systéme de numeration. Comptes Rendus etc. t. VIII. Paris 1839.

Drobisch. Ad historiam litterariam arithmeticae communis symbolae. Lipsiae 1840.

Chasles. Eclaircissements sur le traité *de numero arenae* d'Archimede. Comptes Rendus etc., t. XIV. Paris 1842.

Chasles. Explication des traités d'Abacus et particuliérement du traité de Gerbert. Comptes Rendus etc., t. XVI et XVII. Paris 1843.

Vincent. Des notations scientifiques à l'école d'Alexandrie. Revue archeologique. Paris 1846.

Brugsch. Numerorum apud veteres Aegyptios demoticorum doctrina ex Papiris et inscriptionibus illustrata. Berolini 1849.

Woepcke. Sur une donnée historique relative à l'emploi des chiffres indiens par les arabes. Annali di scienza matematiche e fisiche compilati da Barnaba Tortolini t. VI, p. 321, Roma 1855.

metik. Erlangen 1861. De notis numerorum Romanis. Bul-

Martin. Recherches nouvelles concernant les origines de système de numération écrite. Revue archeologique t. XIII p. 509 et 588. Paris 1856 et 1857.

Wilson. Note on the origin of the units of the Indian and European numerals. Bombay 1858.

Joseph *Krist.* Ueber Zahlensysteme und desen Geschichte. Ofen 1859.

Piccard. Memoire sur la forme et la provenance des chiffres servant à la numeration decimale chez les anciens et chez les modernes. Société Vaudoise des sciences naturelles 1859.

Cantor. Zur Geschichte der Zahlzeichen. Leipzig 1859.

Pihan. Exposé des signes de numeration usités chez les peuples orientaux ancieus et modernes. Paris 1860.

Devéria. Notation des centaines de mille et des millions dans le systéme hiéroglyphique des anciens Egyptiens. Revue archeologique 1862.

Roediger. Die syrischen Zahlzeichen. Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft. Band 16 p. 579. Berlin 1862.

Cantor. Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker. Halle 1863.

Martin. Les signes numeraux et l'arithmetique chez les peuples de l'antiquité et du moyen-âge. Examen de l'ouvrage de M. Cantor: Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker. Annali di Matematica pura ed applicata, publicati da Barnaba Tortolini, t. V, p. 257 et 337. Roma 1863.

Woepcke. Sur la propagation des chiffres indiens en occident. Journal asiatique VI série, t. I, p. 27. Paris 1863.

Sedillot. Sur l'origine de nos chiffres. Rome 1865.

Woepcke. Introduction au calcul gobârî et hawâî. Atti dell' Academia Pontificia de Nuovi Lincei t. XIX. Roma 1863.

Ellis R. Etruscan Numerals. London 1868.

Ambereg. Die verschiedene Numerationsysteme. Zug. 1872.

Ellis R. On Numerals, as Signs of Primeval Unity among Mankind. Cambridge 1873.

Allan. The origine of our Numerals. The Nature, London 1875.

Treutlein. Geschichte unserer Zahlzeichen und Entwickelung der Ansichte über dieselbe. Karlsruhe 1875.

Picton. On the origin and history of numerals. Proceedings of the literary and philosophical Society of Liverpool, t. XXIX p. 69. London 1875.

Weissenborn. Die Entwickelung des Ziffernrechnens. Eisenach 1877.

Narducci. Intorno ad un manoscritto della biblioteca Alessandrina contenente gli apici di Boezio senz' abaco e con valore di posizione. Atti della Academia Reale dei Lincei, p. 503. Roma 1877.

Bombelli. Studi archeologico-critici circa l'antica numerazione italica ed i relativi numeri simbolici. I. Dell'antica numerazione. Roma 1877.

Wassenborn. Die Boetius Frage. Zeitschrift für Mathematik und Phytik herausg. von Schlömilch, t. XXIV, p. 187. Leipzig 1879.

Кельсіевъ. Цыфры у различныхъ народовъ. Москва 1880.

Felix Bogacki. Rodowód liczb i cyfr. Warszawa 1880.

Sir *Clive Bayley.* On the Genealogy of Modern Numerals. Part. I and II The Journal of the Royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland. Vol. XIV, pag. 335, London 1882, Vol. XV, pag. 1, London 1883.

letino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, Tomo I p. 48. 1868. Beitrage zur Geschichte der Mathematik и др.

Bretschneider. Die Geometrie und die Geometer vor Euclides. Ein historischer Versuch. Leipzig 1870 in. 8°.

Указанное здѣсь изслѣдованіе Bretscheider'а, имѣющее предметомъ развитіе геометріи въ древней Греціи и частію у Египтянъ, является болѣе обстоятельнымъ изложеніемъ вышедшей годомъ раньше его статьи: Beiträge zur Geschichte der Griechischen Geometrie. Gotha 1869. Въ обширной выписке греческаго текста (стр. 100 и слѣд.), приведенной Bretschneider'омъ изъ сочиненія: *Simplicii* commentarii in octo Aristotelis physicae auscultationis libros, Venetiis 1526, встрѣчаются между прочимъ ссылки на упомянутую выше недошедшую до насъ исторію геометріи Евдема. § 86. Ὁ μέντοι Εὔδημος ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἱστορία и пр. (стр. 109). Λέγει δὲ ὧδε ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ τῆς γεομετρικῆς ἱστορίας и пр.

Pietro **Riccardi.** Bibliotheca mathematica italiana dalla origine della stampa ai primi anni del secolo XIX compilata. Modena 1870—1880 2 part. in 3 vol. in 4°.

Названная здѣсь, извѣстная математическая библіографія Италіи составляетъ первое произведеніе въ этомъ направленіи, отличающееся замѣчательной полнотой и обладающее глубоко обдуманной и строго выдержанной системой въ исполненіи, получившей въ послѣдующихъ библіографическихъ трудахъ[120]) преобладающее значеніе. Въ предисловіи ко второй части сочиненія Riccardi находятся интересныя статистическія свѣдѣнія, относящіяся къ количеству вышедшихъ по математикѣ книгъ въ Италіи въ продолженіи болѣе четырехъ столѣтій и поясненныя графической таблицей[121]).

---

[120]) Напр. Bierens de Haan въ упоминаемой не разъ выше библіографіи вполнѣ придерживается этой системы.

[121]) Riccardi изъ приведенныхъ имъ статистическихъ данныхъ касательно появленія въ Италіи относящихся къ математическихъ наукамъ сочи-

Годомъ раньше библіографіи Riccardi т. е. въ 1869 г. начала издаваться въ журналѣ: Tidskrift för Matematik och Fysik, utgifen af Dillner, Hultman og Thalèn, шведская библіографія: *Hültmann.* Svenska aritmetikens historia, изданіе которой продолжалось до 1875 года[122]).

Къ 400 лѣтнему юбилею Коперника вышла цитируемая выше польская библіографія: Teofil *Żebrawski.* Bibliografija pismiennictwa polskiego z działu matematyki i fizyki oraz ich zastósowań. Na obchód czterechsetletniéj rocznicy urodzin Kopernika. W Krakowie 1873, заключающая въ себѣ перечень польскихъ не только печатныхъ, но и рукописныхъ сочиненій по математикѣ, астрономіи, астрологіи, физикѣ и пр., а также и о музыкѣ, съ болѣе или менѣе подробнымъ ихъ описаніемъ.

Съ 1881 году начала выходить и въ 1883 г. окончена изданіемъ упоминаемая выше библіографія Нидерландовъ: *Bierens de Haan.* Bibliographie néerlandaise historico-scientifique des ouvrages importants dont les auteurs sont nés aux 16-e, 17-e et 18-e siècles, sur les sciences mathématiques et physiques avec leurs applications, помѣщенная въ журналѣ кн. Boncompagni: Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche[123]).

неній выводъ очень интересныя заключенія, именно: minimum'ы научной производительности совпадаютъ съ эпохами войны, моровой язвы и другихъ народныхъ бѣдствій, maximum'ы же соотвѣтствуютъ періодамъ спокойствія. Вотъ подлинныя его слова (Parte Seconda, avvertimento, p. 21):... non e difficile trovare una corrispondenza fra le fasi del movimento scientifico, e quelle dei periodi più notevoli dellà storia civile.

All'epoche di grosse guerre, di pestilenze, di carestíe, di rivolgimenti politici e sociali, corrispondono quelle della minore produttività scientifica col mezzo della stampa.

La maggiore produttività corrisponde ai periodi di tranquillità, di floridezza e di libero risveglio delle forze della nazione

Приложенная къ предисловію графическая таблица наглядно подтверждаетъ выведенныя Riccardi заключенія.

[122]) Tidskrift för Matematik, t. II (1869), t. III (1870), t. IV (1871) et t. V (1875).

[123]) Bulletino di bibliografia e di storia etc. t. XIV (1881), t. XV (1882) et t. XVI (1883).

Въ текущемъ 1885 году въ журналѣ г. Бобынина: Физико-математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ, начала издаваться русская математическая библіографія [124]).

Chasles. Rapport sur les progrès de la géomètrie. Recuel de rapports sur l'état des lettres et les progrès des sciences en France. Publication faite sous les auspices du ministère de l'instuction publique. Paris 1870 in 8°.

Приведенное сочиненіе Шаля составляетъ какъ бы продолженіе, относящееся къ позднѣйшему періоду, его знаменитаго произведенія: Aperçus historique sur l'origine et le developpement des méthodes en géometrie, и въ тоже время можетъ служить въ исторіи математическихъ знаній представителемъ новаго отдѣла, получившаго начало въ первыхъ годахъ текущаго столѣтія. Еще Delambre [125]) счелъ необходимымъ дать обзоръ современнаго ему движенія математическихъ наукъ. Позднѣе Forbes [126]), а за нимъ Bertrand [127]) и Quetelet [128]) посвятили этому предмету отдѣльныя сочиненія. Затѣмъ Hankel [129]) въ 1869 году далъ прекрасный, живой очеркъ движенія математическихъ наукъ въ послѣднемъ столѣтіи. Въ трудѣ Шаля обзоръ такого движенія при строго научной формѣ является подробнымъ отчетомъ о развитіи главнымъ образомъ геомет-

---

[124]) Съ самаго начала оказавшаяся недостаточно полною: въ ней не названа крайне интересная, рѣдкая, но весьма извѣстная книга — *Ученіе и хитрость ратнаго строенія пѣхотныхъ людей; Москва 1647 года* переводъ съ нѣмецкаго съ 35 гравированными чертежами in fol., составляющая первое изданіе въ Россіи, относящееся къ области математическихъ знаній.

[125]) *Delambre.* Rapport historique sur les progrès des sciences mathematiques depuis 1789. Paris 1810.

[126]) *Forbes.* On the recent progress of Mathematical and Phytical science. Edinburg 1858.

[127]) *Bertrand.* Rapport sur les progrès les plus récents de l'analyse mathématique. Recuel de rapports etc. Краткій докладъ Bertrand'а (38 стр. in 8°) носитъ на себѣ слишкомъ оффиціальный характеръ.

[128]) *Quetelet.* Sciences mathématiques et physiques chez les Belges au commencement du 19 siècle. Bruxelles 1867.

[129]) *Hankel.* Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. Tübingen 1869; 2-е изданіе съ предисловіемъ Du-Bois Reymond'а вышло въ текущемъ 1885 году.

ріи въ текущемъ столѣтіи. Значеніе подобныхъ отчетовъ скоро было понято и они начали появляться въ возростающемъ числѣ, хотя впрочемъ безъ строгаго соблюденія однообразной формы. Уже въ 1873 году выходитъ рядъ статей, относящихся къ этому предмету и принадлежащихъ ученымъ различныхъ націй, именно: Steen [130]), Mansion [131]), Vivanet [132]) и др.

Heinrich **Zuter**. Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Erster Theil: Von den ältesten Zeiten bis Ende des XVI. Jahrhunderts. Zürich 1873 (Zweite Auflage). Zweiter Theil: Vom Anfange des 17-ten bis Ende 18-ten Jahrhunderts. Zürich 1875. in 8°.

Первое изданіе первой части сочиненія Zuter'а вышло въ 1872 году подъ тѣмъ же заглавіемъ. Въ предисловіи къ первой части указанъ списокъ сочиненій по исторіи математики, являющійся, особенно послѣ даннаго Nesselmann'омъ [133]), весьма неполнымъ. Начинается этотъ списокъ лишь указаніемъ труда *Vossius*'а, причемъ столь важное и интересное въ исторіи науки сочиненіе *Ramus*'а осталось не названнымъ. Кромѣ того Zuter не упоминаетъ даже такихъ капитальныхъ произведеній позднѣйшаго времени, какимъ является исторія алгебры Cossali. По характеру своему сочиненіе Zuter'а нѣсколько напоминаетъ собою произведеніе Bossut, и его послѣдователей, Franchini, Popp'а и пр., хотя впрочемъ на немъ отразилось движеніе науки, совершившееся съ того времени. Исторія Zuter'а переведена на русскій языкъ [134]).

---

[130]) *Steen*. De mathematiske Studiers Fremgang i Danmark i dette Hundredaar. Tidsskrift for Mathematik. Udgivet af Zeuthen. t. III p. 161 Kjøbenhavn 1873.

[131]) *Mansion*. Les mathématiques en Belgique en 1872. Bullotino di bibliografia e di storia etc., tomo VI p. 277. 1873.

[132]) *Vivanet*. Die più notabili progressi della geometria nel corrente secolo decimonono. Discorso inaugurale. Cagliari 1873.

[133]) *Nesselmann*. Die Algebra der Griechen. Erste Kapitel.

[134]) Генрихъ *Зутеръ*. Исторія математическихъ наукъ съ древнѣйшихъ временъ до конца XVI столѣтія. Перев. съ измѣн. и доп. съ нѣмецкаго Антонъ Мануиловъ. Часть I. Кишиневъ 1876 г.

Сочиненіе: *Поповъ*, очеркъ развитія ариѳметики, Казань 1873, въ моемъ распоряженіи не было.

Ferdinand **Hoefer**. Histoire des Mathématiques depuis leurs origines jusqu'au commencement du dix-neuviéme siecle. Paris 1874 in 12°.

О сочиненіи Hoefer'а проф. Curtze отозвался такъ[135]): Es ist ernstlich vor diesem Buche zu warnen. Eine genaue Lectüre desselben hat dem Referenten die Wahrheit dessen bestätigt, was ihm gleich nach dem Erscheinen desselben M. Cantor darüber mittheilte: *Druck—und Denkfehler wechseln in dem Buche so elegant mit einander ab, dass man sich fragen muss, woher der Verfasser das wenige Richtige entlehnt hat.* Между тѣмъ въ журналѣ Časopis[136]) дана такая рецензія сочиненію Hoefer'а: Kdo by chtěl míti stručný přehled dějin mathematiky, tomu budiž odporučen spis nedávno v Paříži vyšly a sice Histoire des mathématibues par Hoefer, kdež vypravují se hlavní momenty rozvoje rěd mathematických spůsobem velmi přehledným: že nejde spisovatel příliš do hloubky následuje z malého objemu, jenž dán spisu tomuto, avšak pro obyčejné potřeby neni nutno, ba ani žádvucno, aby se rše do nejhlubšich základů vgložilo, jelikož často si přejeme míti jen stručné, ale snadno přístupné poučení, nikoliv rozsáhlý výklad. Velmi hojná data biografiská taktéž budou mnohému příležitostně vítána. Оба приведенныя здѣсь столь различныя мнѣнія едва ли могутъ считаться вполнѣ вѣрными. Дѣйствительно, съ точки зрѣнія исторической критики сочиненіе Hoefe'а составлено недостаточно осмотрительно, тѣмъ не менѣе его сжатое изложеніе при обширномъ содержаніи и выдержанной системѣ заслуживаютъ вниманія.

---

[135]) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik T. VI (за 1874 г.) p. 37. Berlin 1876.

[136]) Časopis pro pěstováni mathematiky a fysiky etc. rediguje Dr. Studnička. Ročník IV Praze 1875 str. 94 a 95.

Hermann Hankel. Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. Leipzig 1874 in 8°.

Въ послѣднее время въ Германіи появляется рядъ выдающихся ученыхъ, посвятившихъ себя почти исключительно изученію исторіи развитія математическихъ знаній. Достаточно указать весьма извѣстные имена: Woepke, Steinschneider, Friedlein, Cantor, Bretschneider, Zuter, Treutlein, Günter и др. Въ средѣ этихъ именъ одно изъ первыхъ мѣстъ принадлежитъ Hankel'ю. Указанное здѣсь его сочиненіе должно быть причислено къ новѣйшей эпохѣ въ развитіи исторіи математическихъ наукъ, хотя нельзя не пожалѣть, что написано оно въ формѣ ряда отдѣльныхъ статей, не достаточно связанныхъ общимъ планомъ.

Въ томъ же 1874 году начало выходить сочиненіе: *Bierens de Haan*. Bouwstoffen voorde Geschiedenis der wis- en naturkundige wetenschappen in de Nederlanden. Verslagen en Mededeelingen der Koniklyke Akademie van Wetenschapen Afdeeling Natuurkunde. Amsterdam. T. VIII, 1874; t. IX, 1875; t. X, 1876; t. XII, 1878; t. XIV, 1879; t. XVI, 1881, котораго въ моемъ распоряженіи не было.

Въ 1875 году вышли сочиненія, относящіяся къ исторіи математики: *Stonner*. Die Mathematik der Alten. Olmütz 1875 и *Favaro*. Saggio di cronografia dei matematici dell'antichità (съ 600 до Р. Х. по 400 по Р. Х.). Padova 1875, которыя не были въ моемъ распоряженіи.

Günter S. Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung. Erlangen 1876 in 8°.

Небольшой, но интересный и живо написанный очеркъ Günter'а, излагающій результаты позднѣйшихъ изслѣдованій въ области исторіи математическихъ наукъ, пріобрѣтаетъ еще бо́льшее значеніе по своимъ обширнымъ примѣчаніямъ, занимающимъ болѣе четырехъ-пятыхъ всей книги.

August **Eisenlohr**. Ein mathematisches Handbuch der al-

ten Aegypter (Papirus Rhind des British Museum). Leipzig 1877 in 4° mit Atlas.

Для исторіи математики изданіе проф. Eisenlohr'омъ папируса Rhind'а, содержащаго единственное до сихъ поръ извѣстное математическое сочиненіе древнихъ египтянъ, составляетъ эпоху: на него сразу всѣ обратили вниманіе, какъ на документъ первостепенной важности. Во Франціи *Rodet* сначала въ 1878 году[137]) и затѣмъ въ 1881 году[138]) посвятилъ ему двѣ статьи. Въ Италіи *Favaro* въ 1880 году[139]) далъ обширный мемуаръ по тому же предмету. Въ Россіи г. *Бобынинъ* въ 1882 г.[140]) писалъ о томъ же[141]). Кромѣ того позднѣйшія общія сочиненія по исторіи математики начинаются обыкновенно изложеніемъ состоянія этой науки въ древнемъ Египтѣ на основаніи папируса Ринда[142]). Съ внѣшней стороны названное изданіе папируса Ринда отличается прекраснымъ исполненіемъ; приложенныя же проф. Ейзенлоромъ комментаріи дѣлаютъ его капитальнымъ трудомъ не только съ точки зрѣнія исторіи математики, но также египтологіи и филологіи вообще.

---

[137]) *Rodet.* Sur un Manuel du calculateur découvert dans un papyrus égyptien. Bulletin de la société Mathematique de France. Tome VI. Paris 1878, p. 139—149.

[138]) *Rodet.* Les prétendus problèmes d'Algébre du manuel du calculateur egyptien (Papyrus Rhind). Journal asiatique, septième série t. XVII. Paris 1881 p. 184—232 et 390—459.

[139]) *Favaro.* Sulla interpretazione matematica del Papiro Rhind publicato ed illustrato dal Prof. Augusto Eisenlohr. Memorie della Academia Reale di Modena. t. XIX p. 89—145. Отдѣльные оттиски этого мемуара выпущены въ 1879 году.

[140]) *Бобынинъ.* Математика древнихъ Египтянъ. (Папирусъ Ринда). Москва 1882.

[141]) Странно, что въ такой полной и обстоятельной библіографіи, какою является Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, изданіе проф. Eisenlohr'а вовсе не названо.

[142]) Напримѣръ: *Cantor.* Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band. I und II Kapit. Aegypter. Leipzig 1880 p. 17 — 63. *Ващенко-Захарченко.* Исторія математики. Томъ I, Кіевъ 1883. Статья подъ заглавіемъ «Египтянѣ» занимаетъ 327—350 стр. *Gow.* A short history of Greek mathematics. Cambridge 1884 p. 15—21, и др.

Gerhardt. Geschichte der Mathematik in Deutschland. München 1877 in 8°.

Названное сочиненіе составляетъ семнадцатый томъ общей исторіи развитія наукъ въ Германіи, изданной спеціальной коммиссіей при мюнхенской королевской академіи. Обстоятельство это отчасти отразилось на самомъ сочиненіи, въ которомъ исторія математики излагается преимущественно съ фактической стороны и притомъ ограничивается почти исключительно періодомъ новыхъ вѣковъ.

Horn W. Die Logistik und Trigonometrie der Griechen. Mathematisch-historische Studie als Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doctorgrades der naturwissenschaftlichen Facultät der Universität Tübingen. München 1877 in 8°.

Небольшая брошюра-диссертація Horn'а, повторяющая съ незначительными измѣненіями то, чтò было раньше извѣстно, и относящаяся главнымъ образомъ къ обозначенію чиселъ и дѣйствій у Грековъ, приведена здѣсь какъ примѣръ тому, что вопросы по исторіи математическаго обозначенія въ послѣднее время въ значительной мѣрѣ обратили на себя вниманіе [143]).

Въ томъ же 1877 году начало выходить сочиненіе: *Allman*. Greek geometry, from Thales to Euclid. Dublin 1877 (1-я часть) и Dublin 1881 (2-я часть), котораго не было въ моемъ распоряженіи.

Ludwig **Matthiessen**. Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig 1878 in 8°.

Сочиненіе Matthiessen'а, будучи болѣе подробнымъ и значительно дополненнымъ изложеніемъ раньше изданной его монографіи [144]), хотя и не можетъ быть причислено вполнѣ къ

---

143) Въ извѣстной библіографіи Ortmann'а (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik) диссертація Horn'а не указана.

144) *Matthiessen*. Die algbraischen Methoden der Auflosung der litteralen quadrathischen, cubischen und biquadratischen Gleichungen. Nach ihren Principien und ihrem inneren Zusammenhange dargestelt. Erste Serie, enthaltend: Substitutions-Methoden. Leipzig 1866.

области исторіи математики, тѣмъ не менѣе содержитъ много историческихъ указаній относительно рѣшенія уравненій и частію ихъ обозначенія. Названіемъ своимъ и даже по самому характеру оно напоминаетъ извѣстный трудъ Renaldini[145]) о старой и новой алгебрѣ, а по системѣ изложенія походитъ до нѣкоторой степени на указанныя выше произведенія Тодгёнтера. Въ концѣ книги приложена библіографія алгебры, которая будучи, по выраженію Dr. Müller'a[146]), für den Historiker von unschätzbarem Werthe, не содержитъ въ тоже время[147]) не только сравнительно менѣе извѣстныхъ сочиненій по алгебрѣ, какъ напр. *Dibuadius*[148]), *Stevin*[149]), *Stampioen*[150]), *Joannis de Luneschlos*[151]). *Hollander*[152]), *Kersey*[153]) и многихъ другихъ, но не указаны и такія всѣмъ извѣстныя, важныя въ исторіи науки произведенія, какъ *De la Roche*[154]), *Recorde*[155]), *Pele-*

---

145) *Caroli Renaldini*. Ars analitica mathematum. Florentiae 1665, сочиненіе, раздѣляющееся на algebra vetus (535 страницъ in fol.) и algebra nova (248 страницъ in fol.).

146) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. T. 10, (1878), Berlin 1880 p. 48.

147) Что̀ отчасти предвидѣлъ и самъ Matthiessen (предисловіе, стр. IV).

148) *Dibuadii* in arithmeticam rationalium (et irrationalium) Euclidis septimo, octavo et nono (et decimo) elementorum libris comprehensam demonstratio. Arnhemii Geldriae. 1605.

149) *Stevin*. L'arithmetique. Leide 1625, большая часть которой составляетъ алгебру.

150) *Stampioen*. Algebra ofte nieuwe Stelragel. s'Graven-Hage 1639. Крайне интересное изданіе съ точки зрѣнія алгебраическаго обозначенія.

151) *Joannis de Luneschlos*. Algebra nova. Patavii 1646. Описано выше.

152) *Hollander*. Toetsteen von d'Algebra speciosa. Amsterdam 1669. Заглавіемъ напоминаетъ извѣстное сочиненіе *Recorde*'a. The Whetstone of witte. London 1557.

153) John *Kersey*. The elements of that Mathematical Art commonly called Algebra. London 1673. Обширная алгебра Керсея изложена въ четырехъ книгахъ, составляющихъ вмѣстѣ 739 страницъ in fol. убористой печати.

154) Estienne *de la Roche* dict Villefranche. Larismethique nouvellement composée divisée ne deux parties dont la premiere tracte des proprietes parfections et regles de la dicte science etc. Lyon 1520. Первое вышедшее во Франціи печатное произведеніе, относящееся къ алгебрѣ.

155) Robert *Recorde*. The whetstone of witte whiche is the seconde parte of Arithmetike: containyng thextraction of Rootes. The Cossike prac-

tarius[156]), *Xylander*[157]), *Clavius*[158]), *Oughtred*[159]), *Wallis*[160]), и нѣкоторыя другія[161]).

Сочиненіе: *Bröckerhoff.* Geschichtlicher Entwickelungs-gang der mathematischen Wissenschaften. Theil I 1879 въ моемъ распоряженіи не было.

Moritz Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band, von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Leipzig 1880 in 8°.

Въ средѣ упомянутыхъ выше ученыхъ Германіи, посвятившихъ себя разработкѣ исторіи математическихъ знаній, Moritz Cantor занимаетъ почетное мѣсто; появленіе приведеннаго здѣсь его сочиненія составляетъ эпоху въ развитіи этой науки.

Сочиненіе элементарнаго характера: *Bergolo.* Arithmetik und Algebra, nebst einer Geschichte dieser Disciplinen, Karlsruhe 1881, не было въ моемъ распоряженіи.

Бобынинъ. Математика древнихъ египтянъ (по папирусу Ринда). Москва 1882 in 8°.

Изслѣдованіе г. Бобынина составлено по описанному выше сочиненію проф. Ейзенлора[162]), причемъ не приняты въ разсчетъ появившіяся съ того времени работы оріенталистовъ,

tise, with the rule of Equation: and the woorkes of Surde Numbers. London 1557 in 4°. Считается первымъ напечатаннымъ въ Англіи сочиненіемъ, относящимся къ алгебрѣ.

[156]) Jacobus *Peletarius.* De occulta parte numerorum, quam algebram vocant, Libri duo. Parisiis 1560 in 4°. Первое изд. на франц. языкѣ, Lyon 1554.

[157]) *Xylander.* Diophanti Alexandrini rerum arithmeticarum libri sex. Basileae 1575. Не указано также извѣстное изданіе Діофанта, сдѣланное Fermat въ 1670 году.

[158]) Christophorus *Clavius.* Algebra. 1609 in 4°.

[159]) Gulielmus *Oughtredus.* Clavis mathematica denuò limata, sive potius fabricata. Cui accedit Tractatus de Resolutione Aequationum qualitercunque dafectarum in numeris etc. Londini 1648. Первое изданіе 1631 г.

[160]) *Wallis.* Treatise of Algebra both historical and practical with some additional treantises. London 1685 in fol. Описана выше на стр. 20 и 21.

[161]) Не указано также послѣднее и лучшее изданіе 1857 года liber abaci Леонарда Пизанскаго.

[162]) *Eisenlohr.* Ein mathematieches Handbuch der alten Aegypter (Papirus Rhind des British Museum) Leipzig 1877.

относящіяся къ разсматриваемому вопросу, какъ напримѣръ Rodet [163]).

Сочиненіе: *Rosenberger*. Die Geschiche der Physik in Grundzügen mit syuchronistischen Tabellen der Mathematik, der Chimie und beschreibenden Naturwissenschaften, sowie der algemeinen Geschichte. I Theil. Braunschweig 1882, содержащее лишь хронологическія таблицы по исторіи математики, переведено на русскій языкъ.

Ващенко-Захарченко. Исторія математики. Историческій очеркъ развитія геометріи. Томъ I. Кіевъ 1883. in 8°.

Хотя въ самомъ заглавіи указано, что сочиненіе проф. Ващенко-Захарченко имѣетъ въ виду исторію геометріи, тѣмъ не менѣе вторая половина его посвящена почти исключительно исторіи алгебры. Въ нѣкоторыхъ частяхъ трудъ проф. Ващенко-Захарченко напоминаетъ указанныя выше произведенія Шаля и Кантора, отъ которыхъ отличается недостаточной выдержанностію системы. Кромѣ того въ немъ встрѣчаются довольно значительныя неточности [164]). Цѣннымъ вкладомъ въ русскую математическую литературу является другое сочиненіе проф. Ващенко-Захарченко, именно: начала Евклида съ пояснительнымъ введеніемъ и толкованіями, Кіевъ 1880 г. Къ нему приложенъ обширный списокъ всѣхъ изданій Евклида, впрочемъ

---

[163]) *Rodet*. Les pretendus problèmes d'Algébre du manuel du calculateur Egyptien (Papyrus Rhind). Journal asiatique, VII serie, t. 17, Paris 1881.

[164]) Неточности встрѣчаются преимущественно въ началѣ «краткаго историческаго очерка развитія алгебры» (стр. 253 и слѣд.), которое составлено въ большей своей части по извѣстнымъ сообщеніямъ Шаля относительно исторіи алгебры въ засѣданіяхъ Парижской Академіи Наукъ, причемъ сдѣланныя отъ этихъ сообщеній отступленія являются не вѣрными. Для примѣра я приведу слѣдующее. Въ сообщеніи 5 мая 1841 года (Comptes Rendus etc., t. 12. Note sur la nature des operations algébrique etc. p. 752, выноска) Шаль говоритъ: C'est (т. е. Larismethique nouvellement composee par Estienne de la Roche dict Villefranche etc., Lyon 1520) donc le plus ancien Traité d'Algèbre imprmée en France; et circonstance remarquable à cauco de l'époque ce Traité est écrit en *français*.

L'auteur y cite le Traité d'Algébre de maître *Nicolas Chuquet*, parisien, autre ouvrage d'un auteur français, anterieur à 1520. Peut être la notation

не совсѣмъ полный[165]), что̀ составляетъ почти неизбѣжный недостатокъ всякаго библіографическаго труда.

---

des exposants s'y trouvait-elle déjà. Il est à desirer, dans l'intérêt de l'histoire, que cet ouvrage ne soit pas entiérement perdu.

Изложенное въ 1841 году Шалемъ проф. Ващенко-Захарченко въ 1883 году передаетъ такъ (стр. 257):

«Сочиненіе Лароша интересно еще въ томъ отношеніи, что оно есть первое сочиненіе по алгебрѣ, написанное» (Шаль говоритъ: напечатанное, такъ какъ Estienne de la Roche цитируетъ въ своей ариѳметикѣ другое болѣе раннее сочиненіе Nicolas Chuquet) «на французскомъ языкѣ. Къ тому же времени относится другое сочиненіе, по тому же предмету, написанное въ 1520 году *Шюке* [Nicolas Chuquet]» (Шаль говоритъ: anterieur à 1520; но въ 1880 году т. е. почти за три года до изданія труда проф. Ващенко-Захарченко, уже было извѣстно, что алгебра Шюке написана въ 1484 году); «къ сожалѣнію о послѣднемъ сочиненія не существуетъ никакихъ указаній» (Шаль упоминаетъ объ указаніяхъ на это сочиненіе въ ариѳметикѣ de la Roche'a; кромѣ того указанія на сочиненіе Chuquet находятся въ статьѣ: *Térquem.* Sur la notation cartesienne des exposants. Nouvelles annales de mathématiques, t. VI, Paris 1847), «оно утеряно» (въ 1841 году Шаль только выразилъ желаніе, чтобы, въ интересахъ науки, оно не было утеряно, въ 1883 году проф. Ващенко-Захарченко утверждаетъ, что оно утеряно и притомъ послѣ опубликованія этого сочиненія въ 1880 году). «Весьма интересно было бы знать, какіе символы были употреблены авторомъ». (Въ 1847 году Terquem въ упомянутой выше его статьѣ, стр. 44, предполагаетъ, что символы de la Roche'a взяты у Chuquet. Изданіе въ 1880 году сочиненія Chuquet вполнѣ подтвердило это предположеніе и кромѣ того выяснило, что самая ариѳметика de la Roche'a 1520 года составлена по рукописи Chuquet 1484 г.).

Алгебра Chuquet подъ заглавіемъ: Le Tripatry en la science des nombre par maistre Nicolas Chuquet parisien издана въ 1880 году съ примѣчаніями Aristide Marre'омъ и помѣщена въ извѣстномъ журналѣ кн. Boncompagni (Bulletiio di bibliografia e di storia etc., t. XIII, Roma 1880; отдѣльные оттиски помѣчены: Roma 1881). Дополненіе къ алгебрѣ Шюке помѣщено въ слѣдующемъ томѣ того-же журнала кн. Boncompagni (Bulletino di bibliografia e di storia etc., t. XIV, Roma 1881).

[165]) Въ моемъ распоряженіи находятся слѣдующія два изданія Евклида, неуказанныя у проф. Ващенко-Захарченко.

Henrion. Les quinze livres des elements d'Euclide. Paris 1615.

Milliet Dechalles. Les elements d'Euclide. Paris 1685 in 12°.

У Riccardi (Biblioteca matematica italiana, Modena 1870—1880, p. 44, 45, 46 и 47) находится цѣлый рядъ, болѣе 50 изданій Евклида, не названныхъ проф. Ващенко-Захарченко въ его спискѣ, въ томъ числѣ два изданія XV столѣтія, именно:

Valla. Euclidis elementorum liber XIV. Venetiis 1492 in fol.

Georgio *Valla* Placentino interprete. Hoc in volumine hec continentur. Nicephori logica Georgij valle libellus de argumentis Euclidis quartus deci

Maximilien **Marie**. Histoire des sciences mathématiques et physiques. Tome I, de Thalès à Diophante, Paris 1883; Tome II, de Diophante à Viète, Paris 1883; Tome III, de Viète à Descartes, Paris 1884; Tome IV, de Descartes à Huyghens, Paris 1884; Tome V, de Huyghens à Newton, Paris 1884; Tome VI, de Newton à Euler, Paris 1885; Tome VII, de Newton à Euler (Suite), Paris 1885, in 8°.

Сочиненіе Marie, еще не оконченное печатаніемъ, представляетъ собою изложеніе исторіи математики въ формѣ послѣдовательнаго ряда расположенныхъ въ хронологическомъ порядкѣ біографій ученыхъ, подобно тому, какъ это было сдѣлано Baldi[166]) почти тремя столѣтіями раньше. Система Marie отличается отъ принятою Baldi лишь тѣмъ, что изложенныя біографіи распредѣлены по періодамъ, причемъ каждому изъ этихъ періодовъ въ видѣ предисловія предшествуетъ обнимающій его краткій очеркъ движенія математическихъ наукъ. Какъ справочная книга произведеніе Maximilian'a Marie имѣетъ несомнѣнное значеніе.

Обширный трудъ: *Prowe.* Nicolaus Copernicus 1 Band. Das Leben, Berlin 1883; 2 Band. Urkunden, Berlin 1884, относится къ тому же разряду сочиненій, какъ и описанное выше изслѣдованіе кн. Boncompagni о Леонардѣ Пизанскомъ.

Сочиненіе: *Jedeler*, Handbuch der mathematischen und

---

mus elementorum Hypsiclis interpretatio eiusdem libri Euclidis, Nicephorus de astrolabo, Proclus de astrolabo, Aristarchi samij de magnitudinibus et distantiis solis et lune etc. Venetiis 1498 in fol.

У *Bierens de Haan* въ не разъ упоминаемой здѣсь выше его библіографіи (Bibliographie néerlandaise etc. Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, publicato da B. Boncompagni. Tomo XVI, Roma 1883, p. 411) точно также приведено нѣсколько изданій Евклида, не названныхъ проф. Ващенко-Захарченко.

Eneström (Bibliotheca Mathematica № 3, p. 79, Stockholm 1884) указываетъ болѣе 50 шведскихъ изданій Евклида, непоименованныхъ въ спискѣ проф. Ващенко-Захарченко.

Такимъ образомъ списокъ проф. Ващенко-Захарченко содержитъ вѣроятно не болѣе $^2/_3$ всѣхъ изданій Евклида.

[166]) *Baldi.* Cronica di matematici. Urbino 1707. Описано выше.

technischen Chronologie. Breslau 1883, въ моемъ распоряженіи не было, равно какъ и первое его изданіе [167]).

James Gow. A short history of Greek mathematics. Cambridge 1884 in 8°.

Хорошо написанное, удовлетворяющее требованіямъ современной исторической критики сочиненіе James Gow заслуживаетъ полнаго вниманія и по характеру своему должно быть отнесено къ разряду немногочисленныхъ произведеній, составляющихъ позднѣйшую эпоху въ развитіи исторіи математическихъ знаній.

Приводя изложенный выше списокъ сочиненій по исторіи математическихъ знаній, авторъ далекъ былъ отъ мысли, что данный имъ перечень исчерпываетъ все написанное въ этомъ направленіи. Напротивъ, задавшись цѣлію, какъ выше объяснено, указать сочиненія по исторіи математики, которыя находились въ его распоряженіи, только лишь вслѣдствіе того значенія, какое принадлежитъ всякому даже неполному библіографическому труду, авторъ рѣшился, кромѣ приведенія съ краткимъ описаніемъ упомянутыхъ сочиненій, указать также и другія, которыя хотя и не были въ его распоряженіи, но извѣстны ему частію по описаніямъ, частію лишь по названіямъ. При этомъ является необходимымъ сдѣлать слѣдующую оговорку. Кромѣ произведеній, по характеру близко подходящихъ къ перечисленнымъ здѣсь выше, которыя могутъ оказаться неназванными по невѣдѣнію ихъ, существуетъ еще цѣлый рядъ сочиненій, содержащихъ свѣдѣнія по исторіи математическихъ наукъ и не приведенныхъ здѣсь по тѣмъ или другимъ причинамъ, именно.

Прежде всего въ этомъ направленіи необходимо указать на сочиненія, излагающія исторію отдѣльныхъ наукъ, которыя въ прежнее время считались частями математики, а съ нѣко-

---

167) Первое изданіе сочиненія Jedeler'а подъ тѣмъ же заглавіемъ въ двухъ томахъ вышло въ Берлинѣ въ 1825 и 1826 гг. Второе изданіе 1883 г. представляетъ копію (Facsimile-Druck) перваго.

тораго времени сдѣлались самостоятельными. Таковы, напримѣръ, сочиненія по исторіи астрономіи, по исторіи механики, по исторіи музыки[168]) и проч. Въ настоящее время указанныя отрасли знанія выдѣлились и совершенно объособились, а потому перечень сочиненій по ихъ исторіи не можетъ входить въ составъ приведеннаго выше списка[169]).

Уже здѣсь неоднократно было замѣчено, что съ давнихъ поръ, еще съ XV столѣтія[170]), вошло въ обычай приводить

[168]) Музыка (теорія) со времени древнихъ грековъ до прошедшаго столѣтія считалась одною изъ частей математики, большинство выдающихся двигателей которой отъ Евклида до Эйлера включительно писали также и по музыкѣ. Винцентій Бовэ, представитель средневѣковой учености, жившій въ XII вѣкѣ, по этому поводу говоритъ: Sunt igitur he quatuor species mathematice Arithmetica tractat de numeris. Musica de proportione. Geometria de spacio. Astronomia de motu. Elementum arithmetice est unitas. musice unisonus geometrie punctum. Astronomie instans. Itaque arithmetica est numerorum scientia. musica est plurium dissimilium in unum redactorum concordia etc. *Speculum doctrinale* Vincentij belvacensis (стразбургское изданіе 1473 года; Lib. XVII, cap. III. Здѣсь сохранена по возможности и употребляемая тамъ орѳографія). Въ упомянутомъ выше первомъ собраніи математическихъ наукъ Dasypodius'а (*Conradi Dasypodii* institutionum mathematicarum Voluminis primi. Argentine 1593 стр. 2) эти науки перечислены такъ: Arithmetica, Geometria, Logistica, Geodaesia, Optica, Cosmographia, Mechanica, Musica. Тоже самое встрѣчается у Alstedius'а въ его собраніи математическихъ наукъ [*Alstedius*. Elementale mathematicum. Francofurti 1611, неназваннаго здѣсь выше] и въ другихъ подобныхъ изданіяхъ. Поэтому въ предыдущихъ исторіяхъ математики, какъ напр. у Vossius'а, даже у Montucla и др. на изложеніе развитія музыки обращено достаточное вниманіе, и новѣйшіе авторы по исторіи музыки едва ли основательно не принимаютъ въ соображеніе изложеннаго выше обстоятельства и не пользуется въ своихъ изысканіяхъ упомянутыми сочиненіями по исторіи математики.

[169]) Исключеніе сдѣлано лишь по отношенію къ одному сочиненію на русскомъ языкѣ: исторія сокращенная астрономіи, сочиненная профессоромъ математики Платономъ *Гамалеею*, С.-ПБ. 1809. Не указаны также сочиненія по исторіи новѣйшихъ отраслей математическихъ знаній, какъ то: по исторіи диффренціальнаго и интегральнаго исчисленій, эллиптическихъ функцій и проч. Исключеніе сдѣлано лишь для сочиненій Тодгёнтера вслѣдствіе ихъ своеобразной системы изложенія и особенно важнаго значенія.

[170]) Здѣсь, какъ и вообще въ дальнѣйшемъ изложеніи, имѣются въ виду лишь печатныя сочиненія, напр. *Lucas de Burgo*, Summa de arithmetica, Geometria etc. Venetiis 1494. Jacobus *Faber* Stapulensis, Jordani Nemorarii arithmetica decem libris demonstrata etc. Parhisij 1496 и др. Въ рукописяхъ же такія указанія встрѣчаются гораздо раньше.

болѣе или менѣе подробныя историческія указанія въ общихъ сочиненіяхъ, излагающихъ математическія науки, или какія либо отдѣльно, или во всей ихъ совокупности. Обычай этотъ существовавшій, какъ мы видѣли, теченіи XVI, XVII и XVIII столѣтій, продолжаетъ существовать и до сихъ поръ: въ немъ именно заключается начало возникновенія исторіи математическихъ наукъ нашего времени. Сочиненія, содержащія подобнаго характера свѣдѣнія по исторіи математики, приведены въ данномъ выше перечнѣ лишь какъ болѣе или менѣе выдающіеся примѣры упомянутому обычаю и множество ихъ вовсе не названо, такъ какъ указаніе всѣхъ такихъ сочиненій почти равносильно составленію полной математической библіографіи [171]).

Изъ числа сочиненій, относящихся къ области математической біографіи, указаны только очень немногія и притомъ такія, въ которыхъ собственно біографическій элементъ играетъ лишь второстепенную роль, а первенствующая принадлежитъ изслѣдованію того значенія, которое имѣло описываемое лицо въ области движенія математическихъ знаній. Возникновеніе исторіи математическихъ наукъ въ формѣ біографіи слѣдуетъ считать тоже однимъ изъ наиболѣе раннихъ. Уже въ

---

[171]) Между подобными сочиненіями встрѣчаются, какъ уже и выше было замѣчено, содержащія весьма цѣнныя историческія указанія, большею частію находящіяся въ текстѣ самаго сочиненія, какъ напр. у *Tartaglia* въ его Trattato di numeri e mesure, Venegia 1556 — 1560; но иногда уже въ XVI столѣтіи выдѣленныя въ самостоятельную статью, составляющую какъ бы введеніе. Для примѣра этому можно указать на алгебру Бомбелли (L'algebra opera di Rafael *Bombelli* da Bologna divisa in tre libri. Bologna 1579; первое изданіе вышло въ 1572 г.), въ которой статья къ читателю «A gli lettori» представляетъ собою прекрасно изложенный краткій очеркъ исторіи алгебры. Такого же характера помѣщены двѣ интересныя лекціи Tartaglia (Lettione de Nicolo Tartalea Brisciano, sopra tutta la opera di Euclide Megarense, acutissimo mathematico) въ началѣ его перевода Евклида (Euclide Megarense philosopho, solo introduttore delle scientie mathematice. Diligentemente rassetato, et alla integrità ridotto, per il degno professore di tal Scientie Nicolo *Tartalea* Brisciano. Venetia 1565; *Riccardi*, Biblioteca matematica italiana, Modena 1870 p. 497 et 498, указываетъ три предыдущихъ и три послѣдующихъ изданія этого перевода Евклида, именно: Venetia 1543, Venetia 1544, Venetia 1545, Venetia 1569, Venetia 1585, Venetia 1586).

XV столѣтіи встрѣчаются изданія этой категоріи[172]). Въ XVI столѣтіи опи принимаютъ болѣе опредѣленную форму[173]). Въ XVII столѣтіи число ихъ значительно возросло а также оцѣнено было ихъ значеніе[174]). Въ XVIII и особенности въ XIX столѣтіи изъ нихъ выработалась вполнѣ своеобразная форма историко-математическихъ изслѣдованій[175]).

Какъ ниже мы увидимъ, въ связи съ біографіей получила начало хронологія математики, подъ вліяніемъ которой развился особый видъ математической библіографіи. Сочиненія по хронолого-библіографической формѣ исторіи математики, вышедшія въ XVII столѣтіи, въ данномъ выше спискѣ приведены всѣ, извѣстныя автору; за послѣдующее время указаны лишь нѣкоторыя. Но въ этой формѣ исторіи математическихъ знаній получила свое начало библіографія математики въ строгомъ смыслѣ слова, тѣсно связанная съ ея исторіей. Въ приведенномъ спискѣ лишь въ незначительной части указаны сочиненія по математической библіографіи, главнымъ образомъ тѣ изъ нихъ, которыя выдаются по своимъ особенностямъ, напримѣръ, по системѣ изложенія и пр.

Еще въ XVI столѣтіи вышелъ, какъ мы видѣли, первый лексиконъ по математическимъ наукамъ Dasypodius'a. Въ теченіи XVII столѣтія было издано нѣсколько такихъ лексиконовъ, являющихся съ улучшенной и разработанной формѣ. Въ нихъ уже находится много историческихъ указаній, представляющихъ интересъ. Въ XVIII столѣтіи, замѣчательномъ по своимъ энциклопедическимъ изданіямъ, вышедшіе математичес-

[172]) Напримѣръ: *Luccari* Nicolo. Baptiste Piasii astronomi peritissimi funebris laudatio. Cremonae 1492.

[173]) Напримѣръ: Laurentii *Frizzolij*. De Lilij vita et operibus, въ описанномъ выше сочиненіи: Lilii Gregorii *Gyraldi* Dialogismi XXX. Venetia 1553.

[174]) Напримѣръ: *Gassendus*. Tychonis Brahei astronomorum Coryphei vita. Accessa Nicolai Copernici, Georgii Pevrbachii et Joanni Regiomontani vita. Parisii 1654.

[175]) Какъ напримѣръ описанное выше изслѣдованіе кн. Boncompagni о Леонардѣ Пизанскомъ.

кіе лексиконы отличаются научной обработкой. XIX вѣкъ далъ нѣсколько выдающихся произведеній въ этомъ направленіи. Въ изложенномъ выше спискѣ приведены лишь математическіе лексиконы XVII столѣтія, содержащія историческія указанія. Въ теченіи XVIII столѣтія указанъ только одинъ Stammetz'а, а въ XIX столѣтіи не указано ни одного, такъ какъ эта отрасль изданій слишкомъ удалилась отъ исторіи математики, свѣдѣнія по которой хотя и приводятся въ такихъ лексиконахъ, но лишь съ второстепеннымъ значеніемъ [176]).

Кромѣ того отдѣльныя монографіи по исторіи математическихъ наукъ, получившія начало еще въ XVI столѣтіи и даже ранѣе [177]), въ вышеприведенный списокъ входили при двухъ условіяхъ: съ одной стороны, какъ примѣръ возникновенія и развитія исторіи математики въ этомъ направленіи, съ другой —настолько, насколько разсматриваемые ими вопросы носятъ на себѣ общій характеръ.

Въ заключеніе слѣдуетъ снова упомянуть о томъ, что множество мемуаровъ по исторіи математическихъ наукъ, помѣщенныхъ въ журналахъ XIX столѣтія, которое вообще характеризуется какъ вѣкъ періодической прессы, здѣсь не названы не смотря на важное значеніе, какое имѣютъ нѣкоторые изъ нихъ по отношенію къ исторіи математическихъ знаній. Такое перечисленіе не могло войти въ составъ изложеннаго списка уже и потому, что лишь отъ приведенія отдѣльныхъ сочиненій по исторіи математики этотъ списокъ разросся сверхъ ожиданія; съ другой стороны такое перечисленіе должно составить предметъ обширнаго библіографическаго труда, что̀

---

[176]) Вообще слѣдуетъ замѣтить, что въ данномъ выше спискѣ не приведено много сочиненій, въ которыхъ указанія по исторіи математическихъ знаній имѣютъ слишкомъ второстепенное значеніе.

[177]) Напримѣръ сочиненіе XV столѣтія извѣстнаго *Pico* Giovanni della Mirandola: E adscriptis numero Noningentis. Dialecticis. Moralibus. Physicis, Mathematicis. Methaphysycis etc. disputabit publice Johannes Picus Mirandulanus. Romae 1486.

вовсе не имѣлось въ виду при составленіи настоящаго предисловія. Данный перечень[178]) сочиненій по исторіи математики приведенъ лишь съ цѣлію показать, что въ распоряженіи автора находился достаточный матеріалъ для предположеннаго имъ

[178]) Здѣсь будетъ умѣстно привести нѣкоторыя статистическія указанія относительно даннаго выше списка.

Принявъ для сравненія приведенный у *Nesselmann*'а (Die Algebra der Griechen. Berlin 1842, S 8—29) списокъ сочиненій по исторіи математики, какъ наиболѣе полный, найдемъ слѣдующее. У Nesselmann'а описано 26 сочиненій (въ томъ числѣ три двойныхъ изданія Ramus'а, Vosius'а и Bossut); приведено по названіямъ 23 сочиненія, которыхъ Nesselmann не видѣлъ (и между которыми встрѣчаются вторыя изданія описанныхъ); всего названо 49 сочиненій.

Въ приведенномъ здѣсь выше спискѣ указано 84 сочиненія до времени появленія труда Nesselmann'а, между которыми 45 описанныхъ (въ томъ числѣ два изданія Ramus'а и Montucla), и 39 приведенныхъ по названіямъ. Всего же здѣсь названо 140 сочиненій, изъ нихъ 74 описанныхъ и 66 приведенныхъ по названію, причемъ въ числѣ указанныхъ приведенными по названію есть 10 находящихся въ распоряженіи автора и неописанныхъ во избѣжаніе повтореній. Кромѣ того приведены въ выноскахъ около 200 журнальныхъ статей и отдѣльныхъ изданій, относящихся къ области исторіи математическихъ наукъ частію находящихся въ распоряженіи автора, частію извѣстныхъ ему по выдержкамъ и описаніямъ или только по названіямъ.

Такимъ образомъ приведенный здѣсь списокъ сочиненій, относящихся къ исторіи математическихъ наукъ, является значительно пополненнымъ въ сравненіи съ даннымъ у Nesselmann'а: указанное здѣсь ихъ цыфровое сопоставленіе можетъ служить подтвержденіемъ тому, съ какими затрудненіями сопряжено составленіе болѣе или менѣе полныхъ библіографическихъ указаній по данному вопросу.

По столѣтіямъ и въ отношеніи языка указанныя въ вышеприведенномъ спискѣ сочиненія распредѣляются такъ:

	XVI ст	XVII ст.	XVIII ст.	XIX ст.	Итого
Латинскій	8	10	14	7	39
Нѣмецкій	—	—	10	28	38
Французскій	—	1	6	12	19
Итальянскій	1	—	6	9	16
Англійскій	—	1	—	12	13
Русскій	—	—	—	7	7
Голландскій	—	—	1	3	4
Греческій	—	—	—	1	1
Польскій	—	—	—	1	1
Португальскій	—	—	—	1	1
Шведскій	—	—	—	1	1
Итого	9	12	37	82	140

По столѣтіямъ и въ отношеніи мѣста своего изданія названныя въ

обобщенія. Въ тоже время, какъ выше упомянуто, изъ желанія по возможности пополнить приводимый списокъ съ библіо-

---

данномъ выше спискѣ сочиненія распредѣляются такимъ образомъ:

	XVI ст.	XVII ст.	XVIII ст.	XIX ст.	Итого
Германія (и Австрія)	3	1	19	34	57
Италія	4	1	8	11	24
Франція	1	2	6	11	20
Англія	—	2	1	11	14
Голландія (и Бельгія)	—	5	3	5	13
Россія	—	—	—	7	7
Швейцарія	1	1	—	1	3
Швеція	—	—	—	1	1
Остъ Индія (Бомбей)	—	—	—	1	1
Итого	9	12	37	82	140

По формѣ своего изложенія описанныя сочиненія распредѣляются такъ (въ томъ числѣ заключаются и упомянутыя выше 10, хотя неописанныя, но находящіяся въ распоряженіи автора):

	XVI ст.	XVII ст.	XVIII ст.	XIX ст.	Итого
1. Общія сочиненія описательнаго характера (въ томъ числѣ хроники Baldi и Marie) . . .	2	—	5	20	27
2. Монографіи и изслѣдованія по отдѣльнымъ вопросамъ . .	2	1	2	10	15
3. Общія сочиненія хронолого-библіографическаго характера (въ томъ числѣ сочиненія Тодгёнтера и лексиконъ Poggendorff'a) . .	—	3	4	5	12
4. Библіографія въ тѣсномъ смыслѣ слова	—	1	1	6	8
5. Сочиненія, въ которыхъ исторія математики является въ формѣ дополнительныхъ свѣдѣній	3	3	2	1	9
6. Періодическія изданія по исторіи и библіографіи математики	—	—	—	4	4
7. Изданія произведеній древнихъ математиковъ востока . .	—	—	—	4	4
8. Математическіе словари. .	—	2	1	—	3
9. Сочиненія, неподходящія подъ вышеуказанныя рубрики (изданіе Halliwell'я и докладъ о движеніи математическихъ наукъ Шаля).	—	—	—	2	2
Итого . .	7	10	15	52	84

графической стороны, кромѣ описанныхъ сочиненій были названы и такія, которыя хотя не были въ распоряженіи автора, тѣмъ не менѣе сдѣлались ему извѣстными или по описаніямъ, или даже только по названіямъ. Кромѣ того пополненный такимъ образомъ списокъ даетъ возможность бросить общій взглядъ на развитіе исторіи математическихъ наукъ со времени ея возникновенія въ западной Европѣ [179]).

Первоначальныя свѣдѣнія по исторіи математики заключались, какъ выше было упомянуто, въ указаніи именъ предшественниковъ, причемъ обычай давать подобныя указанія восходитъ до глубокой древности [180]). Такія указанія встрѣчаются

---

[179]) Въ настоящее время не представляется возможнымъ дать очеркъ развитія исторіи математическихъ знаній у древнихъ грековъ, такъ какъ подлинныя ихъ сочиненія по этому предмету до насъ не дошли. Тѣмъ не менѣе существованіе такихъ сочиненій въ древней Греціи не подлежитъ сомнѣнію и было извѣстно давно въ Европѣ. Въ подтвержденіи этого, кромѣ указаній Nesselmann'a (Die Algebra der Griechen. Berlin 1842, S. 2 etc.), можно привести еще слѣдующее:

Ramus въ своемъ Prooemium mathematicum, Parisiis 1567, говоритъ (стр. 92): Theophrastus libros reliquit... de historia geometrica quatuor... Sed et Eudemus historiam illam geometricam conscripserat... И далѣе (стр. 93): Satis enim constat... historiam mathematicam plené et integre ab Eudemo descriptam fuisse etc., ссылаясь при этомъ на Діогена Лаэрція.

Vossius въ chronologia mathematicorum, Amstelaedami 1650, говоритъ (стр. 310): Theofrastus librum condididit ωτὶ ἀριθμῶν: item Αριθμητικῆς ἱστορίας αὐξήσεως. Далѣе (стр. 327): Theofrastus ἱστοριῶν γεωμετρικῶν libros quatuor reliquit etc., ссылаясь при этомъ тоже на Діогена Лаэрція.

Baldi въ cronica di matematici, Urbino 1707, говоритъ (стр. 19): Teofrasto... compose quattro libri dell' historia Geometrica, sei dell' historia Astronomica, uno dell' argomento dell' historia Aritmetica, указывая при этомъ тотъ же упомянутый выше источникъ. Далѣе относительно Евдема Baldi говоритъ, что онъ написалъ между прочимъ исторію геометріи и астрологіи, причемъ прибавляетъ: queste arivarono sino à tempi di Simplicio et hora sono perdute.

Въ послѣднее время *Bretschneider* (Die Geometrie und die Geometer vor Euclides Leipzig 1870), какъ выше упомянуто, приводитъ выписку изъ сочиненія Simplicius'a (Simplicii comment. in octo Aristotelis physicae auscultationis libros. Venetiis 1526), въ которыхъ изложены свѣдѣнія по исторіи геометріи, взятыя у Евдема.

[180]) Въ изданномъ проф. Ейзенлоромъ папирусѣ Ринда, написанномъ вѣроятно за 1700 лѣтъ до Р. Х., составитель его Агамезу уже упоминаетъ

во многихъ средневѣковыхъ рукописяхъ и въ большинствѣ первопечатныхъ книгъ по математикѣ. Затѣмъ въ эпоху возрожденія, когда прониклись высокимъ уваженіемъ къ произведеніямъ древней греческой и римской цивилизаціи, приведеніе именъ классическихъ авторовъ въ отношеніи ихъ трудовъ, а нерѣдко и въ смыслѣ одного лишь авторитета, дѣлается весьма частымъ и даже какъ бы обязательнымъ, причемъ въ значительной мѣрѣ обращено было вниманіе и вообще на предшественниковъ. Къ половинѣ XVI столѣтія названный обычай принялъ ту историческаго характера и значенія форму, которая здѣсь была указана въ сочиненіяхъ Коперника, Кардана, Tartaglia, Bombelli и друг. При такихъ условіяхъ знаменитый французскій профессоръ Ramus издаетъ въ началѣ второй половины XVI столѣтія первое достаточно подробное и систематическое обозрѣніе исторіи математическихъ наукъ, а также излагаетъ современное ему ихъ состояніе, которое онъ наблюдалъ непосредственно во время своихъ продолжительныхъ путешествій, причемъ по внѣшней своей обстановкѣ трудъ Ramus'а въ значительной мѣрѣ можетъ быть отнесенъ къ разряду упомянутыхъ здѣсь сочиненій Коперника, Кардана, Tartaglia, Bombelli и друг., такъ какъ въ большинствѣ изданій онъ является въ видѣ обширнаго введенія къ изложенію математическихъ наукъ. Тѣмъ не менѣе произведеніемъ Ramus'а,

---

о предшественникахъ. [*Eisenlohr.* Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rind des British Museum). Leipzig 1877, S. 28 und 29]. Въ старинномъ китайскомъ сочиненіи Tcheou-pei, написанномъ по указанію Бернацкаго (*Biernatzki.* Arithmetique et Algebre des Chinois. Bulletin de bibliographie d'Histoire et de biographie mathématiques par Terquem, t. VIII, p. 36, Paris 1862) за 1160 лѣтъ до Р. Х. точно также встрѣчается подобное указаніе (*Biot.* Traduction et examen d'un ancien ouvrage chinois intitulé: Tcheou-pei etc. Journal asiatique, III série, t. 11, p. 599, Paris 1841; а также въ упомянутыхъ выше статьяхъ Бернацкаго).

Къ этому же разряду указаній должно быть отнесено и встрѣчающееся въ древнехалдейскомъ математическомъ памятникѣ выраженіе, переведенное Ленормавномъ: «согласно исчисленію Дилвуна» (*Lenormant.* Essai sur un document mathematique chaldeen. etc. Paris 1868, p. 136 etc.).

и въ особенности отдѣльнымъ его изданіемъ, было положено начало изложенію исторіи математическихъ наукъ въ формѣ самостоятельныхъ сочиненій описательнаго характера [181]).

---

[181]) Въ поясненіе и дополненіе изложенному въ текстѣ можно привести слѣдующее. Какъ выше было указано, *Rogg* (Bibliotheca mathematica, Tübingen 1830, p. 248), а за нимъ *Nesselmann* (Die Algebra der Griechen, Berlin 1842, p. 8) первое изданіе сочиненія Ramus'а относятъ къ 1559 году. Тоже самое подтверждаетъ *Chasles* (Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes en geometrie, Paris 1875, p. 479). Сочиненіе это, вышедшее подъ заглавіемъ Rami scholarum mathematicarum libri XXXI, имѣло три послѣдующихъ изданія, именно: Basileae 1569 (находится въ моемъ распоряженіи и цитируется у *Montucla*, Histoire des Mathematiques, Paris 1799, t. I, p. 576, у Rogg'а, Nesselmann, Chasles и др.); Francfurt 1599 (приведено у *Kästner*'а, Geschichte der Mathematik, Göttingen 1797, p. 381 подъ заглавіемъ: Scholae mathematicae, у Rogg'а, Chasles'я, и др.); Frankfurt 1627 (указано у Rogg'а, Chasles'я и др.) Названное здѣсь произведеніе Ramus'а, какъ выше упомянуто, состоитъ изъ 31 главы (libri XXXI), въ числѣ которыхъ первыя три, занимающія 112 стр. изъ 320 страницъ in 4°, составляющихъ все сочиненіе (по находящемуся у меня изданію 1569 года), заключаютъ упомянутое выше изложеніе историческаго движенія математическихъ наукъ, остальныя—ариѳметику и геометрію. Такимъ образомъ болѣе одной трети всего сочиненія посвящено обширному историческому введенію, которое по характеру своему, независимо отъ размѣровъ, напоминаетъ находящееся напр. при алгебрѣ *Bombelli* (Algebra, Bologna 1579). Такъ, именно какъ на обширное введеніе къ изложенію математическихъ наукъ, смотрѣли на историческій трудъ Ramus'а, не только его современники, но и послѣдующіе писатели до конца XVIII столѣтія т. е. въ теченіи болѣе двухъ вѣковъ. *Baldi* (Cronica di matematici, Urbino 1707 p. 135), ставя высоко имя Ramus'а, говоритъ: Scrisse questi le Scuole Matematiche, Geometriche, & Aritmetiche, nelle quali intorno alla materia degl' elementi, mostrò quant'-egli ne sapesse и т. д. вовсе не упоминая объ историческомъ трудѣ Ramus'а. *Vossius* (Chronologia mathematicorum, Amstelaedami 1650), говоря не разъ о Ramus'ѣ (стр. 15, 66 — 68, 319 и др.) и придавая вообще высокое значеніе его трудамъ, точно также не упоминаетъ о принадлежащемъ Ramus'у изложеніи исторіи математическихъ знаній. Въ томъ же духѣ, обращая мало вниманія на историческое введеніе, высказывались и многіе послѣдующіе писатели до Kästner'а включительно, который посвятивъ описанію сочиненія Ramus'а и изложенію его содержанія 14 страницъ (381 — 394) и указавъ обширное историческаго характера введеніе, самое сочиненіе Ramus'а включилъ въ число изданій по геометріи, ни слова не сказавъ о немъ въ предисловіи, гдѣ приводится списокъ сочиненій по исторіи математическихъ наукъ. Тоже самое сдѣлалъ и *Poppe* (Geschichte der Mathematik, Tübingen 1828, p. 590).

Тѣмъ не менѣе самъ Ramus придавалъ бóльшее значеніе своему труду по исторіи математики, чѣмъ послѣдующіе писатели, такъ какъ выпустилъ

Впрочемъ подобныя сочиненія начали появляться лишь во второй половинѣ XVIII столѣтія (Montucla), т. е. спустя 200 лѣтъ послѣ Ramus'а, а въ текущемъ XIX столѣтіи эта форма изложенія исторіи математическихъ наукъ получаетъ преобладающее значеніе. Въ тоже время обычай приводить историческія указанія въ текстѣ математическаго сочиненія, или излагать ихъ въ предисловіи, какъ видно изъ вышеприведеннаго списка, не только не переставалъ существовать въ теченіи XVII и XVIII столѣтій, но встрѣчается и до сихъ поръ.

Выше мы видѣли, что математическая біографія, получившая свое начало еще въ XV столѣтіи, въ XVI принимаетъ болѣе опредѣленную форму. Къ концу этого столѣтія въ трудахъ знаменитаго итальянскаго ученаго Baldi, знатока многихъ языковъ[182]) и путешественника не по необходимости, близкой къ изгнанію, какъ Ramus, а съ цѣлію пріобрѣтенія познаній, изъ математической біографіи возникаетъ новая и вполнѣ самостоятельная форма исторіи математическихъ наукъ. Baldi слишкомъ широко для своего времени поставилъ задачу — написать при полномъ почти отсутствіи подготовительныхъ ра-

---

его отдѣльнымъ изданіемъ подъ заглавіемъ: *Rami*, Proemium mathematicum, Parisii 1567 т. е. подъ тѣмъ самымъ, которымъ озаглавлены первыя три книги его scholarum mathematicarum. Въ существованіи этого изданія, не перепечатаннаго, сколько извѣстно, въ послѣдствіи ни разу и такъ мало цитируемаго авторами, въ тоже время не представляющагося въ библіографическомъ отношеніи ни рѣдкимъ, ни цѣннымъ, у меня возникало сомнѣніе до полученія подлиннаго экземпляра. *Montucla* (Histoire des Mathematiques. Paris 1758, t. I, p. 466, гдѣ приведено лишь названіе безъ указанія мѣста и года изданія, и Histoire des Mathematiques, Paris 1799, t. I, p. 576, гдѣ указаны годъ и мѣсто изданія, Paris 1567) считаетъ это сочиненіе Ramus'а лишь панегирикомъ математикѣ и только Nesselmann (ibid. p. 8) причислилъ его къ произведеніямъ по ея исторіи. Вотъ это отдѣльное изданіе и укрѣпляетъ за собою право перваго самостоятельно изданнаго труда по исторіи математическихъ наукъ.

[182]) Поэтому поводу Vossius (Chronologia Mathematicorum etc., Amstelaedami 1650, p. 304) говоритъ: vir fuit non solum Mathesios universae peritissimus; sed etiam (ut Germanicam, Gallicam et Slavonicam linquam omittam) Latine, Graece, Hebraicè, Chaldaicè et Arabicè doctissimus.

ботъ обширную исторію математики въ формѣ послѣдовательнаго ряда въ хронологическомъ порядкѣ расположенныхъ біографій ея дѣятелей, причемъ для каждаго изъ этихъ дѣятелей указать его заслуги въ развитіи математическихъ знаній, а также оставленныя имъ сочиненія[183]). Такая система, возобновившаяся въ самое послѣднее время въ изданіи французскаго ученаго Marie, болѣе соотвѣтствовала требованіямъ эпохи, и въ то время какъ указанное выше произведеніе Ramus'а при его громкомъ имени оставалось долго незамѣченнымъ, сочиненіе Baldi, будучи неизданнымъ до сихъ поръ, пользовалось уже въ свое время извѣстностію[184]) и послужило исходною точкою для цѣлаго ряда послѣдующихъ изданій хронолого-библіографическаго характера, составляющихъ преобладающую форму изложенія исторіи математики въ теченіи XVII, а въ Германіи и въ теченіи XVIII столѣтій.

Такимъ образомъ исторія математики, какъ самостоятельная отрасль знанія, зародилась въ XVI столѣтіи и притомъ почти одновременно въ двухъ формахъ: въ историко-описательной и въ хронолого-біографической[185]). Начало первой положено въ половинѣ столѣтія Ramus'омъ (1515 — 1572) во Франціи, представителемъ второй къ концу столѣтія является

---

[183]) Какъ выше было указано, главное сочиненіе Baldi по исторіи математики до сихъ поръ остается неизданнымъ полностію и находится въ рукахъ кн. Boncompagni. Но судя по напечатаннымъ изъ него отрывкамъ, а также по изданной еще въ 1707 году Cronica di matematici, является возможнымъ установить принятую Baldi систему изложенія. При этомъ нельзя не замѣтить, что система Baldi-Marie имѣетъ преимущество предъ лексикономъ Poggendorff'а въ томъ отношеніи, что въ ней, при легкости отыскать данаго автора по приложенному въ концѣ алфавитному ихъ списку, соблюдается хронологическая послѣдовательность въ изложеніи.

[184]) Vossius напримѣръ, не упоминая вовсе въ своей Chronologia mathematicorum (Amstelaedami 1650) о трудѣ Ramus'а по исторіи математики, по поводу Baldi говоритъ (стр. 304): Scripsit... vitas omnium Mathematicorum; partim à Thalete usque ad Christum; partim à Christo ad sua usque tempora.

[185]) При этомъ не принято въ разсчетъ названное выше, упоминаемое нѣкоторыми авторами, остающееся въ рукописи сочиненіе Andreae stribori ibellus de auctoribus matematicis.

Baldi (1553 — 1617) въ Италіи. Одновременно съ возникновеніемъ исторіи математики въ указанныхъ двухъ формахъ, появляется рядъ относящихся къ ней монографій, начало которыхъ, какъ мы видѣли, восходитъ до XV столѣтія. Монографіи эти, способствуя въ значительной мѣрѣ обращенію вниманія на математическія знанія вообще и на ихъ исторію въ частности и продолжая появляться въ теченіи XVII и XVIII столѣтій, въ XIX, преобразовавшись бóльшею частію въ мемуары для періодическихъ изданій, получаютъ важное преобладающее значеніе по содержанію множества цѣнныхъ историко-математическихъ изслѣдованій.

Въ XVII столѣтіи исторія математики вступаетъ въ новую фазу своего развитія. Какъ выше было указано, система Baldi, болѣе соотвѣтствующая духу времени, остановила на себѣ вниманіе и уже въ 1615 году итальянецъ Biancani (Blancanus) издаетъ въ Болоньѣ хронологію знаменитыхъ матемакитовъ[186]), впрочемъ отличающуюся отъ сочиненія Baldi стремленіемъ библіографическаго элемента получить преобладающее значеніе. Начавшійся такимъ образомъ въ сочиненіи Blancanus'а переходъ къ упомянутой выше хронолого-библіографической формѣ развитія исторіи математическихъ знаній, въ значительной мѣрѣ былъ подвинутъ трудомъ Vossius'а[187]). Въ сочиненіи Baldi личность автора и его біографія имѣютъ первенствующее значеніе, причемъ объ оставленныхъ имъ трудахъ говорится, какъ о необходимыхъ дополнительныхъ свѣдѣніяхъ къ его біографіи; въ сочиненіи Blancanus'а и въ особенности Vossius'а личность автора отодвигается постепенно на второй планъ, а главное вниманіе посвящено указаніямъ его трудовъ. Поэтому собственно біографическій элементъ, за немногими ис-

---

[186]) Josephus *Blancanus* Bononiensis. Aristotelis loca mathematica etc. Access ere de natura mathematicarum scientiarum tractatio; atque Clarorum Mathematicorum Chronologia. Bononiae 1615. Описано выше.

[187]) Gerardi Joannis *Vossii* de quatuor artibus etc., cui subjungitur chronologia mathematicorum libri tres. Amstelaedami 1650. Описано выше.

ключеніями, вовсе отсутствуетъ, хотя впрочемъ еще и библіографическая часть не получила должнаго развитія, такъ какъ подлинныя заглавія указываемыхъ сочиненій обыкновенно не приводятся. Въ дальнѣйшемъ развитіи приведеніе заглавій описываемыхъ сочиненій дѣлается все болѣе подробнымъ и обстоятельнымъ, особенно въ XVIII столѣтіи, и такимъ образомъ постепенно вырабатывается указанная выше хронолого-библіографическая форма исторіи математическихъ знаній. Кромѣ того здѣсь же получила свое начало математическая библіографія въ тѣсномъ смыслѣ слова, представителемъ которой въ XVII столѣтіи является, какъ мы видѣли, Beughem.

Приведеніе свѣдѣній по исторіи математическихъ наукъ въ предисловіяхъ или въ самомъ ихъ изложеніи продолжаетъ, какъ выше упомянуто, существовать и въ XVII столѣтіи, причемъ является въ болѣе развитой и обработанной формѣ. Особенно характерный и выдающійся примѣръ этому составляетъ вышедшій въ концѣ столѣтія трактатъ Wallis'а по алгебрѣ[188]),

[188]) *Wallis.* Treatise of Algebra both historical and practical with some additional treatises. London 1685.

По внутреннему содержанію, а частію въ отношеніи формы изложенія и сообщаемыхъ историческихъ свѣдѣній алгебра Wallis'а можетъ быть поставлена, какъ связующее звѣно между указаннымъ выше сочиненіемъ Ramus'а и послѣдующими описательнаго характера произведеніями по исторіи математики, вышедшими въ XVIII столѣтіи, отъ которыхъ вполнѣ отличается принятою внѣшнею формою приводить историческія указанія въ текстѣ излагаемаго предмета. Это обстоятельство было причиною тому, что алгебру Wallis'а пришлось отнести къ разряду сочиненій, въ которыхъ исторія математики сопровождаетъ изложеніе самаго предмета и, не смотря на всю цѣнность сообщаемыхъ указаній, является какъ бы имѣющую второстепенное значеніе. Тѣмъ не менѣе самъ Wallis исторіи математическихъ знаній придавалъ высокое значеніе. Одно изъ первыхъ его произведеній, вступительная рѣчь, произнесенная въ Оксфордѣ 11 октября 1649 года и напечатанная въ 1657 году (*Johannis Wallis*, Oratio inauguralis etc.) посвящена краткому обозрѣнію исторіи математическихъ знаній преимущественно у древнихъ народовъ: Египтянъ, Халдеевъ и пр. Затѣмъ въ послѣдующихъ произведеніяхъ Wallis'а (какъ напр.: Arithmetica infinitorum, Oxoniae 1655; Mathesis universalis: sive arithmeticum opus integrum, Oxoniae 1657, Tractatus de cicloide, Oxoniae 1659; Mechanica, sive de motu, tractatus geometricus, Londini 1669 и др.) историческій элементъ вообще играетъ выдающуюся роль.

появленіе котораго, помимо предшествующихъ трудовъ въ области исторіи математическихъ знаній, въ значительной мѣрѣ могло быть вызвано и характеромъ самой эпохи. XVII вѣкъ, кромѣ усиленнаго развитія математическихъ знаній вообще, необходимо отмѣтить и какъ время перехода алгебраическаго обозначенія изъ одного періода въ другой. Обстоятельство это составляетъ причину появленія особаго характера сочиненій, въ которыхъ алгебра излагается двояко: помощію существовавшаго прежде обозначенія (algebra vetus) и помощію народившагося новаго (algebra nova). Замѣчательный примѣръ такой двойственности мы наблюдаемъ въ упоминаемомъ не разъ выше трудѣ Renaldini[189]). Въ томъ же родѣ, хотя менѣе рельефно, написаны сочиненія Joannis de Luneschlos[190]), Caramuel-Lobkowitz[191]) и нѣкоторыя другія. Но сочиненія эти, вышедшія около половины XVII столѣтія и представляющія особый историческій интересъ, какъ произведенія переходной эпохи въ развитіи алгебраическаго обозначенія, тѣмъ не менѣе съ точки зрѣнія исторіи математики, какъ науки, должны быть отнесены къ разряду такихъ, въ которыхъ историческія свѣдѣнія являются второстепенными и сопровождаютъ обыкновенно изложеніе самаго предмета. Алгебра Wallis'а, отвѣчающая до извѣстной степени описанному типу, въ отношеніи обработки и систематичности приведенія историческихъ указаній, рѣзко выдѣляется изъ среды упомянутыхъ сочиненій и имѣетъ

---

[189]) *Renaldini.* Ars analitica mathematum. Florentiae 1665. Первую часть составляетъ algebra vetus, вторую algebra nova.

Riccardi (Biblioteca matematica italiana, Modena 1870—1880, p. 347) указываетъ нѣсколько предшествующихъ изданій Renaldini того же характера, именно: Caroli *Renaldini* opus algebricum in quo praeter communem et antiquam algebram Nova quoque pertractatur etc., Anconae 1644; Caroli *Renaldini* opus mathematicum in quo utraque Algebra, vetus scilicet, nova à se in opere, hae de re pridem edito, pertractata novis praeciptis etc., Bononiae 1655.

[190]) *Joannis de Luneschlos.* Algebra nova. Patavii 1646. Описана выше.

[191]) *Joannis Caramuelis.* Mathesis biceps vetus et nova. Companiae 1670.

важное значеніе въ исторіи математическихъ знаній. Въ текущемъ XIX столѣтіи указанное направленіе возобновилось до извѣстной степени въ изложеніи Matthiessen'а древней и новой алгебры буквенныхъ уравненій [192]).

Итакъ въ XVII столѣтіи исторія математики продолжаетъ свое развитіе во вновь образовавшейся хронолого-библіографической формѣ. Въ тоже время унаслѣдованное отъ предшествующаго столѣтія приведеніе свѣдѣній по исторіи математическихъ наукъ въ ихъ изложеніи принимаетъ замѣчательно развитую форму (Wallis) и появляется также въ общихъ собраніяхъ этихъ наукъ (Herigone, Schottus, Milliet Dechalles) и въ математическихъ лексиконахъ (Vitalis, Ozanam).

XVIII столѣтіе въ отношеніи развитія математическихъ знаній является періодомъ національнаго обособленія, начало котораго восходитъ еще къ концу XVII — къ эпохѣ дѣятельности Лейбница и Ньютона. Обособленіе это, послужившее исходною точкою для образованія національныхъ математическихъ школъ, отразилось и въ развитіи исторіи математики. Въ то время какъ въ теченіи двухъ предшествующихъ столѣтій относящіяся къ ней сочиненія написаны почти всѣ по латыне, въ XVIII столѣтіи преобладаніе является на сторонѣ національныхъ живыхъ языковъ, на которыхъ изложены лучшія произведенія разсматриваемаго періода (Montucla и Cossali) [193]).

---

[192]) *Matthiessen.* Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig 1878. Описано выше.

Здѣсь кстати слѣдуетъ замѣтить, что Matthiessen приводитъ различныя алгебраическія обозначенія вообще какъ любопытный фактъ второстепеннаго характера, не заслуживающій особаго вниманія.

[193]) Первое начало изложенію исторіи математики живымъ національнымъ языкомъ положилъ Baldi въ Италіи къ концу XVI столѣтія. Впрочемъ слѣдуетъ замѣтить вообще, что примѣненіе итальянскаго языка къ изложенію сочиненій по математикѣ, преимущественно ариѳметическаго характера, получаетъ значительное развитіе уже въ XV столѣтіи. Обстоятельство это легко объясняется тѣмъ, что Италія указаннаго времени обладала обширной торговлей и нуждалась въ руководствахъ для коммерческихъ вычисленій, причемъ подобныя руководства могли удовлетворять сказанную потребность

Впрочемъ Германія въ теченіи всего XVIII столѣтія отдаетъ преимущество латинскому языку, а съ нимъ вмѣстѣ и традиціонной, сформировавшейся еще въ предыдущемъ XVII столѣтіи

лишь будучи написаны на живомъ языкѣ. Дѣйствительно, въ настоящее время извѣстны слѣдующія, относящіяся главнымъ образомъ къ ариѳметикѣ, изданія XV столѣтія на итальянскомъ языкѣ:

Incomincia una pratica molto bona et utile: a ciaschaduno chivaole uxare larte de la merchadantia. Chiamata vulgarmente larte de labbacho. Treviso 1478. Кн. Boncompagni далъ обширное (около 500 страницъ in 4°) изслѣдованіе этого перваго и крайне рѣдкаго печатнаго произведенія по ариѳметикѣ въ Atti dell' Academia Pontifica de' nuovi Lincei за 1862 и 1863 гг. подъ заглавіемъ: Intorno ad un trattato d'aritmetica stampato nel 1478, причемъ приведено много факсимильныхъ снимковъ.

Petro *Borghi*. Qui comenza la nobel opera de l'arithmetica nella qual se tracta tute cosse a mercantia pertinente. Venetia 1484. Послѣдующія изданія: Venexia 1488, Venetia 1491 и 6 изданій первой половинѣ XVI столѣтія. Всѣ изданія этого сочиненія считаются рѣдкими и очень цѣнятся, особенно первыя; въ моемъ распоряженіи находится изданіе 1561 года подъ заглавіемъ: Pietro Borghi. Libro de Abacho. Venetia 1561.

Pellos o Pellizzati. Sen segue de la art de arithmetica. et sembantment de ieumetria dich ho nominat Compendion de lo abaco. Thaurino 1492. Описаніе этой крайне рѣдкой книги, изложенной на употребительномъ въ то время въ Ниццѣ нарѣчіи, находится въ тойже упомянутой выше статьѣ кн. Boncompagni: Intorno ad un trattato d'aritmetica stampato nel 1478, p. 332—335.

Luca de Borgo, San Sepolcro (Pacioli). Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita. Venetijs 1494. Второе изданіе 1523 года. Первое находящееся въ моемъ распоряженіи изданіе этого весьма рѣдкаго «перваго напечатаннаго произведенія по алгебрѣ и вѣроятно по бухгалтеріи» (It is certainly the first printed on algebra and probably the first on book-keeping. *De Morgan*. Arithmetical books. London 1847, p. 2), раздѣлено, согласно данному суммаріуму, на пять частей, изъ которыхъ первая содержитъ теоретическія (speculativa aspecti) свѣдѣнія по ариѳметикѣ, и алгебрѣ «необходимыя для музыканта, астролога, космографа, архитектора, законодателя и медика» (... a ogni bisogno prosepectivo: musico: astrologo: cosmografo: architecto: legista: e medico); слѣдующія три заключаютъ свѣдѣнія, относящіяся исключительно къ торговлѣ, именно: бухгалтерію, коммерческіе обычаи, вѣса и мѣры, переводные векселя (тратты и римессы) и пр. Пятая же часть посвящена геометріи теоретической и практической.

Всѣ названныя сочиненія предназначены главнымъ образомъ для лицъ занимающихся торговлей, причемъ послѣднее носитъ на себѣ болѣе теоретическій харектеръ, хотя и послѣ долго было въ обычаѣ излагать алгебру и геометрію въ сочиненіяхъ, предназначаемыхъ для торговыхъ цѣлей. Напр. въ моемъ распоряженіи находится довольно рѣдкое изданіе на голландскомъ языкѣ: Nicolaus *Petri* Daventriensis. Practicque Omte Leeren Rekenen Cypheren ende

хронолого-библіографической формѣ изложенія исторіи математическихъ знаній. Дѣйствительно, въ то время какъ Монтюкля

Boeckhouden met die Regel Coss ende Geometrie seer profijtelijcken voor alle Coopluyden. Amstelredam 1598, (первое изданіе 1583 г.), замѣчательное въ томъ отношеніи, что въ немъ обстоятельно изложенныя ариѳметика, алгебра и геометрія съ тригонометріей, «весьма полезныя для всякой торговли» (seer profijtelijcken voor alle Coopluyden), предшествуютъ изложенію бухгалтеріи.

Въ XVI столѣтіи на итальянскомъ языкѣ встрѣчаются изданія вполнѣ научнаго характера.

Впрочемъ изданія по ариѳметикѣ для торговыхъ цѣлей, изложенныя національнымъ языкомъ, встрѣчаются не только въ Италіи, но и въ другихъ странахъ, особенно въ XVI столѣтіи, какъ напримѣръ: во Франціи *John de Lortse* (Ouevre tressubtile et profitable de lart et science de arithmetique. Lyon 1515), *De la Roche* (L'arismetique etc. Lyon 1520); въ Англіи—*Recorde* (The Ground of Artes. London 1561); въ Германіи—*Iacob Kobel* (Ain Nerv geordnet Rechen biechlin auf den linien mit Rechen pfenigen etc. Augsburg 1514), *Adam Riese* (Rechnung auf der Linien und Federn auf allerley Handthierung, Francfurt 1544, по Kästner'у, Geschichte der Mathematik, Götingen 1796, T. I, p. 108; другіе же указываютъ болѣе раннее изданіе, Erfurt 1522. Сочиненіе Adam Riese имѣло много послѣдующихъ изданій) и другіе. Правда въ Германіи извѣстно одно подобное изданіе XV столѣтія, именно:

Iohannes *Widman von Eger*. Behende und hubsche Rechenung auff allen kauffmanschaft. Leipczich 1489. Изслѣдованіе этого крайне рѣдкаго и интереснаго изданія дано кн. Boncompahni въ статьѣ подъ заглавіемъ: Intorno ad un trattato d'aritmetica di Giovanni Widmann von Eger. Bulletino di bibliografia e di storia etc. T. IX, p. 188, Roma 1876. Въ сочиненіи Widmann'a Eger'а, сколько до сихъ поръ извѣстно, встрѣчаются первый разъ знаки + и —.

Къ характеристикѣ взглядовъ, существовавшихъ въ XVI и XVII столѣтіяхъ на употребленіе національнаго языка для изложенія математическихъ сочиненій необходимо замѣтить, что Vossius (Chronologia Mathematicorum, Amstelaedami 1650), отличающійся вообще подробностію въ отношеніи библіографическихъ указаній, какъ бы избѣгаетъ называть произведенія тѣхъ авторовъ, которые писали національнымъ языкомъ, считая вѣроятно такія произведенія, какъ написанныя не по латыне, незаслуживающими вниманія. Изъ вышеприведенныхъ здѣсь сочиненій встрѣчается, и то лишь мимоходомъ, указаніе на ариѳметику Luca de Burgo (p. 314). Кромѣ того объ Arithmetica integra Michaëli Stifelii, Norimbergae 1544, написанной по латыне, Vossius (p 317) очень распространяется и въ тоже время вовсе не указываетъ знаменитую алгебру на нѣмецкомъ языкѣ Christophor'a Rudolf'а 1525, о которой Stifel упоминаетъ почти на каждой страницѣ своего сочиненія и которая была имъ издана съ дополненіями въ 1553 году, а затѣмъ перепечатана еще два раза—въ 1571 году и въ 1615 году въ Амстердамѣ на голандскомъ языкѣ (*Rogg.* Bibliotheca Mathematica, Tübingen 1830, p. 55.)

во Франціи въ половинѣ XVIII столѣтія даетъ замѣчательный, всеобъемлющій научный трудъ по исторіи математики, въ Германіи Christian Wolf, Heilbronner, Frobesius и даже Kästner, т. е. до 1800 года, продолжаютъ разработывать упомянутую хронолого-библіографическую ея форму [194]).

Такимъ образомъ Франція въ половинѣ XVIII столѣтія (1758) произведеніемъ Montucla создаетъ эпоху въ развитіи исторіи математическихъ наукъ. И здѣсь вслѣдъ за ней, какъ 200 лѣтъ раньше, въ XVI столѣтіи [195]), выступаетъ Италія изданіемъ въ 1797—1799 гг. труда по исторіи алгебры Cossali, по характеру одинаковаго съ произведеніемъ Montucla и обладающаго выдающимся значеніемъ въ движеніи исторіи математическихъ знаній. Тѣмъ не менѣе для полученія болѣе точнаго представленія о разсматриваемомъ періодѣ необходимо упомянуть, что непосредственно за изданіемъ указаннаго произведенія Montucla во Франціи же появился и описанный выше трудъ Saverien, совершенно не соотвѣтствующій первому по своему часто крайне неправильному изложенію наиболѣе извѣстныхъ фактовъ.

Начало появленія историко-математическихъ изслѣдованій въ формѣ мемуаровъ, помѣщаемыхъ въ соотвѣтствующихъ періодическихъ изданіяхъ, тоже должно быть отнесено къ XVIII

---

[194]) «Странная книга» говоритъ, какъ мы видѣли, Nesselmann (Die Algebra der Griechen, Berlin 1842, S. 24 und 25) по поводу сочиненія Kästner'а, «её можно назвать всѣмъ, чѣмъ угодно, только не исторіей математики». Между тѣмъ сочиненіе Kästner'а соотвѣтствуетъ духу времени и отвѣчаетъ господствовавшей въ то время въ Германіи формѣ изложенія исторіи математическихъ наукъ.

[195]) Вотъ нѣкоторыя подробности относительно случайно образовавшейся параллели между XVI и XVIII столѣтіями въ развитіи исторіи математическихъ знаній. Во Франціи Ramus издалъ первую достаточно подробную исторію математики въ 1559 году, въ Италіи Baldi далъ выдающееся сочиненіе по тому же предмету въ концѣ XVI столѣтія. Двѣсти лѣтъ спустя, именно въ 1758 году во Франціи Montucla изданіемъ своего труда создаетъ эпоху въ развитіи исторіи математики; къ концу XVIII столѣтія въ Италіи появляется выдающееся произведеніе Cossali.

столѣтію. Указанная форма развитія исторіи математики оказалась впослѣдствіи столь плодотворною, что въ настоящее время въ ней именно заключается наиболѣе существенный источникъ для правильно поставленныхъ общихъ сочиненій въ этомъ направленіи.

Впрочемъ XIX столѣтіе, и въ особенности вторая его половина, вообще должны быть отмѣчены, какъ время обширнаго и крайне разнообразнаго движенія исторіи математическихъ наукъ. Кромѣ продолжающагося развитія указанныхъ выше, установившихся еще въ предшествовавшихъ столѣтіяхъ формъ, въ настоящее время образовалось много новыхъ, создавшихъ упомянутое разнообразіе въ движеніи исторіи математическихъ знаній. При такихъ условіяхъ становится въ значительной степени затруднительнымъ дать полную картину этого движенія, тѣмъ неменѣе нельзя не отмѣтить главнѣйшихъ его формъ и выдающихся моментовъ.

Прежде всего необходимо указать на возрастающее стремленіе къ изученію древнихъ математическихъ произведеній въ подлинникахъ, что́ составляетъ наиболѣе прочное основаніе для полученія точныхъ знаній относительно первоначальнаго развитія математическихъ наукъ. Этимъ объясняется увеличивающееся число изданій такихъ произведеній какъ въ переводѣ, такъ и въ подлинникѣ. Впрочемъ еще въ самую раннюю эпоху развитія книгопечатанія, именно уже въ XV столѣтіи, давали изданія произведеній классическихъ авторовъ съ цѣлію болѣе близкаго съ ними ознакомленія, частію въ подлинникѣ, какъ напр. сочиненія Боэція[196]), частію въ переводѣ, какъ напр.

[196]) Первое изданіе ариѳметики Боэція было произведено въ 1488 г. въ Венеціи подъ заглавіемъ: Arithmetica Boetij. Первое изданіе полнаго собранія сочиненій Боэція было дано тоже въ Венеціи въ 1491 году; на заглавномъ листѣ его обозначено: Hęc sunt opera Boetii: quę in hoc volumine continentur, и перечислены всѣ произведенія Боэція. Находящійся въ моемъ распоряженіи хорошо сохранившійся экземпляръ этого изданія имѣетъ красные заголовки первыхъ двухъ отдѣловъ и двойную нумерацію отъ 1 до 220, листа — окончаніе геометріи, причемъ на 220 листѣ обозначенъ годъ 1492;

элементы Эвклида на латинскомъ языкѣ [197]). Въ XVI столѣтіи былъ изданъ и подлинный текстъ Эвклида на греческомъ языкѣ [198]), а также произведенія нѣкоторыхъ другихъ греческихъ математиковъ. Кромѣ того, въ Европу математическія познанія перешли въ большей части отъ арабовъ, а потому является вполнѣ понятнымъ, вслѣдъ за изданіемъ еще въ XV столѣтіи переводовъ съ арабскаго [199]), появленіе изданія Эвклида и въ подлинникѣ т. е. на арабскомъ языкѣ, уже въ XVI столѣтіи [200]).

Въ XVII столѣтіи печатаніе произведеній греческихъ математиковъ въ подлинникахъ продолжалось, причемъ выдающимися являются указанныя выше два изданія ариѳметики Діо-

---

затѣмъ вторичная нумерація отъ 160 листа до 250 послѣдняго, на которомъ указанъ годъ MCCCCLXXXXI т. е. 1491 г.

[197]) Первое до сихъ поръ извѣстное изданіе Эвклида на латинскомъ языкѣ было сдѣлано въ Венеціи въ 1482 году подъ заглавіемъ: Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem Geometrie incipit quam foelicissime etc.; перепечатано въ 1491 году.

[198]) Ἐυκλείδου στοιχείων βίβλ. ιε. ἐκ των Θεωνος συόυσιων. ἐις το αυτου το πρῶτον ἐξηγημα των Προκλου βιβλ. δ. Basileae 1533. Знаменитое editio princeps.

[199]) Укасанное выше первое изданіе Эвклида, напечатанное въ 1482 г. въ Венеціи, представляетъ собою въ тоже время и первый переводъ его съ арабскаго, сдѣланный Ателярдомъ въ 1130 году, съ комментаріями Campanus'а (*Ващенко-Захарченко.* Начала Евклида. Кіевъ 1880 стр. 79).

[200]) كتاب تحرير اصول الاوقليدس من تاليف خوجه نير الدصين الطوسى

(Книга началъ Эвклида въ переводѣ ученаго Насиръ-Еддинъ-ель-Тузи) безъ указанія года и мѣста изданія.

Vossius (Chronologia Mathematicorum, Amstelaedami 1650, p. 69) говоритъ, что папа Сикстъ V въ 1589 году основалъ въ Римѣ первую въ Европѣ арабскую типографію, въ которой между прочимъ были напечатаны элементы Эвклида на арабскомъ языкѣ. *Bernardus* (Veterum mathematicorum, Graecorum, Latinorum et Arabum synopsis. Londini 1704, p. 2) относитъ это изданіе къ 1594 году. *Kästner* (Geschichte der Mathematik, Göttingen 1796, S. 254) указывая тоже 1594 годъ этого изданія, въ тоже время считаетъ его, на основаніи указаній Scheibel'я, вышедшимъ въ Римѣ изъ типографіи Медичисовъ. *Zenker* (Bibliotheca Orientalis, pars I, p. 84, Lipsial 1810) называетъ годъ и мѣсто этого изданія: Roma 1594. Кромѣ того Zenker (ibid.)

фанта съ латинскимъ переводомъ (изданіе Bachet de Meziriac 1621 года и изданіе Fermat 1670 года). Произведенныя въ XVI и XVII столѣтіяхъ изданія подлинниковъ обнимаютъ собою большую часть греческихъ авторовъ, рукописи сочиненій которыхъ дошли до насъ, а потому для XVIII и XIX столѣтій осталось лишь повторенія этихъ изданій съ комментаріями и съ исправленіемъ по различнымъ спискамъ.

Тѣмъ не менѣе изданія подлинныхъ сочиненій восточныхъ метематиковъ начали производиться лишь въ текущемъ XIX столѣтіи. Починъ въ этомъ направленіи, какъ мы видѣли, принадлежитъ англичанамъ. Почти одновременно, именно Strachey въ 1812 году, Taylor въ 1816 году и Colebrooke въ 1817 году, издали три перевода сочиненія знаменитаго индусскаго математика XII столѣтія Bhaskara-Acharya. Но какъ выше было замѣчено, всѣ эти переводы обладаютъ существеннымъ недостаткомъ, именно недаютъ болѣе или менѣе точнаго представленія о подлинникѣ, въ особенности переводъ Strachey'я, изложенный употребляемымъ нами символизмомъ [201]). Такими же являются въ значительной мѣрѣ изданія сочиненій арабскихъ

указываетъ также второе изданіе Евклида на арабскомъ языкѣ, London 1659, а также изданіе первыхъ VI книгъ,

ستة مقالات من كتاب الاقليدس

произведенное въ Калькуттѣ въ 1824 г. (*Zenker*, Bibliotheca Orientalis T. II. p. 70, Leipzig 1861). Въ библіографіи Riccardi (Bibliotheca matematica itatiana, Modena 1870—1880) приведенное изданіе Эвклида 1594 года на арабскомъ языкѣ вовсе не названо.

Находящійся въ моемъ распоряженіи прекрасно сохранившійся экземпляръ этого крайне рѣдкаго изданія 1594 г. напечатанъ на великолѣпной бумагѣ съ широкими полями и множествомъ хорошо выполненныхъ чертежей, содержитъ 453 страницы нумерованныхъ и одну ненумерованную (*Kästner*, ibid. указываетъ лишь 400 страницъ, на которыхъ въ принадлежащемъ мнѣ экземплярѣ помѣщаются только первые 12 книгъ, а 13 книга занимаетъ съ 401 по 453 стр. включительно).

[201]) Полученный мною во время печатанія настоящаго предисловія экземпляръ перевода Тайлора подъ заглавіемъ: *John Taylor*. Lilavati: or a treatise on arithmetik and Geometry by Bhascara-Acharya. Bhombay 1816, подходитъ болѣе къ переводу Colebooke'a.

Сочиненія Bhascara-Acharya были изданы нѣсколько разъ въ Индіи въ

математиковъ[202]), хотя впрочемъ нѣкоторыя наиболѣе выдающіяся произведенія арабской математической литературы изданы въ текущемъ столѣтіи и въ подлинникахъ[203]). Въ по-

---

подлинникѣ на санскритскомъ языкѣ. Въ моемъ распоряженіи находятся слѣдующія изъ этихъ изданій:

लीलावती श्रीभास्कराचार्य्यविरचिता १८३२

«Лилавати Сри Бгаскара-Ачаріа-Вирачита 1832». Печат. въ Калькуттѣ.

वीजगणितं

«Віа-Ганита», рѣдкое изданіе, Калькутта 1834.

Кромѣ того изданіе на телугинскомъ нарѣчіи:

(శ్రీ)....భాస్కరాచార్యుల....లీలావతి....౧౮౬౩

«Сри... Бгаскара Ачаріа... Лилавати... 1863». Печат. въ Мадрасѣ.

Всѣ эти изданія предназначены для индускихъ школъ.

202) Какъ напримѣръ:

Woepcke. Extrait du Fakhri, traité d'algèbre par Abou Bekr Mohammed ben Alhaçan-Alkarkhi. Paris 1853.

Marre Aristide. Kholaçat al Hissab, ou Quintessence du calcul par-Reha-Eddin al-Aamouli. Rome 1864. Въ моемъ распоряженіи находится это второе изданіе.

Marre Aristide. Le Talkhys d'Ibn Albanna. Rome 1865.

Hochheim Adolf. Kafi fil Hisab des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhi. Halle 1878—1880.

И другія. Всѣ эти переводы, сдѣланныя употребляемымъ нами символизмомъ, не позволяютъ составить точнаго представленія о подлинникахъ.

203) Вотъ извѣстныя мнѣ изданія произведеній арабскихъ математиковъ въ подлинникахъ:

خلاصة الحسب

Cholasat ul Hisab. A compendium of arithmetic and geometry by Buhae-ood-Deen of Amool in Syria, in the arabic language with a translation into persian and commentary by the late Muolowee Roushun Ulee of Juonpoor etc.. Calcutta 1812. Очень рѣдкое изданіе, указанное у *Zenker*'a (Bibliotteca orientalis, Lipsiae 1840 p. 32 et 33). О немъ упоминаетъ *Woepcke* (Extrait du Fakhri, Paris 1853 p. 1) и др.

الكتاب المختصر فى حساب الجبر و المقابلة تصنيف الشيخ الاجل
ابى عبد الله محمد بن موسى الخوارزمى * لندن سنــة ١٨٣٠ *

The algebra of Mohammed ben Musa, edited and translated by F. Rosen. London 1831. Въ арабскомъ текстѣ находящагося въ моемъ распоряженіи экземпляра этого довольно рѣдкаго изданія указанъ 1830 г.

слѣднее время на памятники математической литературы востока обратили вниманіе ученные филологи, которые, убѣдившись съ давнихъ поръ въ огромномъ значеніи подлинника въ томъ видѣ, какъ онъ написанъ, свои изслѣдованія математическихъ сочиненій востока сопровождаютъ изданіемъ ихъ точнаго факсимиле. Починъ въ этомъ направленіи принадлежитъ знаменитому изслѣдователю въ области археологіи и древней исторіи востока Lenormant'у, издавшему хотя автографическимъ способомъ, но съ стремленіемъ быть по возможности близкимъ къ подлиннику, математическій документъ древнихъ Халдеевъ [204]). Замѣчательнымъ же изданіемъ въ этомъ направленіи является не-разъ упоминаемое выше, сдѣланное проф. Эйзенлоромъ изслѣдованіе математическаго документа древнихъ Египтянъ, причемъ въ приложенномъ къ этому изслѣдованію атласѣ воспроизведенъ тожественно самый подлинникъ— папирусъ Ринда. Подобныя изданія даютъ возможность основа-

---

خلاصة الحساب تصنيف بهاءالدين محمد بن الحسين العاملى
Essenz der Rechenkunst herausgegeben von *Nesselmann* (съ переводомъ на нѣмецкій) Berlin 1843.

رسالة الحكيم الفاضل غياث الدين ابى الفتح عمر بن ابراهيم
الخيامى النيشابورى قدس الله روحه العزيز فى البراهين على مسايل
الجبر و المقابلة * باريز سنــــة ١٨٥١ *

L'algebre d'Omace Alkayami par *Woepcke*. Paris 1851.

Кромѣ того подлинныя отрывки изъ сочиненій арабскихъ математиковъ встрѣчаются напр. у *Wallis*'а, Mathesis universalis sive arithmeticum opus integrum, Oxoniae 1657, p. 159, а также и у другихъ писателей. Въ текущемъ XIX столѣтіи помѣщаются въ журналахъ частію отрывками, частію полностію арабскія сочиненія по математикѣ, напр. въ Journal Asiatique.

[204]) Указанное въ текстѣ сочиненіе Lenormant'а (Essai sur un document mathématique Chaldéen, Paris 1868) описано выше. Упоминаемая въ предисловіи фотографіи подлинной глиняной таблички не была найдена много въ 4-хъ его экземплярахъ, которые мнѣ пришлось видѣть. Такая фотографія приведена у *Lepsius*'а. (Die Babylonisch-Assyrischen Längenmasse nach der Tafel von Senkereh. Berlin 1877) и даетъ ясное представленіе объ упоминаемой Lenormant'омъ трудности чтенія подобнаго письма.

тельно судить о состояніи математическихъ наукъ въ глубокой древности, въ тоже время картина ихъ послѣдующаго развитія является болѣе ясною и законченною[205]).

Уже выше было замѣчено, что латинскій языкъ, считавшійся съ давнихъ поръ обязательнымъ для ученыхъ сочиненій, началъ еще въ XVIII столѣтіи (а въ Италіи съ XVI столѣтія) постепенно терять свое значеніе въ этомъ отношеніи и уступать преобладаніе живымъ національнымъ языкамъ. Въ XIX столѣтіи, и особенно въ послѣднее время, латинскій языкъ въ указанномъ направленіи оказался вполнѣ побѣжденнымъ. Это обстоятельство, заставившее семью ученыхъ раздѣлиться по національностямъ, а также значительное накопленіе математическихъ знаній вообще, достаточное для образованія національныхъ школъ, создали, частію впрочемъ и въ зависимости отъ политическихъ условій, то, что явилась не только возможность, но даже необходимость выдѣлить исторію математики у отдѣльныхъ націй. Какъ и слѣдовало ожидать починъ въ этомъ дѣлѣ принадлежитъ Италіи, которая издавна славилась своей математической школой и накопленіемъ мѣстныхъ математическихъ знаній. Хотя сочиненіе Коссали по исторіи алгебры въ Италіи и относится къ послѣднимъ годамъ прошедшаго столѣтія (1797 — 1799), тѣмъ не менѣе то обстоятельство, что оно, находясь на рубежѣ двухъ столѣтій, не слишкомъ стѣсняетъ себя условіемъ національности и что разсматриваемая форма исторіи математическихъ наукъ объособилась окончательно лишь впослѣдствіи, служитъ достаточнымъ основаніемъ отнести ея развитіе вполнѣ къ XIX сто-

---

[205]) Перечисленныя выше изданія произведеній восточной математической литературы представляютъ собою сочиненія, обладающія важнымъ историческимъ значеніемъ. Что же касается учебниковъ по математикѣ, то такихъ издано значительное число напр. на турецкомъ, персидскомъ и арабскомъ языкахъ. Учебники эти написаны или европейцами, или туземными учеными. но подъ вліяніемъ европейской науки. Не говоря уже объ обозначеніи, въ значительной мѣрѣ заимствованномъ у запада, даже самыя загла-

лѣтію. Вслѣдъ за сочиненіемъ Cossali появляется уже болѣе строго выдержанный очеркъ развитія математическихъ наукъ въ Португаліи генерала Garção-Stockler[206]). Затѣмъ въ 1835 году былъ отпечатанъ первый томъ знаменитаго сочиненія Libri, Histoire des science mathematique en Italie, который однако еще въ листахъ сгорѣлъ[207]). Въ 1838 году онъ былъ перепечатанъ, равно какъ вышелъ и второй томъ, въ 1840 и въ 1841 гг. вышли остальные два тома. Спустя почти 20 лѣтъ Quetelet написалъ исторію математическихъ наукъ въ Бельгіи, и въ недавнее время Gerhardt исторію математики въ Германіи, причемъ эта форма исторіи математи-

---

вія такихъ сочиненій носятъ европейскій характеръ, какъ напримѣръ находящееся у меня

كتاب كشف الحجاب فى علم الحساب * بيروت ١٨٥٩ *

(Сокращенное руководство къ наукѣ исчисленія. Бейрутъ 1859).

Такимъ же характеромъ заимствованія хотя въ значительно меньшей степени отличаются также имѣющіяся въ моемъ распоряженіи нѣсколько китайскихъ сочиненій по математикѣ, представляющихъ собою изданія позднѣйшаго времени, причемъ въ одной начальной ариѳметикѣ: «Синь-суань-чу-сё» (а) «первоначальная наука общепонятнаго счета», даже годъ обозначенъ по «европейскому времяисчисленію 1881 годъ» (б). Въ сочиненіи же «Дай-шу́-шу-ни-ши-у-цзюань» (в) «25 отдѣленій искусства современнаго счета» въ предисловіи авторъ прямо говоритъ «ю-юй-си-ши-ѳу» (г) т. е. «я (съ оттѣнкомъ скромности и умаленія, нѣсколько похоже на «вашъ покорнѣйшій слуга»), какъ научившійся въ Европѣ, переношу и т. д.». Свѣдѣнія по алгебрѣ находятся въ упомянутыхъ «25 отдѣленіяхъ искусства современнаго счета», сочиненіе, котораго почти всѣ 6 томовъ посвящены алгебраическаго характера вопросамъ, и въ «синь-сюань-чжу-суань-цзинъ-ѳа» (д), «искусныя правила вновь собранныхъ перловъ счета».

(а) 心算初學

(б) 西曆一千八百八十一年

(в) 代數術二十五卷

(г) ……余與西士傳

(д) 新選珠算精法

[206]) *Garção-Stockler*. Ensaio historico sobre a originein e progressos das mathematicas em Portugal. Pariz 1819. Описано выше.

[207]) *Libri*. Histoire des sciences mathematiques en Italie. Tome I. Paris 1838. p. XXVII.

ческихъ знаній можетъ считаться уже вполнѣ опредѣлившеюся[208]).

Исторія математики въ XIX столѣтіи оказалась настолько разработанною и значеніе ея на столько выяснилось, равно какъ и значеніе самыхъ математическихъ наукъ, что уже явилась потребность излагать ходъ развитія математическихъ знаній въ общедоступной формѣ. Первымъ сочиненіемъ такого характера, какъ мы видѣли, является произведеніе Bossut, за которымъ послѣдовалъ цѣлый рядъ подобныхъ изданій въ различныхъ странахъ: Poppe, Franchini, Hoefer'а и др.

Выше было упомянуто, что XIX столѣтіе отличается обиліемъ спеціальныхъ мемуаровъ, относящихся къ области исторіи математическихъ знаній. Первоначально эти мемуары помѣщались въ періодическихъ изданіяхъ, предназначенныхъ для математическихъ наукъ вообще, или даже и въ посторонниxъ изданіяхъ. Въ половинѣ текущаго столѣтія стремленіе къ спеціализаціи и значительное накопленіе матеріала, а также вполнѣ оцѣненное значеніе исторіи математическихъ наукъ, вызвали необходимость появленія спеціальныхъ періодическихъ изданій, предназначенныхъ для разработки вопросовъ, относящихся къ исторіи математическихъ знаній. Первымъ такимъ изданіемъ былъ Bulletin Terquem'а[209]), правда существовавшій непродолжительно и не вполнѣ самостоятельно, такъ какъ выходилъ съ 1855 по 1862 годъ включительно при журналѣ Nouvelles annales de mathématiques, хотя въ тоже время раздавался и отдѣльно. Вскорѣ послѣ этого, именно въ 1868 г., былъ основанъ извѣстный, вполнѣ самостоятельный журналъ кн. Boncompagni, Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, а также появились другія періодическія изданія, имѣющія цѣлію разработку вопросовъ по исторіи математическихъ знаній.

Къ XIX столѣтію также относится начало отчетовъ о

[208]) Въ настоящемъ 1885 году въ журналѣ г. Бобынина, физико математическія науки, въ отдѣлѣ научныхъ статей, появляются «очерки исторіи развитія физико-математическихъ знаній въ Россіи».

[209]) *Terquem*. Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathematiques. T. I—VIII, Paris 1855—1862.

современномъ состояніи и ближайшимъ къ нему движеніи математическихъ знаній. Однимъ изъ первыхъ такихъ отчетовъ, сколько мнѣ извѣстно, является упомянутый выше данный въ 1810 году Delambre'омъ. Затѣмъ Dupin[210]) и нѣкоторые другіе давали обзоръ движенія математическихъ наукъ въ теченіи болѣе или менѣе обширныхъ періодовъ текущаго столѣтія. Въ послѣдніе пятнадцать лѣтъ, современи изданія знаменитаго въ этой области труда Chasles'я, число такихъ отчетовъ значительно увеличилось и они начали появляться частію вслѣдствіе правительственной инициативы. Къ этой же формѣ развитія исторіи математическихъ знаній можетъ быть отнесено извѣстное періодическое изданіе Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, начавшее выходить съ 1868 г. и дающее свѣдѣнія о современномъ повсемѣстномъ движеніи математическихъ знаній во всѣхъ ихъ направленіяхъ. Къ сожалѣнію въ этомъ изданіи менѣе, чѣмъ слѣдуетъ, обращено вниманіе на Россію, которая въ достаточной мѣрѣ участвуетъ въ движеніи математическихъ наукъ[211]).

Кромѣ перечисленныхъ здѣсь главнѣйшихъ вновь образовавшихся въ XIX столѣтіи формъ движенія исторіи математическихъ знаній, прежнія ея формы, установившіяся въ предшествовавшихъ столѣтіяхъ, получили въ текущемъ дальнѣйшее развитіе и усовершенствованіе. Не говоря уже объ изложеніи исторіи отдѣльныхъ математическихъ наукъ, получившемъ напримѣръ въ знаменитой исторіи геометріи Chasles'я замѣчательное развитіе и усовершенствованіе, общія сочиненія, какъ напр. Кантора, содержатъ свѣдѣнія относительно развитія ма-

---

[210]) *Dupin*. Sur quelques progrès des sciences mathématiques en France depuis 1830. Paris 1835.

[211]) Извѣстное французское изданіе прошедшаго столѣтія Histoire de l'Academie Royale des sciences тоже до извѣстной степени можетъ быть отнесено къ указанной здѣсь формѣ развитія исторіи математическихъ знаній.

Сюда же отчасти можно причислить и своеобразную систему Тодгёнтера, относительно которой необходимо замѣтить, что она едва ли была бы выполнима въ примѣненіе къ изложенію общей исторіи математическихъ знаній или даже по отношенію къ такой ея области, начало которой восходитъ до глубокой древности, какъ напр. геометріи.

тематическихъ знаній, ближе и болѣе строго провѣренныя и точнѣе изложенныя. Относительно монографій по отдѣльнымъ вопросамъ исторіи математики, принявшихъ въ текущемъ столѣтіи правильно выработанную форму, достаточно сказано выше: столь точнаго изложенія и такой строго критической оцѣнки матеріала, какими отличаются въ XIX столѣтіи многія изъ нихъ, въ предшествующихъ почти вовсе не встрѣчалось[212]) отчасти впрочемъ и потому, что взгляды на историческія знанія вообще были въ то время иные. Образовавшаяся въ XVII и распространенная въ Германіи въ XVIII столѣтіи, хронолого-библіографическая форма въ XIX столѣтіи значительно видоизмѣнилась и получила дальнѣйшее развитіе и усовершенствованіе, раздробившись при этомъ на нѣсколько болѣе или менѣе различныхъ между собою подраздѣленій. Съ одной стороны De-Morgan и нѣкоторые другіе являются болѣе близкими продолжателями сказаннаго направленія, съ другой лексиконы Klynsma и Poggendorff'а даютъ ему новую форму. Точно также математическая библіографія въ тѣсномъ смыслѣ слова трудами Riccardi, Bierens de Haan и нѣкоторыхъ другихъ въ XIX столѣтіи явилась весьма усовершенствованною какъ съ точки зрѣнія принятой системы, такъ и въ отношеніи полноты доставляемыхъ свѣдѣній. Даже написанная въ XVI столѣтіи Baldi, Cronologia di matematici, и та въ XIX, какъ мы видѣли, имѣетъ представителя въ лицѣ Maximilien'а Marie, который издаетъ еще неоконченное свое сочиненіе по исторіи математики въ хронолого-біографической формѣ.

Итакъ въ XIX столѣтіи замѣчается усиленное развитіе исторіи математическихъ знаній не только по количеству вышедшихъ сочиненій[213]), но и по разнообразію формъ, въ которыхъ она продолжаетъ свое движеніе.

---

[212]) Впрочемъ и въ XVIII столѣтіи встрѣчаются выдающіяся монографіи, какъ напр. *Montucla*. Histoire des recherches sur la quadrature du cercle. Paris 1754. 2-ème édition Paris 1831.

[213]) Уже изъ приведенной выше таблицы (стр. 73) число вышедшихъ по исторіи математики изданій въ XIX столѣтіи (именно 82 изд.) почти въ

Въ заключеніе остается сказать нѣсколько словъ о возникновеніи и развитіи исторіи математики съ точки зрѣнія географическаго распредѣленія, причемъ, кромѣ непринятія въ разсчетъ древне-греческихъ сочиненій, самое возникновеніе ея отнесено къ появленію труда Ramus'а.

Выдѣлившись въ XVI столѣтіи въ самостоятельную отрасль знанія сначала на западѣ Европы, во Франціи (Ramus), затѣмъ позднѣе на югѣ, въ Италіи (Baldi), исторія математики начинаетъ распространяться на сѣверъ. Въ XVII столѣтіи мы видимъ ея представителей въ Нидерландахъ (Vossius), а потомъ въ Англіи (Wallis), причемъ на новой почвѣ она получаетъ и новую форму. Въ XVIII столѣтіи исторія математики совершаетъ свое движеніе на востокъ, переходитъ въ Германію, причемъ на мѣстахъ своего зарожденія, именно во Франціи и Италіи, дѣлаетъ столь быстрые успѣхи (Montucla и Cossali), что вторая половина разсматриваемаго столѣтія по справедливости можетъ считаться эпохою въ ея развитіи.

Наступившій XIX вѣкъ застаетъ два maximum'а въ состояніи знаній по исторіи математическихъ наукъ: одинъ на западѣ Европы, во Франціи, другой—на югѣ, въ Италіи, служившіе центрами, по мѣрѣ удаленія отъ которыхъ замѣчается уменьшеніе въ ея развитіи, постепенно доходящее до нуля. Такое географическое распредѣленіе упомянутыхъ знаній продолжало существовать и во время первой половины XIX столѣтія, въ теченіи которой Франція и Италія сохраняютъ за собою право первенства и руководства въ этомъ дѣлѣ [214]). Но уже во второй четверти XIX столѣтія въ Германіи замѣчается усиленное развитіе исторіи математическихъ наукъ, которое

полтора раза превышаетъ число сочиненій (именно 58 соч.) къ ней относящихся, изданныхъ въ предшествовавшихъ трехъ столѣтіяхъ. При этомъ не приняты въ разсчетъ множество появившихся въ XIX столѣтіи мемуаровъ, помѣщенныхъ въ періодическихъ изданіяхъ.

[214]) Такой взглядъ на состояніе знаній по исторіи математическихъ наукъ въ первой половинѣ текущаго столѣтія существовалъ отчасти и у современныхъ этому періоду ученыхъ. Въ подтвержденіе сказанному можно указать между прочимъ на то, что столь выдающійся и самостоятельный

быстро её подвинуло къ общему съ Франціей и Италіей уровню въ этомъ отношеніи (Nesselmann и др.).

Во второй половинѣ текущаго столѣтія картина географическаго распредѣленія въ развитіи знаній по исторіи математическихъ наукъ значительно видоизмѣняется. Въ то время какъ во Франціи за періодомъ дѣятельности знаменитаго Шаля и его современниковъ слѣдуетъ относительное затишье, въ Германіи выступаетъ цѣлая группа выдающихся изслѣдователей въ области исторіи математическихъ наукъ, именно: Friedlein, Cantor, Hankel, Bretschneider, Suter, Günter, Treutlein и другіе менѣе извѣстные. Между тѣмъ во Франціи даже какъ бы перестали придавать должное значеніе исторіи математическихъ знаній [215]): ея немногочисленныя изслѣдователи въ этомъ направленіи, Aristide Marre, Charles Henry, Edouard Lucas и нѣкоторые другіе, большинство своихъ трудовъ печатаютъ заграницей, преимущественно въ Италіи, которая въ лицѣ знаменитаго кн. Boncompagni и сгруппировавшихся около него дѣятелей продолжаетъ до сихъ поръ высоко держать знамя разсматриваемой науки и по прежнему сохраняетъ за собою созданное еще Baldi положеніе первостепеннаго центра въ ея развитіи.

Переходъ maximum'а въ движеніи исторіи математическихъ наукъ въ Германію, въ силу историческихъ законовъ сосѣдства, не остался безъ вліянія на поднятіе этой отрасли

дѣятель въ области исторіи математики, какъ Woepcke (1826 — 1869), нѣмецъ по происхожденію, начавшій свою дѣятельность въ Германіи, переселился впослѣдствіи во Францію и почти всѣ своя труды, написанныя въ огромномъ большинствѣ по французски, издавалъ во Франціи и частію въ Италіи.

[215]) Какъ фактическое подтвержденіе сказанному въ текстѣ я приведу нѣсколько строкъ изъ предисловія г. Leon'a Rodet къ его статьѣ: Leçons de calcul d'Aryabhata (Journal Asiatique, VII serie, t. 13, p. 393. Paris 1879). La traduction du chapitre de l'Aryabhatiyam que l'on va lire est terminée depuis le mois de fevrier 1877. Dans mon etude comparative des methodes algébriques en Arabie, dans l'Inde et en Grèce, ayant à citer quelques points particuliers du livre d'Aryabhata, j'avais cru pouvoir annoncer la publication prochaine de mon travail dans le Journal de l'Ecole polytechnique; j'avais agi ainsi sur la foi d'une promesse que je croyais, définitive. Mais au bout de quelques mois d'attente, le manuscrit ma été rendu, et j'ai dû demander encore une fois à la Société Asiatique la généreuse hospitalité de son journal etc.

знаній въ окружающихъ странахъ. Въ послѣднее время Швеція и Данія имѣютъ представителей въ лицѣ проф. Eneström, Zeuthen, Steen и другихъ, которые въ значительной мѣрѣ посвятили себѣ изученію вопросовъ, относящихся къ исторіи математическихъ наукъ. Но особенно рельефно выразилось упомянутое выше вліяніе у насъ въ Россіи. Въ то время какъ до шестидесятыхъ годовъ почти вовсе не занимались исторіей математики, въ слѣдъ за появленіемъ труда г. Лаврова, и особенно послѣднее время, указанная отрасль знанія начинаетъ привлекать все больше и больше вниманія. Проф. Ващенко-Захарченко въ Кіевѣ, давшій рядъ обширныхъ трудовъ, г. Бобынинъ въ Москвѣ, предпринявшій изданіе спеціальнаго журнала, И. А. Износковъ въ Казани, изучающій памятники народной математики, и др. могутъ быть указаны, какъ дѣятельные ея представители.

Что касается другихъ странъ, то въ Бельгіи и Голландіи исторія математики имѣетъ своихъ представителей въ лицѣ Bierens-de-Haan[216]), отчасти Mansion и нѣкоторыхъ другихъ Въ Англіи историко математическіе вопросы пользуются достаточнымъ вниманіемъ. Въ испанскихъ изданіяхъ тоже встрѣчаются статьи по исторіи математическихъ наукъ, иногда впрочемъ принадлежащія перу иностранцевъ (напр. Aristide Marre). Въ Бразиліи и особенно въ Соединенныхъ Штатахъ Сѣверной Америки, на сколько удалось собрать свѣдѣнія, къ исторіи математики особаго расположенія не проявляютъ.

---

[216]) Bierens-de-Haan пользуется между прочимъ извѣстностію, какъ издатель рѣдкихъ и важныхъ съ точки зрѣнія исторіи развитія математическихъ наукъ сочиненій XVII столѣтія, какъ напр. Simon Stevin, Albert Girard и др. По этому поводу см. *Eneström*. Om några af Bierens de Haan nyligen utgifna matematiska skrifter från sextonhundratalet. Öfversigt ax Konigl. Vetanskaps-Academiens Förhandlingar. 1884. Stockholm 1885. p. 191.

Къ исторіи алгебраическаго обозначенія въ связи съ развитіемъ азбучной и музыкальной письменности.

驗其前便知其後

«Янь-ци-цянь піянь-чжы-ци-хоу»

Изученіе прошедшаго ведетъ къ познанію будущаго.

Кит. изр.

Человѣкъ на зарѣ своей цивилизаціи встрѣтился съ необходимостію изображать письменно акты своего мышленія съ цѣлію удержать ихъ отъ забвенія или для передачи себѣ подобному. Первобытный и наиболѣе естественный пріёмъ, удовлетворившій этому требованію, состоитъ въ начертаніи каждаго акта мышленія въ той формѣ, въ какой онъ сформировался въ самомъ органѣ мышленія. Такое состояніе письменности представляетъ первый, самый ранній, *идеографическій* (наглядный) періодъ ея развитія, въ теченіи котораго предметы изображаются такъ, какъ они видимы, образно,—алгебраи-

ческая формула пишется словами безъ употребленія какого-бы то нибыло спеціальнаго обозначенія, — музыкальная нота рисуется положеніемъ руки играющаго или числомъ открытыхъ и закрытыхъ отверстій инструмента и т. п. Такой идеографическій періодъ, дѣлая письменность весьма доступною, почти не требующею предварительнаго изученія употребляемыхъ въ ней знаковъ, тѣмъ не менѣе отличается всѣми несовершенствами первобытнаго пріема: для него также трудно изображать отвлеченныя понятія, неимѣющія образнаго представленія, какъ не возможно написать словами современную математическую формулу или нарисовать произведеніе Бетховена.

Съ развитіемъ цивилизаціи, а также науки и искусства, сама собою выясняется вся недостаточность идеографическаго обозначенія и его безполезная сложность, принадлежащія къ числу главнѣйшихъ его неудобствъ, — и письменность переходитъ во второй, *синкопическій* періодъ, составляющій переходную стадію въ ея развитіи и отличающійся сокращеніемъ идеографическихъ знаковъ какъ по отношенію къ ихъ формѣ, такъ и къ объёму ихъ значенія. Сокращеніе въ формѣ знаковъ упрощаетъ письмо, сокращеніе въ ихъ значеніи дѣлаетъ болѣе ясными представленія, связанныя съ даннымъ знакомъ, который вслѣдствіе этого становится болѣе точнымъ и удобопонимаемымъ. Гіератическое письмо древнихъ Египтянъ не только уменьшаетъ трудъ писцовъ своими сокращенными знаками, часто имѣющими лишь отдаленное сходство съ оригиналомъ, но и, будучи переходной стадіей къ фонетизму, даетъ возможность изображать отвлеченныя понятія. Современная китайская письменность въ значительной мѣрѣ способна удовлетворить весьма строгимъ требованіямъ философскаго мышленія. Въ математикѣ синкопическая формула, являясь несравненно проще и удобнѣе идеографической, составляетъ важное орудіе для изслѣдованій въ рукахъ Индусовъ и Арабовъ, а также и европейскихъ ученыхъ главнымъ образомъ XVI, а частію XV и

XVII столѣтій. Допускаемая ею, хотя и незначительная видоизмѣняемость позволяетъ составить нѣкоторое понятіе о ходѣ вычисленій, и вслѣдствіе этого дѣлаетъ возможными соотвѣтствующія обобщенія касательно метода. Въ музыкѣ невмы, упростивъ до крайности своей сокращенной формой внѣшнюю сторону музыкальнаго письма, сдѣлали изображеніе мелодіи, при всей его первоначальной неточности, болѣе удовлетворяющимъ своему назначенію.

Тѣмъ неменѣе поименованныя усовершенствованія, которыми отличается синкопическій періодъ развитія письменности, далеко еще не въ состояніи устранить всѣхъ ея недостатковъ. Оставшаяся еще значительная неопредѣленность часто не допускаетъ вполнѣ точнаго представленія о подлежащихъ передачѣ понятіяхъ, равно какъ вносимая нерѣдко произвольными сокращеніями запутанность въ изображеніи знаковъ дѣлаетъ самое письмо неяснымъ, а слѣдовательно недостигающимъ своей цѣли и въ тоже время трудпымъ для изученія. Съ цѣлію окончательнаго устраненія перечисленныхъ неудобствъ письменность прибѣгаетъ къ символизму, т. е. къ изображенію каждаго изъ составляющихъ её элементовъ условными знаками, имѣющими строго ограниченное значеніе и повозможности простую форму. При такомъ изображеніи лишь элементовъ данной письменности число употребляемыхъ въ ней знаковъ приведено къ minimum'у, а связанныя съ ними представленія получили необходимую общность и полную опредѣленность. Въ указанномъ третьемъ, *символическомъ* періодѣ находятся какъ существующая теперь азбучная письменность, такъ алгебраическое и музыкальное обозначенія настоящаго времени, причемъ эти послѣднія опередили первую въ томъ отношеніи, что сдѣлались независимыми отъ національности и общими для всѣхъ цивилизованныхъ народовъ.

Установленные такимъ образомъ три періода, идеографическій, синкопическій и символическій, въ развитіи письменно-

сти безъ особыхъ затрудненій могутъ быть отмѣчены въ исторіи какъ современной азбуки, такъ существующаго музыкальнаго и алгебраическаго обозначеній. Приэтомъ необходимо замѣтить, что смѣняемость названныхъ періодовъ въ упомянутыхъ родахъ письма, слѣдуя обычной постепенности, не можетъ быть строго разграничена въ отношеніи предѣловъ, указывающихъ конецъ одного изъ этихъ періодовъ и начало другого, подобно тому, какъ вообще нельзя точно установить, гдѣ кончается данная историческая эпоха и начинается смѣнившая её послѣдующая. Кромѣ того самое развитіе даннаго обозначенія въ зависимости отъ мѣстныхъ условій обыкновенно имѣетъ свои особенности, составляющія по отношенію къ сказаннымъ періодамъ иногда весьма различныя между собою ихъ разновидности, что́ не только не можетъ служить противорѣчіемъ излагаемой здѣсь основной мысли, но напротивъ является бо́льшимъ ея подтвержденіемъ. Въ тоже время указанное разнообразіе наблюдаемыхъ явленій, допускающихъ сведе́ніе ихъ къ одному основному типу, придаетъ бо́льшую вѣроятность предположенію о существованіи установленныхъ выше періодовъ въ развитіи всякаго рода письма.

Какъ выше было замѣчено, относительно азбучной письменности и музыкальнаго обозначенія, не составляющихъ непосредственно предметъ настоящей статьи и путь развитія которыхъ можетъ считаться достаточно выясненнымъ сдѣланными въ томъ направленіи изслѣдованіями, здѣсь ниже будетъ сказано лишь въ той мѣрѣ, въ какой это необходимо для установленія въ ихъ постепенномъ усовершенствованіи существованія и послѣдовательной смѣняемости указанныхъ трехъ періодовъ, идеографическаго, синкопическаго и символическаго. Что-же касается алгебраическаго обозначенія, то о немъ, какъ имѣющемъ преобладающее значеніе въ содержаніи настоящаго очерка, будетъ изложено сравнительно подробнѣе.

Три періода въ развитіи азбучной письменности.

«Человѣкъ не ранѣе могъ достигнуть первоначальныхъ элементовъ знанія», говоритъ Lenormant[217]), «необходимыхъ для его умственнаго и нравственнаго развитія, какъ долженъ былъ почувствовать необходимость помогать своей памяти въ сохраненіи уже усвоенныхъ понятій, а также пріобрѣсти средства сообщать свою мысль при условіяхъ, когда слово не можетъ быть употреблено. Въ этомъ и состоитъ письменность».

И далѣе: «По логическому ходу, согласному съ природою вещей, равно какъ и съ самой организаціей человѣческаго мышленія, всѣ системы письма[218]) начали идеографизмомъ и только въ постепенномъ прогрессѣ достигли фонетизма[219])».

Положеніе это, составляющее теперь весьма распространенную научную истину, высказывалось неоднократно и ранѣе. Уже въ 1826 году de-Paravey въ своемъ сочиненіи объ одномъ и томъ же іероглифическомъ[220]) происхожденіи, какъ

---

[217]) L'homme n'eut pas plus tôt acquis les primier éléments des connaissances indispensables à son développement intellectuel et moral, qu'il dut sentir la nécessité d'aider sa memoire à conserver, les notions qu'il s'était appropriées, et d'acquerir les moyens de communiquer sa pansée à ses semblables dans des conditions où la paro'e ne pouvait être employée. C'est là ce qui constitue l'écriture. *Lenormant.* Histoire ancienne de l'Orient. Paris 1881. T. I, p. 397.

[218]) Lenormant имѣетъ въ виду лишь словесную письменность.

[219]) Par une marche logique et conforme à la nature des choses, ainsi qu'à l'organisation même de l'esprit humain, tous les systèmes d'écriture ont commencé par l'idéographisme et ne sont arrivés que par un progrès graduel au phonétisme. *Lenormant.* Histoire ancienne de l'orient. Paris 1881. T. I, p. 397 а также *Lenormant.* Essai sur la propagation de l'alphabet phénicien. Paris 1875, T. I, p. 2.

[220]) Слѣдуетъ замѣтить, что въ указанное время и долго послѣ іероглифы были синонимомъ идеографическаго письма. Напр. *Pauthier* (Essai sur l'origine et la formation similaire des écritures figuratives chinoise et égyptienne. Paris 1842. p. 31, 35 и др., неоднократно говоритъ: l'écriture a ét d'abord purement *hiéroglyphique* ou *figurative* (курсивъ въ подлинникѣ).

цифръ, такъ и буквъ всѣхъ народовъ[221]) совершенно опредѣленно и категорически указываетъ на идеографическій характеръ зарожденія азбучной письменности вообще. Чрезъ нѣсколько лѣтъ, именно въ 1838 году, извѣстный синологъ Pauthier въ статьѣ: «Ecriture», помѣщенной въ «Enciclopedie nouvelle» (стр. 555), а затѣмъ въ исправленной и дополненной его статьѣ: объ одинаковомъ происхожденіи фигуративнаго письма китайцевъ и египтянъ, изданной въ 1842 году[222]), устанавливаетъ три періода или «возраста» (âge), какъ онъ называетъ не безъ основанія, въ развитіи азбучной письменности вообще.

«Различные роды письменности», говоритъ Pauthier[223]), «которые были и еще находятся въ употребленіи у различныхъ народовъ міра, могутъ быть раздѣлены на три возраста сообразно тому, будутъ ли они относиться

1°. Къ образному представленію предметовъ и идей;

2°. Къ измѣненному и условному представленію предметовъ;

3°. Къ чистому фонетическому выраженію звуковъ человѣческаго голоса.

Первый изъ этихъ возрастовъ можетъ быть названъ *возрастомъ фигуративнымъ* или *іероглифическимъ*, второй—*возрастомъ переходнымъ*, и третій—*возрастомъ чисто алфабетическимъ*».

И далѣе: «Къ *возрасту фигуративному* принадлежатъ

---

[221]) *De-Paravey*. Essai sur l'origine unique et hiéroglyphique des chiffres et des lettres de tous les peuples. Paris 1826

[222]) *Pauthier*. Sinico-Aegyptiaca. Essai sur l'origine et la formation similaire des écritures figuratives chinoise et égyqtienne. Paris 1842.

[223]) «Les differentes écritures qui ont été ou qui sont encore en usage chez les différents peuples de la terre peuvent être divisées en trois âges, selon qu'elles sont:

1° La représentation figurée des objets et des idées;

2° La représentation altérée et conventionnelle des objets;

3° L'expression phonétique pure des articulation de la voix humaine.

Le premier de ces âges peut s'appeler *âge figuratif* ou *hiéroglyphique*, le seconde *âge transitoire*; et le troisième *âge alphabetique pure*. *Pauthier*, ibid. p. 31.

первоначальные знаки китайскаго письма, первоначальные египетскіе іероглифы и мексиканское картинное письмо. Къ *возрасту переходному* принадлежатъ послѣдующія формы китайской письменности, египетское письмо, называемое *иератическимъ*, и въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ японская и корейская письменности. Къ *чистому алфабетическому возрасту* принадлежатъ всѣ письменности, которыя представляютъ лишь звуковые элементы человѣческой рѣчи, сведенные къ ихъ наиболѣе простому выраженію [224])».

У послѣдующихъ писателей мысль объ идеографическомъ возникновеніи словесной письменности приводится какъ весьма извѣстная, даже въ такихъ сочиненіяхъ, которыя не имѣютъ своей главной цѣлію изложеніе исторіи развитія письменности. Напримѣръ: *Perny* въ своей грамматикѣ китайскаго языка говоритъ [225]); «Различаютъ три возраста письменности къ первому относится письмо фигуративное. Всѣ роды письменности начались такимъ образомъ и пр.». Въ исторіи всеобщей литературы, издаваемой Коршемъ, читаемъ [226]); «Человѣкъ писалъ

---

[224]) A l'*âge figuratif* appartiennent les premiers caractères de l'écriture chinoise, les premiers hiéroglyphes égyptiens, et les peintures mexicaines; à l'*âge transitoire* appartiennent les formes secondaires de l'écriture chinoise, l'écriture égyptienne appelée *hiératique*, et, sous quelques repports, les écritures japonaise et coréenne; à l'âge *alphabétique pur* appartiennent toutes les écritures qui ne représentent plus que les éléments vocaux des articulations humaines, réduits à leur plus simple expressions. *Pauthier* ibid. p. 35.

[225]) *Perny*. Grammaire de la langue chinoise orale et écrite. Paris 1873—1876 T. II, p. 10. «On distingue.... trois âges dans l'écriture. Au premier se rapporte l'écriture figurative.... Tous les genres d'écriture ont commencé de la sorte etc».... И раньше (р. 3): «Les philologues européens, divisés sur la question de l'unité des langues, admettent, pourtant, aujourd'hui l'unité primitive de l'écriture qui, dans le principe, a été idéographique ou hiéroglyphique».

[226]) Исторія всеобщей литературы, изд. Корша. Томъ I, статья В. Ѳ. *Корша*. Происхожденіе и исторія письменности стр. 71.

Впрочемъ встрѣчаются, хотя и рѣдко, попытки вывести начало письменности изъ другихъ источниковъ, какъ напримѣръ изъ расположенія звѣздъ въ созвѣздіяхъ въ сочиненіи: *Mareau de Dammartin*. Origine de la forme des caractères alphabetiques des toutes les nations, des clefs chinoises, des hié-

сначала совсѣмъ не такъ, какъ мы теперь пишемъ. Наша нынѣшняя азбука была плодомъ долгой и предварительной работы. Сначала человѣкъ просто чертилъ самые предметы, а не звуки своей рѣчи и пр.».

Въ самомъ дѣлѣ, что̀ могло быть болѣе естественнымъ для человѣка на зарѣ его цивилизаціи, какъ въ *письменной* передачѣ своихъ мыслей о предметахъ прибѣгнуть къ ихъ непосредственному изображенію. И дѣйствительно, въ настоящее время можетъ считаться вполнѣ установленнымъ *идеографическое* происхожденіе всѣхъ системъ словесной письменности, получившихъ болѣе или менѣе значительное развитіе. Идеографизмъ египетскихъ іероглифовъ былъ извѣстенъ уже Діодору Сицилійскому[227]). Въ томъ же духѣ находимъ указанія у Плинія Младшаго[228]), Климента Александрійскаго[229]) и др. Арабскій писатель IX вѣка Агмадъ-бинъ-Абубекръ-бинъ-Вагшинъ въ сочиненіи о толкованіи древнихъ алфавитовъ и

---

rogliphes égyptiens etc. Paris 1839. Изъ коммерческой необходимости: *Schoebel*. Memoire sur les origines de l'écriture alphabétique. Actes de la Société Philologiqne 1879 p. 137 и пр.

Здѣсь кстати слѣдуетъ замѣтить, что довольно полный перечень сочиненій, относящихся къ предмету словесной письменности, приведенъ у *Rosny* въ его Archives Poléographiques de l'orient et de l'Amerique. Tome I, p. IX etc. preface. Paris 1872.

[227]) «Συμβέβηκε τοίνυν τοὺς μὲν τύπους ὑπάρχειν αὐτῶν ὁμοίους ζώοις παντοδαποῖς καὶ ἀκρωτηρίοις ἀνθρώπων, ἔτι δε ὀργάνοις, καὶ μάλιστα τεκτονικοῖς· οὐ γὰρ ἐκ τῆς τῶν συλλαβῶν συνθέσεως ἡ γραμματικὴ παρ'αυτοῖς τον υποκείμενον λόγον ἀποδίδωσιν, ἀλλ' ἐξ ἐμφάσεως τῶν μεταγραφομένων καὶ μεταφορᾶς μνήμῃ συνηθλημένης. *Διοδωροι του Σικελιωτου βιβλιοθηκης ιστορικης*. Извѣстное editio princeps Henrici Stephani. Parisiis Anno 1559, pag. 101, βιβλ. γ'.

[228]) Sculpturae illae effigiesque... Aegyptiae sunt litterae *Plinius*. Naturalis historiae lib. XXXVI, cap. 8. А также указаніе Тацита: Primi per figuras animalium Aegyptii sensus mentis effingebant. Cornelii Taciti Annalium lib. XI, editionis elzevirianae pag. 226. Lugduni Batavorum 1634.

[229]) «Ὑστάτην δὲ καὶ τελευταίαν τὴν ἱερογλυφικήν· ἧς ἡ μέν ἐστι διὰ τῶν πρώτων στοιχείων κυριολογική, ἡ δέ συμβολική. Τῆς δὲ συμβολικῆς ἡ μὲν κυριολογεῖται κατὰ μίμησιν,... Ἥλιον γοῦν γράψαι βουλόμενοι, κύκλον ποιοῦσι... *Κλημεντος του Αλεξανδρεως τα ευρισκομενα παντα. Στρωματεων* lib. V, cap. 4. Patrologiae cursus completus tomus IX, col. 40, editio Parisiis 1857.

таинственныхъ письменъ[230]) относительно іероглифовъ говоритъ: «Эти знаки состоятъ изъ безчисленнаго множества фигуръ, имѣющихъ самостоятельное значеніе и выражающихъ непосредственно изображаемый ими предметъ» [231]). Новѣйшія изысканія подтвердили идеографическое начало египетскихъ іероглифовъ[232]). По изслѣдованіямъ Oppert'а первоначальная си-

---

[230]) شوق المستهام فى معرفة رموز الاقلام

Изданіе Joseph Hammer, London 1806. Указанное сочиненіе арабскаго писателя представляетъ значительный интересъ по громадному числу собранныхъ и приведенныхъ въ немъ различныхъ алфавитовъ. Относительно египетскихъ іероглифовъ бинъ-Вагшинъ имѣлъ весьма близкое къ истинному представленіе, такъ какъ вмѣстѣ съ идеографическимъ значеніемъ (стр. 82—113) онъ указываетъ также и на ихъ фонетическій характеръ. Знаки данной имъ іероглифической азбуки (стр. 119—121) въ значительной части совпадаютъ по своей формѣ съ установленными новѣйшими изслѣдователями и приводимыми напр. у *Lenormant* (Histoire etc. Tome III, p. 91 etc), *Le Page Renouf* (An elementary Grammar. of the ancient egyptian language, in the hieroglyphic type, London 1875, p. 1), *Brugsch* (Verzeichniss der Hieroglyphen mit Lautwerth, Leipzig 1872, S. 2 etc.) и др. Сочиненіе бинъ-Вагшинъ было издано въ Лондонѣ въ самый моментъ назрѣванія вопроса о чтеніи іероглифовъ, но, повидимому, на него не обратили должнаго вниманія.

[231]) و هى رسوم و اشكال لاتعد و لاتحصر و انما و ضعو الها قاعدة
يستدل بها على ذلك الشى

Впрочемъ европейскіе писатели XVI, XVII и даже XVIII столѣтій имѣли совсѣмъ иной взглядъ на іероглифы. Въ XVI вѣкѣ *Joannus Pierius* (Hierogiyphica, seu de sacris Aegyptiorum, aliarumque gentium literis commentarii. Lugduni 1595) приписываетъ іероглифамъ таинственно-символическое значеніе. Такого же приблизительно взгляда придерживаются въ XVII столѣтіи *Porta* (De furtivis literarum notis Neapoli 1602, p. 15) и Kircher (*Leon de Rosny*. Les écritures figuratives et hieroglyphiques des differents peuples anciens et modernes. 2 ed. Paris 1870, p. 50). Столь же неправильны, хотя другого характора, были воззрѣнія на іероглифы и въ XVIII столѣтіи (*Leon Rosny* ibid, p. 51).

[232]) По мнѣнію знаменитаго *Champolion le jeune* (Grammaire egyptienne, Paris 1836, p. 2) «premiers elements de l'écriture hieroglyphique... avaient pour but essentiel l'imitation des objets». Тотъ же взглядъ раздѣляютъ и позднѣйшіе египтологи напр. *Brugsch* (Hieroglyph'sche Grammatik. Leipzig 1872). *Champolion* (ibid. d. 28) дѣлитъ іероглифы на три различные класса: 1) идеографическіе, 2) символическіе и 3) фонетическіе. Дѣленіе это принято позднѣйшими изслѣдователями.

стема письменности, послужившая исходной точкой для развитія клинообразнаго письма, была тоже идеографическая[233]). Китайцы сами очень давно сознали идеографическое происхожденіе своихъ письменныхъ знаковъ[234]). Еще въ XVI столѣтіи

---

[233]) *Oppert.* Expedition scientifique en Mésopotamie de 1851 à 1854 par MM. F. Fresnel, F. Thomas et J. Oppert. Paris 1857—1864. T. II, p. 43 etc. По указанію *Leon Rosny* (Les écritures figuratives et hieroglyphiques des différents peuples. Paris 1870, p. 66) J. Oppert еще ранѣе въ статьѣ, помѣщенной въ Annales de Philosophie chrétienne, t. XIV, 1856, pag 187, такъ формулировалъ свои выводы относительно происхожденія клинообразнаго письма: Tous les signes cunéïformes anariens proviennent d'une image hiéroglyphique; ils ont tous au moins une valeur idéographique. Приведенное мнѣніе Oppert'a объ идеографическомъ происхожденіи клинообразнаго письма не оспаривается даже такимъ его антагонистомъ по вопросу о первоначальной исторіи Вавилона и Ассиріи, какъ *Halevy* (Observations critiques sur les pretendus Touraniens de la Babylonie. Journas Asiatique, 7 série, t. 3, Paris 1874). Снимки съ архаическихъ клинообразныхъ надписей идеографической формы приведены также у *Lenormant* (Histoire ancienne de l'Orient, t. IV, pag. 24 et 45, Paris 1885).

[234]) Въ древнемъ китайскомъ сочиненіи 六書 лю-шу, (буквально «шесть категорій письменъ»), написанномъ Пао-шѣ въ царствованіе второго императора Чжоуской династіи Чэнъ-Вана (1115—1079 до Р. Х.), сказано, что первоначальные девятнадцать идеографическихъ знаковъ китайской письменности постепенно видоизмѣнялись, комбинировались и потеряли впослѣдствіи свою первообразную форму (*Morrison.* A dictionnary of the chinese language. Macao 1815, Vol. I, Part. I, introduction, p. 1). Въ комментаріяхъ къ переводу 周禮 чжоу-ли (буквально «чжоускія (всеобщія?) церемоніи» или иначе «чжоускія (названіе династіи) учрежденія») на французскій языкъ Edouard *Biot* (Le Tcheou-li ou rites des Theou traduit pour la première fois du chinois, Paris 1851, Tome II, pag 120) указываетъ, что первоначальные знаки китайской письменности были немногочисленны и служили исключительно для обозначенія предметовъ, причемъ мнѣніе это приводится въ комментаріяхъ Wang-ngan-chi. Кромѣ того древнее названіе китайскихъ письменныхъ знаковъ 名 минъ, имя, служитъ подтвержденіемъ тому же. *Perny* (Grammaire de la langue chinoise Paris 1876. Tome II, p. 8 etc) тоже приводитъ мнѣнія китайскихъ ученыхъ объ идеографическомъ происхожденіи употребляемыхъ ими письменныхъ знаковъ. Наконецъ первая изъ шести установленныхъ, по мнѣнію китайцевъ, императоромъ Фу-си за 2950 лѣтъ до Р. Х. категорій китайскихъ іероглифовъ заключаетъ въ себѣ

Acosta'ою было указано, что Мексиканцы и Перуанцы употребляли идеографическое письмо[235]) и пр.

знаки, наглядно изображающіе предметы (*Георгіевскій.* Первый періодъ китайской исторіи. С.-Пб. 1885. стр. 14).

Приведенное здѣсь мнѣніе китайцевъ объ идеографическомъ возникновеніи ихъ письменности раздѣляется вполнѣ всѣми знаменитыми европейскими синологами, напр. *Abel Rémusat* (Sur les caracteres figuratifs qui ont servi de base à l'écriture chinoise. Melanges asiatiques T. II), *Legge* (The chinese classics. Vol. III, part. I, prolegomena, p. 192, гдѣ Legge полагаетъ, что китайцы первоначально обладали лишь нѣкоторымъ умѣньемъ идеографически выражать самыя несложныя понятія), проф. *Васильевымъ* (Анализъ китайскихъ іероглифовъ, С.-Пб. 1868, литогр. стр. 10, § 13. «Китайскія письмена первоначально были нечто иное какъ живопись». А также: Всеобщая исторія литературы, изданіе Корша, статья проф. *Васильева*, Очеркъ исторіи китайской литературы, стр. 440, «китайская письменность, можетъ быть еще болѣе чѣмъ египетская, произошла изъ фигуральныхъ изображеній», стр. 451, китайское письмо «состоитъ изъ условнаго (теперь, но прежде вѣдь должно же было быть болѣе подходящимъ къ дѣйствительности) изображенія видимыхъ предметовъ» и пр. Здѣсь нельзя пройти молчаніемъ сдѣланнаго проф. Васильевымъ въ его опытѣ исторіи китайской литературы предположенія, что китайская письменность можетъ оказаться заимствованною изъ Египта. Впрочемъ еще въ прошедшемъ столѣтіи высказывали даже такое мнѣніе, что Китай представляетъ собою древнюю колонію Египтянъ. (*de-Gugines.* Memoire dans le quel on prouve, que les chinois sont une colonie egiptienne. Paris. 1760) и др. По поводу существованія аналогіи въ развитіи египетской и китайской письменности высказался также *Веберъ* (Всеобщая исторія, пер. Андреева. Москва 1885 г. Томъ I, стр 204) Аналогія въ развитіи древняго клинообразнаго письма и японской письменности указывается *Leon Rosny* (Archives paleographiques etc Tome I, p. 90 Paris 1872. Lettre à M. J. Oppert sur quelques particularités des inscriptions cunéiforms anariennes).

[235]) ... «Suplian la falta de escritura y letras: parte con pinturas como los de Mexico, aunque las del Piru eran muy grosseras y toscas: parte y lo mas con Quipos». *Acosta* Sosé. Historia natural y moral de las Indias. Barcelona 1591. p. 266, (Весьма интересное и крайне рѣдкое изданіе даже въ переводахъ на французскій 1598 г. и на англійскій 1604 г. языки). Въ новѣйшее время дешифрированіемъ американскаго письма много занимался *Leon Rosny* (Essai sur le déchiffrement de l'écriture hiératique de l'Amérique centrale. Paris 1882). Указанія касательно американской фигуративной письменности приведены между прочими у *Humphrey* (The Origine and Progresse of the Art of Writing. London 1855), *Leon Rosny* (Les écritures figuratives et hiéroglyphiques des différentes peuples. Paris 1870. А также его Archives paléographiques de l'Orient et de l'Amérique. Tome I Paris 1872; здѣсь въ статьѣ: ouvrages et notices de paleographie américaine, приведена обширная

Итакъ словесная письменность первое время послѣ своего зарожденія находилась въ періодѣ *идеографическомъ* т. е. предметы изображались въ той формѣ, какъ они видимы[236]). Остатки такого идеографическаго періода въ средѣ цивилизованныхъ народовъ встрѣчаются до самаго послѣдняго времени. Напримѣръ, въ Magazine Pittoresque за 1843 годъ приве-

---

библіографія сочиненій по вопросу объ американской письменности стр. 103—115), *Wuttke* (Die Entstehung der Schrift, die verschiedene Schriftsysteme und das Schrifttum der wicht alfabetarisch schreibenden Völker. Leipzig 1877) и др. Здѣсь слѣдуетъ замѣтить, что въ недавнее время Dr. Le Plongeon указалъ на поразительное сходство фонетическихъ знаковъ американскаго письма (Maya на полуостровѣ Юкатанѣ) съ гіератическими формами древняго Египта, причемъ сходственные знаки имѣютъ одно и тоже фонетическое значеніе (Augustus, *Le Plongeon*. The Maya alphabet. Scientific american supplement, № 474, New-York 1885, pag. 7572. Dr. Le Plongeon is satisfied that the ancient Egyptian civilization orginated on the American continent and he is in possession of a vast number of evidences which, he belives, fully establishe this extraordinary theory).

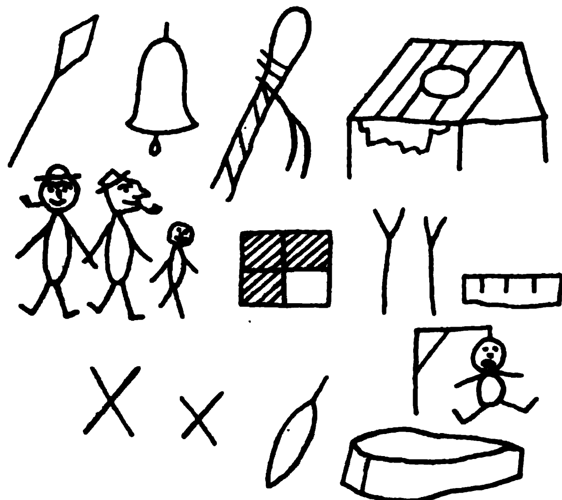
[236]) *Lenormant*. (Essai sur la propagation de l'alphabet phénicien, Paris. 1875 T. I p. 11), считаетъ слѣдующія формы словесной письменности, происшедшіе независимо и имѣвшія болѣе или менѣе продолжительное существованіе именно: египетскіе іероглифы, китайская письменность, клинообразное письмо, мексиканскіе іероглифы и юкатанское письмо. (*Perny* ibid. pag. 10, едва ли основательно указываетъ лишь только три первоначальныя источника, китайскую, индусскую и семитическую письменности). Впрочемъ извѣстны и другія самостоятельно зародившіяся идеографическаго характера мало развитыя формы письменности, которыя были поглощены въ своемъ медленномъ движеніи сосѣдними болѣе развитыми формами: фигуративное письмо самоѣдовъ (*Lenormant*, Histoire ancienne de l'Orient. Paris 1881 T. I, p. 403), такъ называемые сибирскіе іероглифы (*Spassky*. De antiquis quibusdam sculpturis et inscriptionibus in Sibiria repertis. Petropoli 1822; а также: *Rosny*. Archives paleographiques de l'orient et de l'Amerique, Paris 1872 T. I, p. 143 etc.; *Lenormant*. Histoire ancienne de l'Orient, Paris 1881, T. I. p. 410 и другія), іероглифы сѣвероамериканскихъ индѣйцевъ (*Wuttke*. Die Entstehung der Schrift, die verschiedenen Schriftsysteme etc. Leipzig 1877. S. 149 etc.) первоначальная японская письменность, замѣненная впослѣдствіи китайской системой и др. (*Leon Rosny*. Archives Paleologiques etc. Tome I, p. 253 etc. «Dans la haute antiquité les Japonais se servaient de signes figuratifs [такъ называемые «божественные письменные знаки» 神カミ字ジ Ками-жи или Шинъ-жи] etc. Подробныя указанія по этому предмету находятся въ статьѣ: *Basil Hall Chamberlain*. On two Questions of Japanese Archaeology.

денъ счетъ неграмотнаго англичанина каменьщика, написанный идеографически[237]). Нельзя наконецъ здѣсь пройти молчаніемъ

The Journal of the Royal Asiatic Society of Graet Britain and Ireland. Vol. XV, London 1883, p. 322 etc. Здѣсь приведено изъ предисловія комментарій отъ 1367 г. по Р. Х. къ Higon Gi слѣдующія указанія: «The Characters of the Divine Age were pictures of objects. In the august reign of the Emperor O-jin (III—IV столѣтія послѣ Р. Х.) the classics of a foregeiu land (т. е. Китая) were first introduced into our Empire etc.»).

Здѣсь также слѣдуетъ упомянуть о томъ, что человѣкъ въ самый ранній періодъ своей цивилизаціи прибѣгалъ иногда въ письменной передачѣ своихъ мыслей себѣ подобнымъ кромѣ идеографизма также и къ помощи иныхъ вполнѣ условныхъ способовъ. Примѣромъ этому могутъ служить древнія китайскія хэ-ту 河圖 и ло-шу 洛書 (*Hager*. An explanation of the elementary characters of the chinese. London 1801, p. V. *Perny*, ibid. Tome II, p. 5. *Георгіевскій*. Первый періодъ китайской исторіи. С.-Пб. 1885, стр. 7 и др.), перувіанскія Quippos (*Acosta* (Iosè). Historia natural y moral de las Indias. Barcelona 1591. libit, cap. 8). Но «можно ли, въ самомъ дѣлѣ», говоритъ *Lenormant*, (Essai sur la propagation etc., Tome I, p. 5), «безъ явнаго искаженія понятій, назвать *письменностію* тѣ грубые и крайне неопредѣленые способы, которыми въ состояніи полнаго варварства пользовались нѣкоторые народы для передачи другъ другу идей, невыходящихъ изъ весьма ограниченнаго круга?»

[237]) Въ Magazin Pittoresque за 1843 г., р. 64, въ статьѣ *Compte figuré d'une maçon* говорится: «Un maçon anglais nommé Bartholomew Last ne savait pas écrire; il avait recours, pour établir ses comptes, à une sorte d'écriture figurée etc». Приведенный здѣсь образецъ такого письма читается такъ: Lancelot Bell (Bell—Колоколъ), цирульникъ, долженъ за починку дома, причемъ работали два подмастерья и одинъ мальчикъ и израсходовали три



четвертки кирпича и двѣ мѣры извести, десять шиллинговъ и десять пенсовъ, Bath, счетъ уплаченъ. Кромѣ того къ остаткамъ указаннаго идеографи-

то, что первыя печатныя съ рѣзныхъ деревянныхъ досокъ книги отвѣчали до извѣстной степени этому періоду, такъ какъ состояли преимущественно изъ картинъ, которыя сопровождались лишь необширнымъ текстомъ. Особенно характерный примѣръ въ этомъ отношеніи, по самому своему названію отвѣчающій приведеннымъ условіямъ, представляютъ экземпляры такъ называемой «biblia pauperum», «библія бѣдныхъ», отпечатанныя съ рѣзныхъ деревянныхъ досокъ въ первой половинѣ XV столѣтія[238]).

ческаго періода словесной письменности необходимо отнести частію такъ называемый ребусъ, изображенія на вывѣскахъ продаваемыхъ предметовъ и проч.

[238]) Какъ извѣстно, въ концѣ первой половины XV столѣтія съ успѣхомъ были примѣнены къ печатанію подвижныя мѣдныя буквы. До того же времени въ теченіи около полустолѣтія печатаніе производилось съ рѣзныхъ деревянныхъ досокъ, подобно тому какъ это за долго раньше практиковалось въ Китаѣ. Одно изъ первыхъ произведеній, напечатанныхъ съ рѣзныхъ деревянныхъ досокъ, была такъ называемая Biblia pauperum «библія бѣдныхъ», состоящая изъ картинъ священнаго содержанія съ небольшимъ текстомъ и предназначенная для неграмотныхъ, которымъ понятны лишь образы. Оригиналъ этого изданія встрѣчается въ рукописяхъ 12 и 13 столѣтія (*Figurae typicae veteris atque antitypicae novi testamenti.* On appelle cet ouvlage en Allemagne la *Bible des pauvres* parcequ'il avoit été fait pour donner une histoire abrégée de l'ancien et du nouveau Testament, par figures, à ceux qui n'avoient pas le temps ou la faculté de lire ou de ce procurer un manuscrit de la Bible entière.... cet ouvrage existe en manuscrit de 12-e et 13-e sciecles.... *Lambinet* Origine de l'imprimerie. Paris 1810. T. I, p. 61 et 62).

Въ 1877 году во время празднества, устроеннаго въ честь перваго англійскаго типографа Caxton'a (1410—1491) въ Sout-Kensington'скомъ Музеѣ въ Лондонѣ былъ выставленъ въ числѣ многихъ первопечатныхъ книгъ одинъ экземпляръ «библія бѣдныхъ» вмѣстѣ съ рѣзными деревянными досками, съ которыхъ онъ напечатанъ. На этихъ доскахъ, купленныхъ въ началѣ текущаго столѣтія Mr. Sams въ Нюренбергѣ, прочитанъ 1540 годъ, но съ большой вѣроятностію онѣ могутъ быть отнесены къ концу XV столѣтія. По окончаніи выставки съ этихъ досокъ была напечатана въ числѣ 275 экземпляровъ «новая библія бѣдныхъ» A new Biblia pauperum, которая быстро разошлась не смотря на значительную свою цѣну. Въ 1884 году вышла «малая библія бѣдныхъ» Asmaller Biblia pauperum, напечатанная съ досокъ, выполненныхъ какъ точная копія упомянутыхъ выше, хотя и меньшаго размѣра. (A smaller Biblia pauperum, London 1884. Note by the Printers).

Изданіе, подобное указанной здѣсь «библіи бѣдныхъ», было дано и въ Россіи въ половинѣ прошедшаго столѣтія, именно:

Библія лицевая, состоящая изъ гравированныхъ фигуръ, въ низу коихъ по-

(съ 2 табл.). *Его-же.* Описаніе новыхъ и малоизслѣдованныхъ формъ раковинъ изъ третичныхъ образованій Новороссіи (съ табл.). 1880 г. Цѣна 1 р. 50 к.

Вып. 2-й. *Л. Ришави.* Матеріалы для лихенологической флоры Крыма. *П. Бучинскій* Къ вопросу о развитіи дождеваго червяка (съ 3 таблицами). *Р. Прендель.* Матеріалы для геологіи сѣверо-восточной части Херсонск. губ. (съ табл.). 1881 г. Цѣна 1 р.

Томъ VIII. Вып. 1-й. *Д. Кожевниковъ.* Объ анатомическомъ строеніи лепестковыхъ цвѣточныхъ покрововъ (съ 6 табл.). *Р. Прендель.* Изслѣдованіе кристаллическихъ породъ, развитыхъ въ бассейнѣ р. Базавлука и въ верховьяхъ Саксагани (съ картой и 4 табл.). *А. Ковалевскій.* Къ исторіи развитія хитоновъ. *С. Танатаръ.* О хлорсубститутахъ фумаровой и малеиновой кисл. *И. Деппъ.* Замѣтки любителя о жизни Макроподъ. *А. Геричъ.* Объ электрическихъ явленіяхъ, наблюдаемыхъ при диффузіи нѣкоторыхъ жидкостей. *Н. Красильщикъ.* Къ исторіи развитія и систематикѣ р. Polytoma Ehr. (съ 3 табл.). *В. Репяховъ.* О личинкѣ Polygordius flavocapitatus (съ табл.). 1882 г. Цѣна 3 руб.

Вып. 2-й. *Ф. Каменскій.* Матеріалы для морфологіи и біологіи Monotropa Hypopitis L. и нѣкоторыхъ другихъ сапрофитовъ (съ 3-мя таблиц.). *Р. Прендель.* Матеріалы для геологіи сѣверо восточной части Херсонской губ. *Н. Головкинскій* Результаты геологическихъ изысканій и развѣдокъ на ископаемый уголь въ окрестностяхъ Балаклавы (съ 5 рис. въ текстѣ, картой и 2 табл.). *П. Спиро.* О нѣкоторыхъ явленіяхъ такъ назыв. животнаго магнитизма (гипнотизма) съ 3 табл. 1883 г. Цѣна 2 руб.

Томъ IX. Вып. 1-й. *И. Синцовъ.* Описаніе новыхъ и малоизслѣдованныхъ формъ раковинъ изъ третичныхъ образованій Новороссіи. Ст. 5-я (съ табл.). *И. Миклашевскій.* Матеріалы для геологіи Глуховскаго уѣзда Черниговск. губ. (съ табл.). *Н. Андрусовъ.* Замѣтка о геологическихъ изслѣдованіяхъ въ окрестностяхъ г. Керчи. *А. Клоссовскій.* Инструкція для наблюденія осадковъ, грозъ и града. *С. Переяславцева.* О развитіи коловратокъ (съ табл.). 1884 г. Цѣна 1 р.

Вып. 2-й. *Н Андрусовъ.* Геологическія изслѣдованія на Керченскомъ полуостровѣ, произведенныя въ 1882 и 1883 г. *Л. Рейнгардъ.* Альгологическія изслѣдованія. Матеріалы для морфологіи и систематики водорослей Чернаго моря съ 5 политипажами и атласомъ изъ 11 таблицъ рисунковъ. 1885 г. Цѣна 3 р.

Томъ X. Вып. 1-й. *П. Акинфіевъ.* Списокъ цвѣтковыхъ растеній г. Болграда. *Его-же.* Очеркъ флоры г. Екатеринослава (съ картой). *П. Меликовъ.* О производныхъ изомерныхъ кротоновыхъ кислотъ. *П. Бучинскій.* Краткій очеркъ фауны личаковъ Новороссійскаго края. *Л. Ришави.* Къ вопросу о такъ называемомъ гальванотропизмѣ. *В. Хмѣлевскій.* Матеріалы для флоры водорослей Бессарабской губ. *Н. Дорофѣевъ.* Матеріалы для альгологической флоры окрестностей Кишинева (и отчасти Кишиневскаго уѣзда). Протоколы 1-го, 2-го и 3-го засѣданій, происходившихъ 9, 23 февраля и 13 апрѣля 1885 года съ прибавленіемъ: сообщенія *П. Спиро*, по поводу работы Ш. Рише, надъ такъ называемымъ мысленнымъ внушеніемъ (suggestion mentale) и предварительнаго сообщенія *П. Бучинскаго* о развитіи Parapodopsis cornuta Czern. 1885 г. Цѣна 1 руб. 50 коп.

Вып. 2-й. *В. Репяховъ.* Къ анатоміи и исторіи развитія Dinophilus gyrociliatus O. Schmidt съ 4 табл. рис. *С. Переяславцева.* Protozoa Чернаго моря съ 3 табл. рис. Списокъ членовъ Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. Протоколы засѣданій. Отчетъ о дѣятельности Общества.

Въ «Запискахъ математическаго Отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей» помѣщаются статьи по высшей и низшей математикѣ, физикѣ и прикладнымъ наукамъ. Статьи присылаются въ совѣтъ Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей и могутъ представлять: а) самостоятельныя изслѣдованія, b) рефераты, с) элементарную разработку научныхъ вопросовъ и теорій съ цѣлью ихъ большаго распространенія.

Записки математическаго отдѣленія:

Томъ I. *В. Лигинъ.* Очеркъ новыхъ возарѣній Рело на машину. *С. Ярошенко.* Алгебраическія операціи въ области элементарныхъ геометрическихъ формъ. *А. Старковъ.* Общій способъ интегрированія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. *Его-же.* Прибавленіе къ предъидущей статьѣ. 1878 г. Цѣна 2 руб.

Томъ II. *А Старковъ.* Общій интегралъ уравненія съ частными производными *n*-го порядка вида $\frac{d^n Z}{d\varphi d\xi \ldots d\psi d\omega} = \Psi(\varphi, \xi, \ldots \psi, \omega) Z + \Phi(\varphi, \xi \ldots \psi, \omega)$. *Его-же.* Къ вопросу объ интегрированіи совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій. *А. Кононовичъ.* Независимое отъ исчисленія Ламберта опредѣленіе albedo бѣлаго картона. *Th. Schwedoff.* Théorie mathématique des formes cométaires. *Р. Августиновичъ.* Изслѣдованіе проводимости жидкихъ и расплавленныхъ изоляторовъ. 1879 г. Цѣна 2 руб.

Томъ III. *Th. Schwedoff.* Théorie mathématique des formes cométaires (suite). *А. Старковъ.* О сложныхъ процентахъ и о текущихъ счетахъ. *В. Лигинъ.* Научная дѣятельность Мишеля Шаля. *Г. Шапиро.* Основаніе для теоріи общихъ кофункцій и ихъ примѣненій. Протоколы засѣданій съ 20 ноября 1876 г. по 13 февраля 1881 года. 1881 г. Цѣна 2 руб. 50 коп.

Томъ IV. *А. Старковъ.* О поверхностяхъ обнимающихъ всѣ положенія движущейся сферы перемѣннаго радіуса. *Н. Умовъ.* Изъ лекцій математической физики: 1) Теорія безконечно малыхъ колебаній консервативной системы около положенія устойчиваго равновѣсія. 2) Колебанія системы съ одною степенью свободы. *В. Лигинъ.* Непосредственныя примѣненія солнечной теплоты (инсоляторы). *Его-же.* Литература вопроса о сложныхъ циркуляхъ. Протоколы засѣданій съ 21 марта 1881 г. по 6 апрѣля 1882 г. 1883 г. Цѣна 1 руб. 50 коп.

Томъ V. *А. Клоссовскій.* Устройство метеорологической службы на югѣ Россіи. *Его-же.* Наблюденія надъ температурой почвы въ Елисаветградѣ. *И. Занчевскій.* О трехшестной сочлененной системѣ. *Н. Жуковскій.* Объ ударѣ двухъ шаровъ, изъ которыхъ одинъ плаваетъ въ жидкости. *А. Старковъ.* Къ вопросу о поверхности наименьшаго сопротивленія при движеніи въ несжимаемой жидкости. *Н. Жуковскій.* О графическомъ рѣшеніи основнаго уравненія при вычисленіи планетныхъ орбитъ. *Н. Сонинъ.* Обобщеніе одной формулы Абеля. *П. Новиковъ.* Признакъ устойчивости движенія и его связь съ однимъ изъ признаковъ maximum'а или minimum'а простаго опредѣленнаго интеграла. *Ѳ. Орловъ.* Изъ теоріи рулеттъ. Протоколы засѣданій съ 23-го марта по 16-ое декабря 1883 года. 1884 г. Цѣна 1 руб. 50 коп.

Томъ VI. *Н. Сонинъ.* Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія. *А. Старковъ.* Объ одномъ линейномъ дифференціальномъ уравненіи 3-го порядка. *Его-же.* Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія. *Его-же.* О нѣкоторыхъ особенностяхъ въ постановкѣ задачи Ньютона о поверхности наименьшаго сопротивленія. *Н. Умовъ.* Геометрическое значеніе интеграловъ Френеля. *А. Старковъ.* Интегрированіе раціональной дроби съ мнимыми корнями въ знаменателѣ. *Н. Сонинъ.* Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія (статья вторая). *В. Лигинъ.* Новое построеніе Мориса д'Окавь для опредѣленія отношеній скоростей въ направляющихъ механизмахъ Посселье и Гарта. Протоколы засѣданій съ 3 марта 1884 по 17 апрѣля 1885 г. *Приложеніе:* Русская библіографія по математикѣ, механикѣ, астрономіи, физикѣ и метеорологіи за 1884 годъ. 1885. Цѣна 1 руб. 50 коп.

Цѣна VII тома 2 руб. 50 коп.

Складъ изданія при Новороссійск. Обществѣ Естествоиспыт., въ Одессѣ.

3 2044 102 937 042